北京市教委特色专业建设资助项目

首都经济贸易大学统计学前沿文库

一些力学系统的可积性与积分方法

INTEGRABILITY AND INTEGRATION OF SOME MECHANICAL SYSTEMS

于威威 / 著

首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press

北京市教委特色专业建设资助项目
首都经济贸易大学统计学前沿文库

一些力学系统的可积性与积分方法

INTEGRABILITY AND INTEGRATION OF SOME MECHANICAL SYSTEMS

于威威/著

首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press
·北京·

1 引 言

从17世纪牛顿(Newton)奠定经典力学基础,到19世纪末,力学已经形成了相当完整的理论体系[6,10,96]。通常,大多数力学问题都是非线性的,需借助微分方程进行定性描述。而积分问题是微分方程理论研究中非常重要且困难的部分。它与分析、几何、代数等领域均有着密切的联系,是一个意义重大而内容丰富的研究领域。积分问题早期工作主要集中在方程积分法的寻找上,如已找出的分离变量法、积分因子法、积分变换法(如拉普拉斯变换、傅立叶变换等)、级数法及格林函数法等一系列积分方法。随着研究的深入,人们逐步发现,除了有限的少数微分方程之外,通常方程不可能进行显式积分。特别是刘维尔(Liouville)严格证明了对于大部分的微分方程,一般利用积分方法不能进行求解[69,87]。此后,微分方程的研究较多集中在定性分析与数值计算上。但寻找一些方程的积分法、求精确解仍是微分方程的一个重点。对一些学科,关键的微分方程能否找到精确解往往决定了相应的数学模型能否被该学科接受这一重大问题,如量子力学中的薛定谔方程、广义相对论中的爱因斯坦场方程,如果不能找到对应氢原子的定态解和中心对称引力场的史瓦西(Shwarzschild)解,则难以想象它们仍能像现在那样在相应学科中占主要地位。尽管迄今已发展了多种微分方程可积性理论[87,96],对给定微分方程积分法的研究一般还是很困难的。实际上,描述一般非线性力学系统,影响其方程可积性的内在因素多且复杂,进行各因素之间的制约评价也相当困难,即便对简单的方程进行可积性的判定也不是一个容易的问题。因此,对力学中的一些重要微分方程,研究其积分法仍是极有意义的研究课题。

在此背景下,本书具体研究几类经典力学系统的可积性与积分方法,并对系统在可积或近可积情况下的运动性态进行描述尝试。

1.1 研究背景

1.1.1 微分方程李群理论

19 世纪上叶，阿贝尔（Abel）利用群论思想证明了五次及五次以上多项式的根一般不可能用根式进行表达，迦罗瓦（Galois）进一步给出了判定具体多项式的根可用根式表示的条件[17,37]，刘维尔（Liouville）则证明了一般的黎卡提（Riccati）方程不可能用积分法进行积分。此系列研究成果大大促进了数学多个领域的发展。在刘维尔之后，一部分微分方程的研究转向定性理论。另一个重要的研究方向则是仿效阿贝尔和迦罗瓦的思想，设法将群论与方程的可积性理论相结合。例如，李（S. Lie）建立的李群理论。李证明了对给定的 1 阶常微分方程如果能找到一个该方程所接受的非平凡李群，该方程就可用积分法进行积分[11,60,86]。又如，皮卡（Picard）与瓦斯尔特（Vessiot）提出了微分迦罗瓦理论（或称微分代数）。该理论仿照多项式方程的迦罗瓦理论，对线性齐次微分方程建立起相应的微分迦罗瓦群，并将群的可解性与方程的可积性联系起来[38,40,86]。另外，克莱因（Klein）和福克斯（Fuchs）等还发展了单值群理论，单值群既可对福克斯型的线性微分方程的黎曼（Riemann）曲面结构作精细描述，也可用于该类方程的可积性研究[21,35]等。

在上述理论中，李群理论是其中发展较为完善的理论之一，是研究微分方程可积性问题的一种重要手段。用李群理论研究微分方程的可积性已经取得了一系列重要结果。对于拉格朗日（Lagrange）经典力学系统，由诺特（Noether）定理可知，当系统接受一类单参数李群时，可构造性地得到该系统的一个首次积分[6,11]。对 2 阶自治系统，如果知道系统接受的一个单参数李群，就可用积分法求出系统的一个首次积分[11,59,96]。对于高阶自治系统，如果知道系统所接受的一个单参数李群，原则上可以通过坐标变换使该系统的阶数降低一阶[6,86]。对于 $n(n\geqslant 3)$ 阶自治系统，传统的李群理论证明了如果系统接受一个含 r 个参数的可解李群，则可将系统的阶数降低 r 阶，当 $r=n-1$ 时，系统就可用积分法求解[11]。这些结果极大地促进了微分方程可积性理论的发展。但是在李群理论的实际应用中，系统降阶的实现仍依赖于

求解由李群的生成元所决定的微分方程组。要找到给定系统所接受的一个多参数李群，一般是不容易做到的。针对这一困难，文献[24]提出了一种附着于给定自治系统的李模(Lie Module)理论，证明了下述事实：对于给定的n阶常微分方程，若接受$n-1$个相互独立的非平凡的单参数李群，它们的生成元可张成一个以方程的首次积分为系数域的模结构，方程所接受的任意其他单参数李群的生成元都在该模空间中。文献[24]给出了一种判定一个n阶自治系统接受某个单参数李群具体可行的方法，得到了系统接受一个单参数李群时的一系列理论结果，使得在该条件下进行系统积分和求取首次积分变得相对容易。

在李模理论的基础上，文献[33,86]应用其结果找到了经典陀螺系统所接受的一个单参数李群，利用该李群对一般条件下的柯瓦列夫斯卡娅(Kowalevskaya)陀螺系统求出了关键的第四个首次积分[33,86]。之后，文献[25]又对文献[33,86]的结论给予了更一般性的归纳和深入拓展，借助自治系统所接受单参数李群的形式，给出了拟齐次性的一种新定义。该定义的形式更深入广泛，使得一些经典的力学系统，如陀螺系统、n体系统等均可涵括在该定义下的拟齐次自治系统中。在探索其可积性的问题上，文献[25]不仅通过讨论拟齐次自治系统首次积分的解析特性给出求解该类系统首次积分的方法，且利用李群的思想给出了2阶拟齐次多项式系统首次积分为拟齐次多项式形式的条件。关于这方面的相关工作，可具体参考文献[25,33,86]。

为进一步探讨拟齐次自治系统的可积性质，本书的相关工作体现在借助李群思想揭示拟齐次自治系统不变流形的解析特性，给出求解系统不变流形的适用方法以及讨论系统首次积分次数需满足的条件。

1.1.2 重刚体绕固定点运动问题

重刚体绕固定点运动问题是理论力学中的经典问题之一。迄今，许多文献从不同角度介绍和研究了重刚体动力学的可积性问题[5,6,10,71-75,96]。经典陀螺系统的欧拉—泊松(Euler-Poisson)方程组描述了重刚体绕固定点转动的规律，是重要的力学系统之一。1749年，达朗贝尔(D'Alembert)首先开始了刚体绕固定点转动问题的研究，他指出，需要6个2阶常微分方程对这

种运动进行描述。1750 年,欧拉(Euler)通过引入两组坐标系(其中一组为随体坐标),建立了刚体动力学方程并给出刚体动力学的一般提法。此后,拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)以及泊松(Poisson)等在欧拉工作的基础上作出进一步研究,得到了由 6 个自治常微分方程构成的陀螺系统欧拉—泊松方程组[5,6,75,96]。

为积分该系统,一般需要 5 个相互独立的首次积分,而其中前三个独立的首次积分,即能量积分、面积积分以及平凡积分在不添加任何限制条件下很容易得到,后两个独立首次积分的求解是解决问题的关键。由雅可比定理[14]可知,在已知三个独立积分的基础上,只要可寻找出该系统的第四个首次积分,陀螺系统就可得到完全求解。1750 年,欧拉在 $x_G = y_G = z_G = 0$ 情形下找到系统的第四个首次积分。1788 年,拉格朗日在 $A = B, x_G = y_G = 0$ 情形下也找到了第四个首次积分。后来众多数学家参与到欧拉—泊松方程组的研究工作,如拉普拉斯、泊松、哈密顿(Hamilton)及雅可比(Jocabi)等[14]。其中泊松的工作为刚体动态研究和数学理论的连续奠定了基础,而哈密顿和雅可比的工作为力学微分系统及几何学建立了很好的联系。直至 1887 年,俄罗斯女数学家柯瓦列夫斯卡娅利用较艰深的微分方程解析理论在 $A = B = 2C, y_G = z_G = 0$ 情形下求得了另外的第四个首次积分[5,14,96],并进一步使用函数论的观点将系统在该情况下的解以超椭圆函数的形式表达出来[96]。之后,人们继续努力寻找陀螺系统的其他完全积分的情况。从 1758 年到 1959 年两百年的时间里,借助各种方法,又得到了陀螺系统的九种特解形式,其中包括 1890 年得到的赫斯(Hess)情形的特解,1900 年得到的格里切夫—齐普林基尼(Горячев - Чаплыгин)情形的特解等,9 种特解的限制条件及具体表达式可参见文献[96]。

近几年来,仍有系列文献对陀螺系统作进一步的深入研究,特别是俄罗斯的一些研究者,他们一般都是在经典陀螺系统的基础上弱化或转化条件后对其进行可积性或其他方面的研究[2,12,42,71~74]。而文献[25,88]则利用单参数李群理论研究陀螺系统的可积性,得到了该系统接受的一个非平凡的单参数李群,并借助该李群将上述三种经典情形的首次积分进行了思想统

一,由此找到了系统在一般柯瓦列夫斯卡娅情形下的第四个首次积分。该首次积分在常数 $y_G=0$ 的情况下与历史上柯瓦列夫斯卡娅情形下的第四个首次积分是相同的,进而发现且改正了文献[7](或[9])中列出相应结果中的错误[24,25,88]。

基于首次积分属于不变流形的研究范畴,本书着眼于使用拟齐次自治系统不变流形的解析特性,以统一思想寻找系统的不变流形及特解,特别是系统在新情形下的不变流形。

1.1.3 流体动力学基本运动方程

流体动力学作为流体力学的一个重要分支,主要研究流体在各种力作用下的运动规律及其与边界和其他运动形态之间的相互作用机理。随着数理学科和流体工程学科的互相推动,流体动力学得以广泛发展,已成为航空航天、动力、机械、环境、生物等多种高科技学科的重要理论工具,并显示了其越来越重要的基础作用和蓬勃生命力。现代技术和新的发展必然要求对流体运动的行为有更深更细致的了解,但这些要求在数学理论上就可能遭遇非常具有挑战性的困难,从物理背景或角度来看似乎一目了然的结论,在数学上可能就是尚未解决的难题。

自然界存在的流体几乎均具有大小不同的黏性。通常人们视黏性应力很小且流体质点间的相对运动速度不大的流体为理想流体(如水、空气)。流体动力学较早期的研究成果大都是针对理想流体得到的。流体动力学领域中不可压缩、非黏性特殊流运动在数学上的最初表述就是欧拉方程。1755 年,欧拉运用一些结构性假设将牛顿(Newton)运动定律应用于流体动力学理论研究中,建立了描述理想流体运动的重要微分方程——欧拉方程[46,89,103,105]。作为流体动力学的基本方程之一,欧拉方程是研究理想流体各种运动规律的基础。在之后两百多年的时间里,包括许多著名数学家在内的众多科学工作者对该类方程进行了广泛深入的研究,在解存在唯一性、正则性、渐近性、稳定性以及数值计算、最优控制等方面取得了一系列令人瞩目的进展[99,105]。但由于方程本身包含的非线性特征,使得系统的精确求解等很多基础性问题尚未取得令人满意的解答。尽管针对理想流体运动的某些实际无旋问题,利用速度势可通过将该类方程化为 2 阶线性拉普拉斯方

程使问题大为简化，但至今仍尚无求解该类非线性方程的普遍方法[46,89,103,104]。

19 世纪初，许多学者开始考虑流体运动中能量耗散的影响，推动了流体动力学的进一步发展。1821 年，纳维(Navier)等人在经典欧拉方程的基础上加入了分子间的作用力。1845 年，斯托克斯(Stokes)将这种分子间作用力通过黏性系数的形式进行表现，最终建立了描述黏性不可压缩流体动量守恒的运动方程，简称纳维—斯托克斯(Navier - Stokes)方程。纳维—斯托克斯方程奠定了近代黏性流体动力学的理论基础[13,45,53,99,103,104]，构成当代数学物理学的一个中心议题和经典物理模型。从形式上看，该方程较之欧拉方程增加了含有黏滞系数的 2 阶导数项，在刻画流体黏滞特性方面更为细致。但由于黏性流体运动总是有旋的，不存在速度势及伯努利积分，所以该类方程很难进行普遍简化，从而精确求解的问题也就变得更为困难。除在一些如转动柱面间的流动、平行流动中具有代表性的圆管内哈根—泊肃叶流动及两平行平板间的库埃特流动等极少数的特殊情况之外，目前该类方程大范围经典解的存在性[44,81,101,102]尚未得到证明。另外，即使在可求精确解的各种特例情形中，非线性项也常常被剔除掉。因此，非线性项的评价仍是困难的。

对基本运动方程的精确求解问题作进一步深入探讨是流体动力学中一个重要的基础研究课题，其理论和现实意义毋庸置疑。与此同时，近年来计算机技术的不断进步，快速推动了各种流体动力系统数值解的求取，同时帮助人们加深了对精确求解问题的认识。另外，由于包括部分理想流体在内的大多数流体的运动都是有旋的，且黏性流体有旋运动还存在旋涡随黏性耗散作用逐渐消失等现象，因而，对流体旋涡运动的这些现象及规律的合理描述仍属难题。我们选择该领域中的基础问题，即对旋涡运动的一些基本现象及其规律作进一步讨论。传统流体力学通常采用引入涡线、涡量、速度环量等概念的方法，使用斯托克斯(Stokes)、汤姆孙(Thomson)、赫尔姆霍茨(Helmholtz)定理及毕奥—萨伐尔(Biot - Savart)定律来度量有旋流动空间速度场和旋涡场之间的关系，刻画流体微团的旋转速度随时间、空间的变化规律以及旋涡在流体中所诱导的速度分布[101,102]。文献[89]则通过选取流函

数的一些特殊形式,求取了二维欧拉方程的一些正余函数组合形式的定常解,更简洁地描述了不同旋涡的运动。但受求解方法的限制,文献[89]所得到的这些特定解也只能描述理想流体定常条件下的旋涡运动,对于大多数黏性流体的定常或非定常旋涡运动以及旋涡随黏性逐步衰减等现象还无法进行描述。

以上述流体动力学为背景,本书的工作在于提出“伪势”概念,给出二维不可压缩流体有旋运动的精确求解方法,由此求欧拉方程及纳维—斯托克斯方程的一系列有旋解,特别是求能够描述随黏性逐步衰减规律的旋涡精确解,并给出欧拉方程周期分布的无穷多旋涡解在周期扰动下存在混沌现象的理论证明。

1.2 基本概念

以下介绍书中涉及的一些基本概念。

考虑自治系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{1.1}$$

式中:$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in D\subseteq R^n$;$\dot{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,t\in[0,+\infty)$。

对 $x\in D$,$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))^T$ 是足够阶的连续可微函数;$x(t;x_0)$ 是系统(1.1)满足初值条件 $x(0;x_0)=x_0\in D$ 的解。

如果对所有 $t\geqslant 0$,$f(x_0)=0$,则称 x_0 是系统(1.1)的奇点;如果 $f(x_0)\neq 0$,则称 x_0 是系统(1.1)的常点。

系统(1.1)对应的微分算子记为

$$L_f=f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

定义 1.1[60] 设 Δ 是 R 中关于原点对称的一区间。开域 $U\subset R^n$(或 C^n)上的单参数李群 G 是满足下列条件的单参数变换族 $g:U\times\Delta\to R^n$(或 C^n):

①对任何 $x\in U$,有 $g(x,0)=x$;

②对任何 $a,b,\phi(a,b)\in\Delta,x\in U$,有 $g(g(x,a),b)=g(x,\phi(a,b))$,其中 $\phi(a,b)$ 是一个 a,b 之间的给定的群运算;

③若对所有 $x\in U$ 和 $a\in\Delta$,有 $g(x,a)=x$,则 $a=0$;

④$g \in C_\infty(U \times \Delta)$。

定义 1.2[60] 系统(1.1)接受单参数李群 G 是指，经过李群 G 中任何元素的变换后，系统(1.1)的形式不变，只是其中的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 换成变换后的对应坐标。

定义 1.3[4] 如果函数 $F(x)$ 在系统(1.1)的任何解上保持常数，即对所有 $t \geqslant 0$ 和 $x_0 \in D$，有 $F(x(t;x_0))=c(x_0)$，则称函数 $F(x)$ 是系统(1.1)的首次积分。

定义 1.4[29] 设流形 $M \subset D$，如果对于所有 $t \geqslant 0$ 和任意 $x_0 \in M$，有 $x(t;x_0) \in M$，则称 M 为系统(1.1)的不变流形；如果所有的 $x_0 \in M$ 是系统(1.1)的奇点，则称流形 M 为系统(1.1)的奇不变流形。

定义 1.5[89] 如果液体(或气体)的密度可认为是不变的，在运动的全部时间内对流体的整个体积来说是恒定的，或者说在运动过程中不会发生流体的压缩或膨胀，就将这种运动称作不可压缩流体的运动。

1.3 本书所需的重要结论

下面给出本书需要用到的几个重要结论。

引理 1.1[24] 系统(1.1)接受以 V 为生成元的单参数李群的充要条件是存在函数 $B(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in C_\infty$，使得微分算子 V 与 L_f 的李括号满足

$$[V,L_f]=B(x_1,x_2,\cdots,x_n)L_f$$

引理 1.2[24] 若 V 是系统(1.1)所接受的单参数李群生成元，$\Omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是系统(1.1)的首次积分，则 $f^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=V\Omega$ 为系统(1.1)的首次积分或常数。

引理 1.3[24] 设

$$V_i=V_i^1\frac{\partial}{\partial x_1}+V_i^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+V_i^n\frac{\partial}{\partial x_n}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

是系统(1.1)接受的独立的单参数李群，则有

$$[V_i,V_j]=\sum_{k=1}^{n-1}C_{ij}^kV_k+C_{ij}^0L_f$$

式中：L_f 是系统(1.1)对应的微分算子；C_{ij}^0 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数或常数；C_{ij}^k 是系统(1.1)的首次积分或常数。

引理 1.4[57] $M=\{x: V_i(x)=0, i=1,2,\cdots,n-m, m=\dim M\}$ 是系统(1.1)的不变流形的充要条件是

$$L_f V_i = \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_{ij}(x) V_j \quad (i=1,\cdots,n-m)$$

式中:$\lambda_{ij}(x)$是连续函数。

引理 1.5[57] 系统的首次积分 $F(x)=c$ 在相空间定义的不变流形,有时也被称作积分流形。如果系统(1.1)有 $k(k<n)$个独立的首次积分 $F_i(x)=c_i(i=1,2,\cdots,k)$,则称流形 $M=\{x: F_i(x)=c_i, i=1,2,\cdots,k\}$ 是系统(1.1)的 k 参数不变流形,有时也称为 k 积分不变流形。

研究非线性系统混沌的方法很多,本书我们主要应用梅尔尼科夫方法来研究欧拉方程旋涡解在周期扰动作用下的复杂性。以下介绍梅尔尼科夫函数方法在 2 阶系统的应用。梅尔尼科夫函数理论的基本思想是由梅尔尼科夫提出的[55,56],后来,霍尔姆斯(Holmes)和马斯登(Marsden)发展了类似的方法,应用于由偏微分方程产生的无限维流形和多自由度哈密顿系统[32]。

已知受周期扰动的 2 阶系统

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x,y)+\varepsilon g_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x,y)+\varepsilon g_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

式中:$f_1(x,y)$,$f_2(x,y)$对 x,y 有连续的偏导数;$g_1(x,y)$,$g_2(x,y)$对 x,y 连续且周期地依赖于时间 t。

如果扰动系统(1.2)对应的非扰动系统($\varepsilon=0$)满足如下条件:

①非扰动系统有一个鞍点 p_0 和一条连接鞍点 p_0 的同宿轨道 $q_0(t)$;

②设 $\Gamma_0=\{q_0(t)\,|\,t\in R\}\cup\{p_0\}$,$\Gamma_0$ 的内部充满连续的周期轨道 Γ_α,$\alpha\in(-1,0)$。记 X_α 是 Γ_α 的周期,设 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\Gamma_\alpha=q_0(t)$,$\lim\limits_{\alpha\to 0}X_\alpha=\infty$。

则定义梅尔尼科夫函数为

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(q_0(t))\cdot g_2(q_0(t),t+t_0)-f_2(q_0(t))\cdot g_1(q_0(t),t+t_0)]\,dt$$

且有如下结论:

引理 1.6[28,69] 如果 $M(t_0)$有不依赖于 ε 的简单零点,则当 ε 充分小

时,扰动系统(1.2)的稳定流形与不稳定流形横截相交,即扰动系统(1.2)的庞卡莱(Poincare)映射有横截同宿点。进而,扰动系统(1.2)的鞍点附近的庞加莱映射同胚于斯梅尔(Smale)马蹄映射,即混沌出现。

对于连接不同鞍点的异宿轨道来说,梅尔尼科夫函数与同宿轨道的情形相类似,也有类似于引理1.5的结论。

1.4 本书的主要内容及安排

全书共分为五章,结构安排大致如下:

第1章概述书中所涉及的微分方程李(Lie)群理论、重刚体绕固定点运动问题以及流体动力学基本运动方程的背景知识等,并介绍本书所需要的一些基本定义和引理。

由于首次积分在广泛意义上也属于不变流形的研究范畴,为进一步探索拟齐次自治系统的可积性质,本书的第2章基于单参数李群方法,揭示了拟齐次自治系统不变流形的解析特性,力图为寻找该类系统的不变流形提供一种较灵活、实用的方法。通过定义平衡点及约化的柯瓦列夫斯卡娅(Kowalevskaya)指数,给出了系统存在拟齐次多项式形式的首次积分其次数应满足的条件。

第3章将拟齐次自治系统不变流形的解析特性具体应用于经典陀螺系统,实现了几种求特解方法的统一,并求出了对刚体重心分布限制在条件$x_G=0$下系统的一个新的三维不变流形,进而对此三维不变流形上的运动进行了讨论及数值模拟。

第4章在流体动力学传统势流理论的基础上,提出“伪势”概念,定义流体有旋运动的速度项,探索给出一种求二维不可压缩流体有旋运动精确解的方法,并应用此方法求得了一系列欧拉方程及纳维—斯托克斯(Navier-Stokes)方程的稳态或非稳态有旋解,特别是得到了周期分布的无穷多旋涡解。当考虑黏性项时,该解可描述旋涡随黏性逐步衰减的规律。此外,还应用梅尔尼科夫(Melnikov)方法,研究了欧拉方程周期分布的无穷多旋涡解在周期扰动下的复杂运动,证明了在一定条件下上述旋涡变成非稳态以及旋涡之间的区域可能出现斯梅尔(Smale)意义的混沌现象。

第5章对全书工作进行总结,并给出了今后有待解决的问题和研究方向。

2 拟齐次自治系统不变流形的解析特性及首次积分次数满足的条件

2.1 引言

微分方程拟齐次性的概念可以通过不同的方法予以定义[8,42]。文献[25,33]借助自治系统可接受的确定单参数李群的形式[31]，给出了拟齐次性的一种新定义，使得一些经典力学系统，如陀螺系统、n 体系统等均涵括于该定义下的拟齐次自治系统中。文献[33]基于利用拟齐次自治系统的李群特征，通过讨论这类系统首次积分的解析特性，重新得到了陀螺系统的三种经典可积情形下的所有首次积分，特别对柯瓦列夫斯卡娅(Kowalevskaya)陀螺在较一般的条件下给出了系统第四个正则的首次积分，纠正了文献[7,9]相应积分的错误。文献[25]中还利用李群思想给出 2 阶拟齐次多项式系统的首次积分，该积分为拟齐次多项式形式的条件。以上成果均表明，李群是研究拟齐次自治系统的可积性、降阶、求特解等问题的有力工具。

系统的首次积分在广泛意义上仍属于不变流形的探讨范畴。本章我们继续以上工作，基于拟齐次自治系统的李群方法，揭示该类系统不变流形的解析特性，力图为寻找该类系统的不变流形提供一种较灵活、更实用的方法。

此外，在文献[25,36]关于齐次多项式系统首次积分的讨论结果的基础上，本章还尝试对拟齐次自治系统首次积分的存在性作进一步的探讨，通过引入平衡点及约化的柯瓦列夫斯卡娅指数，给出该类系统存在拟齐次多项式形式的首次积分其次数应满足的条件。

2.2 拟齐次自治系统不变流形的解析特性

考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{2.1}$$

式中：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，$D$ 为 R^n（或 C^n）的子域；$X_i:D\to R$（或 C）；X_i 在 D 上解析；$t\in R$（或 C）。

系统对应有偏微分算子

$$X=X_1\frac{\partial}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

下面，我们先利用李群的思想定义拟齐次自治系统，在此基础上讨论系统不变流形所具有的解析特性。

2.2.1 拟齐次自治系统的定义及部分引理

设

$$V=V^1\frac{\partial}{\partial x_1}+V^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+V^n\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{2.2}$$

为一个单参数李群的生成元。

引理 2.1[27] 对于系统(2.1)，若存在函数 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得李括号 $[X,V]=AX$，则系统 (2.1)接受以 V 为生成元的单参数李群。

借助于系统接受的单参数李群生成元的形式(2.2)，我们给出与文献[36]相一致的拟齐次自治系统的定义及部分引理（参见文献[25]）。

定义 2.1 若存在 $n+1$ 个常数（实数或复数）$k_0,k_1,\cdots,k_n$，使得系统(2.1)接受形如

$$V^*=k_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+k_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+k_nx_n\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{2.3}$$

的单参数李群生成元，且 $[X,V^*]=k_0X$，则称系统(2.1)为拟齐次自治系统。若常数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$ 均为 0，则称拟齐次自治系统(2.1)是平凡的。

定义 2.2 若常数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$ 均为整数，则称非平凡系统(2.1)为整数型拟齐次自治系统，且整数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$ 分别称为相应变量 $t,x_1,\cdots,x_n$ 的（广义）次数。

定义 2.3 若整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 非零且具有相同的符号，则称系统(2.1)为正则的拟齐次自治系统；否则，为奇异的。

定义 2.4 若 D 上解析函数 $f(x)$ 满足 $V^* f(x) = mf(x)$，则称 $f(x)$ 为 m 次的 V^* 型的拟齐次函数。

引理 2.2 设 $P_m(x)$ 为 D 上解析的 m 次拟齐次函数，若 $XP_m(x)$ 不为 0，则 $XP_m(x)$ 为 $m-k_0$ 次的拟齐次函数，且对于正则系统，$k_0 \leqslant 0$。

2.2.2 不变流形的解析特性

本节将以拟齐次自治系统定义及引理为基础，讨论系统不变流形的解析特性。涉及的不变流形概念，采用列维—奇维塔(Levi - Civita)在 1927 年给出的一种等价形式[42]。

定义 2.5 对于系统(2.1)，若存在 m 维流形 $M = \{x \mid F_i(x) = 0, i = 1, 2, \cdots, n-m,\ m = \dim M\}$，其中函数(组) $F_i(x)$，$i = 1, 2, \cdots, n-m$，满足

$$XF_i(x) = \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_{ij}(x) F_j(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n-m) \tag{2.4}$$

并且该函数组函数无关，则称 M 为系统的 m 维不变流形，式(2.4)中的因子 $\lambda_{ij}(x)$ 称为不确定因子。

按照该定义，M 为系统(2.1)的不变流形意味着：对于 $\forall x \in M$，各函数 $F_i(x)$ 的变化率为零，即

$$\frac{\mathrm{d}F_i(x)}{\mathrm{d}t}\Big|_{x \in M} = XF_i(x)\Big|_{x \in M} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-m)$$

因此，不变流形的实际意义可以表述为：以流形 M 上任意点为初值的系统的解曲线总保持在该流形上。

如果满足式(2.4)的函数组 $F_i(x)$，$i = 1, 2, \cdots, n-m$ 函数相关，集合 $M = \{x \mid F_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n-m,\ m = \dim M\}$ 不一定是 m 维流形，但仍是系统(2.1)的不变集合。

众所周知，如果构成不变流形的某些函数 $\Phi(x)$ 经偏微分算子 X 作用后 $X\Phi(x) = 0$，则该函数 $\Phi(x)$ 是系统的首次积分，对任意的常数 c，$\Phi(x) = c$ 或 $\Phi(x) - c = 0$ 都是一个 $n-1$ 维的不变流形。因此，从广泛意义上讲，首次积分包含于不变流形的研究范围内。

以下我们将针对系统不同维数的不变流形讨论其解析特性。

2.2.2.1 $m=n-1$ 维不变流形的解析特性

当 $m=n-1$ 时，M 为系统的 $n-1$ 维不变流形，有如下解析特性定理成立。

定理 2.1 如果存在正则的拟齐次自治系统(2.1)的一个 $n-1$ 维不变流形 $F(x)$ 在包含原点的区域内解析，并且 $F(0)=0$，则系统至少存在一个 $n-1$维拟齐次多项式形式的不变流形，或者非平凡(指不恒为常数)的首次积分。

证明 假定存在正则拟齐次自治系统(2.1)的一个 $n-1$ 维不变流形 $F(x)$ 在包含原点区域内解析，则 $F(x)$ 可在原点区域内展成幂级数，进而可改写成按拟齐次多项式展开的级数，即

$$F(x)=P_j(x)+P_{j+1}(x)+\cdots+P_k(x)+\cdots \quad (j\geqslant 0) \tag{2.5}$$

式中：$P_k(x)$ 为 k 次拟齐次多项式，而且最低次多项式 $P_j(x)$ 非零。

另外，不变流形 $F(x)$ 按照定义应当满足

$$XF(x)=\lambda(x)\ F(x) \tag{2.6}$$

式中：$\lambda(x)$ 为不确定因子。

由于 X_i 在 D 上解析，对于正则拟齐次自治系统，X_i 各项的传统次数均不会小于 1，$XF(x)$ 的最低次数不会低于 $F(x)$ 的最低次数。因此，若 $\lambda(x)\neq 0$，其在原点附近的幂级数展开就不能有负指数项，还可有序地按拟齐次多项式形式展开，即

$$\lambda(x)=\lambda_i(x)+\lambda_{i+1}(x)+\cdots \quad (i\geqslant 0) \tag{2.7}$$

式中：$\lambda_i(x)$ 非零。

将式(2.5)和式(2.7)代入式(2.6)，得到

$$XP_j(x)+XP_{j+1}(x)+\cdots=\lambda_i(x)P_j(x)+[\lambda_i(x)P_{j+1}(x)+\lambda_{i+1}(x)P_j(x)]+\cdots \tag{2.8}$$

根据引理 2.2，对于 $k(k\geqslant j)$ 次的拟齐次多项式 $P_k(x)$，如果 $XP_k(x)\neq 0$，则 $XP_k(x)$ 为 $k-k_0$ 次拟齐次多项式。比较等式(2.8)两端的多项式次数，存在如下两种情况：

①若等式左端首项 $XP_j(x)\neq 0$，必定有 $XP_j(x)=\lambda_i(x)P_j(x)$，则系统至少存在一个 $n-1$ 维拟齐次多项式形式的不变流形 $P_j(x)$，此时不确定因子 $\lambda_i(x)$ 的次数 $i=-k_0$。