普通高等教育“十二五”重点规划教材　公共课系列
中国科学院教材建设专家委员会规划教材

应用线性代数

陈伏兵　主　编

科学出版社

普通高等教育“十二五”重点规划教材　公共课系列

中国科学院教材建设专家委员会规划教材

应用线性代数

陈伏兵　主编

陈学华　郭　嵩　副主编

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书根据普通高等院校线性代数课程的教学要求与考研大纲编写而成，包括行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换、线性经济模型、工程技术与管理中的线性模型等基本内容. 选编的题型较为丰富，习题量适度，并在众多学科中广泛选用了一些实际应用的例子，体现了线性代数在解释基本原理、简化计算等方面所起到的重要作用.

在编写过程中，我们力求培养、提升学生的应用实践能力，在教材中以一系列应用实例激发学生的学习兴趣，使学生在掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法的同时，能够了解线性代数这一数学工具在工程技术、经济管理等领域中的实际作用.

本书可作为经济类和部分工科类专业的教材，也可作为其他非数学专业大学生以及在职人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

应用线性代数/陈伏兵主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-031102-3

Ⅰ.①应… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 090772 号

责任编辑：赵丽欣 郭丽娜 杨 阳 / 责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年6月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011年6月第一次印刷 印张：11
印数：1—3 000 字数：260 480

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）
销售部电话 010-62142126 编辑部电话 010-62134021

普通高等教育“十二五”重点规划教材
公共课系列学术编审委员会

前　　言

线性代数(Linear Algebra)是一个研究有限维空间中线性关系的理论和方法的数学分支.由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型,使得线性代数被广泛地应用于自然科学和社会科学中.线性代数是理、工、农、管理和经济等专业重要的基础课程,也是全国硕士研究生入学统一考试课程“高等数学一”、“高等数学三”的重要组成内容.该课程所体现的几何观念与代数方法之间的联系、从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等,对于强化学生的数学思维,培养学生的逻辑推理和抽象思维能力、应用知识解决线性模型问题的能力具有重要的作用.

本书根据普通高等院校线性代数课程的教学要求和当前高等院校线性代数教育教学改革的形势,由长期从事线性代数教学的教师在讲授线性代数的讲义的基础上编写而成.

在编写过程中,我们力求保持传统线性代数教材的结构严谨、逻辑性强等特点,同时,积极汲取近年来同类教材改革的成功经验,结合我们教学实践中的切身体会以及对历年全国硕士研究生入学考试线性代数考题的研究,在内容选取、结构安排、知识应用等方面作了一些探讨,力求做到系统完整、内容简练、语言准确、通俗适用.此外,我们力求提升学生的应用实践能力,以一系列应用实例激发学生的学习兴趣,使学生在掌握线性代数基本概念、理论和证明的同时,能够了解线性代数这一数学工具在工程技术、经济管理中的实际作用.教材每一章都配备了适量的习题,其中大部分是基础题,有助于读者掌握、巩固所学的基本概念、基本结论和基本方法;此外,还有一些习题选自于近年的考研真题,有一定的难度和技巧性,供读者选做.

本书共分为 8 章,分别介绍了行列式、线性方程组、矩阵、特征值、二次型、线性空间与线性变换、线性经济模型以及工程技术与管理中的线性模型等内容.其中第 1～3 章由陈伏兵执笔,第 4～6 章由陈学华执笔,第 7～8 章由郭嵩执笔.全书由陈伏兵负责统稿.

本书由陈伏兵任主编,陈学华、郭嵩任副主编.孙智宏教授认真审阅了书稿,并提出了许多建设性的建议,在此谨向孙智宏教授表示真诚的谢意;同时,感谢何光明、王程凌、王珊珊、陈海燕对我们提供的帮助.

在编写过程中,我们参阅了大量线性代数、高等代数和经济中的数学方法等书籍和资料,在此,谨向有关作者表示衷心的感谢.

本书可作为经济类和工科类专业线性代数课程的教学用书,也可供其他非数学专业大学生以及在职人员参考.

由于作者水平有限,书中定有不妥之处,恳请专家、同行和读者批评指正.

目　　录

第1章　行　列　式

行列式的理论起源于解线性方程组，17 世纪末已有了行列式的概念，19 世纪由德国数学家高斯(Gauss)等建立了行列式的系统理论，目前行列式在数学的许多分支及某些自然科学技术中有着广泛的应用.

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外，还介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1　二阶行列式与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

对二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用加减消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可以求得方程组(1.1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)中的分子、分母都是四个数分两对先相乘再相减而得，其中分母($a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$)是由方程组(1.1.1)的四个系数确定的. 为了方便记忆，把这四个数按照它们在方程组(1.1.1)中的位置，排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.1.3}$$

表达式($a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$)称为数表(1.1.3)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

数 a_{ij}($i=1,2;j=1,2$)称为行列式(1.1.4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述定义的二阶行列式，可以用对角线法则来记忆. 参看图 1.1.1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两个元素之积减去副对角线两个元素之积所得的差.

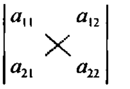

图 1.1.1

利用二阶行列式的定义，式(1.1.2)中 x_1、x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若令

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么式(1.1.2)也可以写成

$$x_1=\frac{d_1}{d}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{d_2}{d}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

注意这里的 d 是由方程组(1.1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 d_1 是用方程组(1.1.1)中方程的常数项 b_1、b_2 替换 d 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得到的行列式，x_2 的分子 d_2 是用方程组(1.1.1)中方程的常数项 b_1、b_2 替换 d 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得到的行列式.

根据二阶行列式定义和上面的叙述，如果一个二元一次方程组的系数行列式不等于零，那么可以方便地求出它的解.

【例 1.1.1】 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ 5x_1-x_2=13 \end{cases}$$

解 由于

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0,\quad d_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}=-14,\quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}=21$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{d_1}{d}=\frac{-14}{-7}=2,\quad x_2=\frac{d_2}{d}=\frac{21}{-7}=-3$$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

与二元一次方程组类似，对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

令

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.6}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.1.7}$$

这里式(1.1.6)称为方程组(1.1.5)中未知量 x_1、x_2 和 x_3 的系数所确定的 3 阶行列

式，式(1.1.7)为它的展开式，则当 d 不为零时，方程组有唯一解，并可以如下表示：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

上述定义表明三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.1.2 所示的对角线法则. 图中，三条实线看作是平行于对角线的联线，三条虚线看作是平行于副对角线的联线，实线上三元素乘积冠正号，虚线上三元素乘积冠负号.

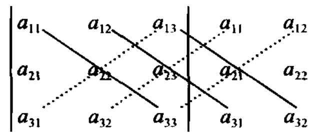

图 1.1.2

【例 1.1.2】 计算三阶行列式

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4\\ 2 & -2 & 1\\ 4 & -3 & -2\end{vmatrix}$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} d &=2\times(-2)(-2)+1\times1\times4+(-4)\times2\times(-3)\\ &\quad-(-4)\times(-2)\times4-1\times2\times(-2)-2\times1\times(-3)\\ &=8+4+24-32+4+6=14\end{aligned}$$

【例 1.1.3】 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=2\\ 4x_1-2x_2+2x_3=1\\ x_1-x_2=0\end{cases}$$

解 由于

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=13\neq0$$

因此方程组的解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{5}{13},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{5}{13},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}=-\frac{1}{13}$$

1.2 排　　列

1.2.1 排列的相关概念

定义 1.2.1 由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为这 n 个数码的一个排列，简称为一个 n 元排列.

例如，312，213 都是 3 元排列. 用 1、2、3 三个数码，可以组成多少种不同的 3 元排列？3 元排列有 3 个数码可放置三个位置：第一个位置可取 3 个数码中的任何一个，有 3 种放法；第二个位置仅能在剩下的两个数码中选取，有两种选法；第三个位置仅能在剩下的一个数码中选取，只有一种选法. 这样根据乘法原理，总共有 $3\times2\times1$ 种不同的选法，于是 3 元排列有 $3!$ 种不同的排列，它们是

$$123,213,312,132,231,321$$

同样道理，对于 n 元排列的第一个位置有 n 种选法，第二个位置有 $n-1$ 种选法，……，第 $n-1$ 个位置有 2 种选法，第 n 个位置有 1 种选法，于是 n 元排列有 $n!$ 种不同的排列.

在 3 元排列中，除 123 是按自然顺序外，其余排列中都有较大数码排列在较小数码的前面. 例如，312 中，3 排在 1 的前面，此时说 3 与 1 构成一个逆序，同样 3 与 2 也构成一个逆序.

定义 1.2.2 在一个 n 元排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序. 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

例如，4 元排列 3412 中，3 与 1，4 与 1，3 与 2，4 与 2 都构成逆序，于是 4 元排列 3412 的逆序数为 4，记为 $\tau(3412)=4$.

一般地，在 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，设排在 1 前面的数码个数为 m_1，排在 2 前面且比 2 大的数码个数为 m_2，…，排在 $n-1$ 前面且比 $n-1$ 大的数码个数为 m_{n-1}，那么排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\sum_{i=1}^{n-1}m_i$$

例如，6 元排列 543162 中，$m_1=3,m_2=4,m_3=2,m_4=1,m_5=0$，故

$$\tau(543162)=\sum_{i=1}^{5}m_i=3+4+2+1+0=10$$

定义 1.2.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

定义 1.2.4 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 对排列施行的这样一个变换称为一个对换.

在一个 n 元排列中，只交换数码 i 和 j，而其他数码位置不动，这样的对换记为 (i,j)，例如

$$543126\xrightarrow{(3,1)}541326\xrightarrow{(4,2)}521346$$

即 543126 经过两次对换 $(3,1)$ 和 $(4,2)$ 后变为 521346.

1.2.2 排列的性质

定理 1.2.1 任意一个 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$，可以经过一系列对换变为自然排列 $12\cdots n$.

证明 对数码的个数 n 采用数学归纳法.

(1) $n=2$，结论显然成立.

(2) 假设 $n-1$ 元排列结论成立，考查 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$，现分 $i_n = n$ 与 $i_n \neq n$ 两种情况讨论.

① 第一种情况，若 $i_n = n$，则由归纳假设，$i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ 可以经过一系列对换变为 $12\cdots(n-1)$，于是对 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 施行同样的对换，可以把它变为自然排列 $12\cdots n$.

② 第二种情况，若 $i_n \neq n$，设 $i_k = n(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，我们有

$$i_1 \cdots i_k \cdots i_n \xrightarrow{(i_k, i_n)} i_1 \cdots i_n \cdots i_k = i_1 \cdots i_n \cdots n$$

于是归结为第一种情况，因此对 n 元排列结论成立.

由对换的可逆性可得以下推论.

推论 1.2.1 自然排列 $12\cdots n$ 可以经过一系列对换变为任意一个 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

推论 1.2.2 任意两个 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都可以经过一系列对换互变.

定理 1.2.2 每一个对换改变排列的奇偶性.

证明 对所对换的两个数码是相邻或不相邻两种情况分别给予讨论.

1) 对换相邻两个数码

设 n 元排列

$$\overbrace{\cdots}^{A}, j, k, \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2.1}$$

对其施行对换 (j,k)，得

$$\overbrace{\cdots}^{A}, k, j, \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2.2}$$

比较对换前后两个 n 元排列(1.2.1)与(1.2.2)的逆序数，由于属于 A 与 B 部分数码的位置没有变化，因此，这些数码所构成的逆序数没有改变，同时，j 与 k 和 A 或 B 部分数码所构成的逆序数也没有变化，而 j 与 k 在排列(1.2.1)与(1.2.2)中的逆序数不同. 若 $j>k$，j 与 k 在排列(1.2.1)中构成一个逆序，但在排列(1.2.2)中不构成逆序. 反之，若 $j<k$，j 与 k 在排列(1.2.1)中不构成逆序，但在排列(1.2.2)中构成一个逆序. 无论哪一种情况，排列(1.2.1)与(1.2.2)的逆序数相差 1，因此对换改变排列的奇偶性.

2) 对换不相邻两个数码

设 n 元排列

$$\overbrace{\cdots}^{A}, j, p_1, \cdots, p_s, k, \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2.3}$$

对其施行对换 (j,k)，得

$$\overbrace{\cdots}^{A}, k, p_1, \cdots, p_s, j, \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2.4}$$

即对排列(1.2.3)直接施行对换 (j,k) 得到排列(1.2.4). 排列(1.2.4)也可经排列(1.2.3)连续施行 $2s+1$ 次相邻数码对换得到. 事实上，排列(1.2.3)中 j 与 k 之间有 s 个数码

$p_1,\cdots,p_s$,先让 j 向右移动,依次与 $p_1,\cdots,p_s$ 对换,经过 s 次相邻数码对换得排列

$$\overbrace{\cdots}^{A},p_1,\cdots,p_s,j,k,\overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2.5}$$

然后让排列(1.2.5)中的 k 向左移动,依次与 $j,p_s\cdots p_1$ 对换,这样施行 $s+1$ 次相邻数码的对换即可得到排列(1.2.4).而由 1)知对换 1 次相邻数码排列奇偶性发生改变,因此,经过 $2s+1$ 次相邻数码对换,前后两个排列的奇偶性必定不同,即排列(1.2.3)与排列(1.2.4)奇偶性不同.

定理 1.2.3 当 $n>1$ 时,在全部 n 级排列中,奇、偶排列的个数相等各有$\frac{n!}{2}$个.

证明 假设在全部 n 级排列中共有 s 个奇排列,t 个偶排列.将 s 个奇排列中前两个数字对换,得到 s 个不同的偶排列,因此 $s\leqslant t$.同理可证 $t\leqslant s$,于是 $s=t$,即奇、偶排列的总数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

1.3 n 阶行列式

1.1 节定义了二、三阶行列式,本节先考查它们的结构规律,然后定义 n 阶行列式.

二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3.1}$$

二阶行列式(1.3.1)有如下规律:

(1) 共有 2! 项.

(2) 每一项都是两个元素的乘积,这两个元素位于行列式中不同行不同列,并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

(3) 每一项都带有符号,当行下标按自然顺序排列时,列下标为偶排列时带正号,列下标为奇排列时带负号.

根据上述规律,二阶行列式又可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} \tag{1.3.2}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有二元排列求和.

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.3.3}$$

通过观察,它类似于二阶行列式有如下规律:

(1) 共有 3! 项.

(2) 每一项都是 3 个元素的乘积,这 3 个元素位于行列式中不同行不同列,并且展开

式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

(3) 每一项都带有符号,当行下标按自然顺序排列时,列下标为偶排列时带正号,列下标为奇排列时带负号.

因此三阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \tag{1.3.4}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三元排列求和.

根据上述二阶、三阶行列式结构规律,可定义一般 n 阶行列式.

定义 1.3.1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.3.5}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和,a_{ij} 是数,称为 n 阶行列式元素.

从 n 阶行列式的定义知它表示的是一个数,且与二阶、三阶行列式的定义一致,同样满足以下规律:

(1) 共有 $n!$ 项.

(2) 每一项都是 n 个元素的乘积,这 n 个元素位于行列式中不同行不同列,并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

(3) 每一项都带有符号,当行下标按自然顺序排列时,列下标为偶排列时带正号,列下标为奇排列时带负号.

【例 1.3.1】 计算 n 阶上三角行列式

$$d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 d_n 中共有 $n!$ 项,只需求出 d_n 中非零项的和. 由于 d_n 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,其中含有第 n 行元素,但第 n 行元素除 a_{nn} 外均为零,因此考查非零项时,第 n 行元素只能取 a_{nn},又 d_n 中每一项都是 n 个元素的乘积,这 n 个元素位于行列式中不同行不同列,于是第 $n-1$ 不能取 a_{n-1n},因而只能取 a_{n-1n-1},…,第二行只能取 a_{22},第一行只能取 a_{11},故 d_n 展开式只有一项不为零,即

$$\begin{aligned} d_n &= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \end{aligned}$$

换句话说,上三角行列式 d_n 等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积. 作为例 1.3.1 的特殊情况,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.3.6}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角形行列式. 式(1.3.6)表明,对角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

【例 1.3.2】 计算 5 阶行列式

$$d_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

解 d_5 中共有 5!(=120)项,只需求出 d_5 中非零项的和. 由于每一项都含有第二行元素,但第二行元素除 a_{21} 和 a_{24} 外均为零,若第二行元素取 a_{21},这一项其他元素不能再取第一列元素,于是第四行只能取 a_{44},进而第五行元素只能取 a_{52},第一行元素只能取 a_{15},第三行元素只能取 a_{33};若第二行元素取 a_{24},第四行只能取 a_{41},第五行元素只能取 a_{52},第一行元素只能取 a_{15},第三行元素只能取 a_{33};于是 d_5 只是下面两项的和,即

$$\begin{aligned} d_5 &= (-1)^{\tau(51342)} a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} + (-1)^{\tau(54312)} a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} \\ &= a_{15}a_{21}a_{33}a_{44}a_{52} - a_{15}a_{24}a_{33}a_{41}a_{52} \end{aligned}$$

在行列式定义 1.3.1 中,为了确定每一项的符号,我们把 n 个元素的行标排为自然顺序. 事实上数的乘法是可交换的,因而这 n 个元素的次序是可以任意写的,一般地,n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3.7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$,$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 元排列. 利用排列的性质,不难证明,式(1.3.7)的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{1.3.8}$$

例如,$a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$ 是 4 阶行列式的一项,由于 $\tau(3214)=3$,$\tau(2143)=2$,所以它的符号为 $(-1)^{\tau(3214)+\tau(2143)}=(-1)^{3+2}=-1$. 如按行指标排列起来,就是 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$,由于 $\tau(4123)=3$,所以它的符号也是 $(-1)^3=-1$.

按式(1.3.8)来确定行列式中每一项的符号的好处在于,行指标与列指标是对称的,因而为了确定每一项的符号,我们同样可以把每一项按列标排列起来,于是行列式定义又可以写成定义 1.3.1′.

定义 1.3.1′ n 阶行列式