高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学
历年真题解析
（数学一和数学二适用）

● 全国硕士研究生入学
统一考试辅导用书编委会
● 主审　张宇　王莉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

考研数学历年真题解析

（数学一和数学二适用）

2013

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会
● 主审　张宇　王莉

KAOYAN SHUXUE LINIAN ZHENTI JIEXI (SHUXUE YI HE SHUXUE ER SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

本书特色

分析历年真题中涉及的数学基本知识和公式、概念，归纳基本运算方法，以利于考生理出知识框架。在试题解析中，指出了试题考查的知识点，以利于备考生明确试题的立意。对部分试题给出了考生的典型运算错误及错误产生的原因，以利于备考生防范。对部分试题给出了特殊解题技巧或试题的可能变化形式，或对试题中某些条件的作用进行解说，或指出某些题目在命制时出于考查知识点或难度等因素而有意放宽题设条件等说明，目的是利于考生深入复习。

适用范围：

适合理工类的考生在考研数学的整个复习阶段使用。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学历年真题解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编．—北京：高等教育出版社，2012.4
数学一和数学二适用
ISBN 978-7-04-034629-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 045441 号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王凌波
责任校对 胡晓琪　　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.25	版　　次	2012 年 4 月第 1 版
字　　数	390 000	印　　次	2012 年 4 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	32.00 元

物 料 号　34629-00

2010年以来，我国报考硕士研究生的考生呈逐年增加的趋势。另一方面，教育部对硕士研究生的数学知识，能力与素质的要求亦更加明确，表现在数学试题上更加规范化。编者通过从事考研辅导及日常的教学工作中了解到，考生由于所学的专业不同，对数学知识的要求各不一样，使用的教材也参差不齐，给参加考试带来难度，所以希望有一本基础知识系统、讲解精练、重点突出及针对性强的数学复习资料。

本书是为参加全国硕士研究生入学统一考试的考生所编写的一本数学复习资料。其目的旨在帮助考生加强与巩固基础知识、了解试题的变化趋势与动态、掌握解决数学问题的基本手段与方法、总结规律性的论证与运算技巧等。以期达到提高考生的应试能力。

本书内容由两大部分组成，第一部分为2003年至2012年全国硕士研究生入学统一考试数学试题。第二部分为这十年试题的解析，内容包括试题答案、考点、解题思路与步骤、试题解析、解题技巧、典型错误、评注、拓展变化及应试对策等内容。

为提高使用效果，达到编者的预期目的，建议考生在阅读本书时注意如下几方面事项：

1. 考点是按教育部考试中心颁布的《数学考试大纲》的内容与要求编写。通过这部分内容考生一方面要掌握该题所涉及的主要概念、方法与理论，另一方面要根据不同的概念、方法与理论出现的频率熟悉考试的重点内容。

2. 解题思路与步骤方面也应根据两类不同题型的特点区别对待。对于客观试题（选择题与填空题），由于只要结果无需过程，对不同的解法、不同角度的处理方法的掌握是更重要的。而对于解答题（计算题、证明题、应用题及综合问题），对解题的过程与步骤的掌握又显得更为重要。在历年评卷中，这些主要步骤都是采分点。

3. 试题解析与解题技巧方面，读者要善于认识与掌握其规律性，如积分的计算技巧中，关于被积函数的奇偶性及区间（域）的对称性所具有的性质几乎每年试题都涉及，建议考生将这部分的规律性结果，即对于重积分、曲线（曲）积分计算的相应方法归纳总结，系统掌握。

4. 易错点评或典型错误是我们多年参与评卷工作而总结出的问题，值得借鉴。

5. 拓展变化与应试对策方面，本书多以注解的形式给出，这部分内容对提高考生的认识高度与解题能力是非常有效的，应是重点掌握的内容。

我们希望读者能够按上述建议，充分利用好本书，以期达到在短时间内提高效率、了解试题变化动态、提高应试能力的目的。本书也可作为全日制高等学校的低年级本科生学习的课外参考资料。本书在编写过程中得到了张宇老师、王莉老师的悉心指导，以及李擂和跨考教育考研团队的支持，在此深表感谢！

编　者

2012年3月

目录

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 1

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 4

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 7

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 10

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 13

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 16

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 19

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 23

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 27

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 30

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 33

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 37

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 41

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 45

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 48

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 52

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 55

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 58

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 61

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 65

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 69

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 81

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 89

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 100

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 106

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 117

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 124

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 136

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 143

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 155

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 162

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 174

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 180
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 190
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 194
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 206
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 212
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 225
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析 …… 233
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析 …… 245

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(4) 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\ (k=1,2,3)$,则有

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_3<I_2<I_1$.

(C) $I_2<I_3<I_1$.　　(D) $I_2<I_1<I_3$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1$

$+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$

(A) $\frac{1}{5}$.　(B) $\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{2}{3}$.　(D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为

(A) 1.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $-\frac{1}{2}$.　(D) -1

二、填空题(第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

(11) $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\,dS=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ____.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲

线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点$(2,0)$,再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点$(0,2)$的曲线段. 计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式$|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$与 $N(\mu,2\sigma^2)$,其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(Ⅰ)求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

(Ⅱ)设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本,求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(Ⅲ)证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题（第 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.）

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　（B）$(-1)^n(n-1)!$.

（C）$(-1)^{n-1}n!$.　　（D）$(-1)^n n!$.

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

（A）充分必要条件.　　（B）充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）既非充分也非必要条件.

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$，则有

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_3<I_2<I_1$.

（C）$I_2<I_3<I_1$.　　（D）$I_2<I_1<I_3$.

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

（A）$x_1>x_2,y_1<y_2$.　　（B）$x_1>x_2,y_1>y_2$.

（C）$x_1<x_2,y_1<y_2$.　　（D）$x_1<x_2,y_1>y_2$.

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

（A）π.　　（B）2.　　（C）-2.　　（D）$-\pi$.

（7）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1$

$+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二、填空题（第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.）

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(12) 微分方程 $y\,dx+(x-3y^2)\,dy=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________.

(13) 曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

三、解答题（第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)（本题满分 12 分）

过点 $(0,1)$ 作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

(19)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根;

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 x_n,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式$|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题(第 1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.)

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$ 无界,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.　　(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x)>0$, $f'(0)=0$,则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0)>1$, $f''(0)>0$.　　(B) $f(0)>1$, $f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$, $f''(0)>0$.　　(D) $f(0)<1$, $f''(0)<0$.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.　　(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(7) 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在,记 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$,则$E(UV)=$

(A) $E(U)E(V)$.　　(B) $E(X)E(Y)$.　　(C) $E(U)E(Y)$.　　(D) $E(X)E(V)$.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$,经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$. 则 $a=$________.

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)=$________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 证明:对任意的正整数 n,都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立;

(Ⅱ) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$,不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ) 求 a 的值;

（Ⅱ）将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)（本题满分 11 分）

$\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，即 $r(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

求（Ⅰ）$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（Ⅱ）矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

.

Y	−1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

（Ⅰ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）求 $Z=XY$ 的概率分布；

（Ⅲ）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知. $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

（Ⅰ）求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；

（Ⅱ）计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题（第 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.）

（1）已知当 $x \to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

（A）$k=1, c=4$.　（B）$k=1, c=-4$.　（C）$k=3, c=4$.　（D）$k=3, c=-4$.

（2）已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

（A）$-2f'(0)$.　（B）$-f'(0)$.　（C）$f'(0)$.　（D）0.

（3）函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

（A）0.　（B）1.　（C）2.　（D）3.

（4）微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为

（A）$a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.　（B）$ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.

（C）$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.　（D）$x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

（5）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0$，$g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $Z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

（A）$f''(0)<0, g''(0)>0$.　（B）$f''(0)<0, g''(0)<0$.

（C）$f''(0)>0, g''(0)>0$.　（D）$f''(0)>0, g''(0)<0$.

（6）设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是

（A）$I<J<K$.　（B）$I<K<J$.　（C）$J<I<K$.　（D）$K<J<I$.

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$

（A）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　（B）$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　（C）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

（8）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

二、填空题（第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.）

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.