

马 杭 著

HANJIE ZHONG DE BIANJIE
DANYUANFA

焊接



中的边界单元法

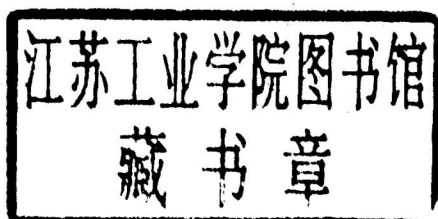
华夏英才基金（第三批）资助出版

上海大学出版社

华夏英才基金(第三批)资助出版

焊接中的边界单元法

马 杭 著



上海大学出版社

·上海·

内 容 提 要

本书介绍了边界单元法在焊接领域中的应用,其中包括:边界单元法的基础知识,在恒定以及周期性热源作用下的焊接传热分析、弹性应力分析、热弹性应力分析、弹塑性应力分析、热弹塑性应力分析,焊接残余应力的边界元辅助无损测定方法,初应变格式下积分类型转换的研究及其在残余应力问题中的应用等内容。书中介绍了边界单元法在焊接若干领域中应用的原理、公式推导、计算实例以及主要算例的实验验证,并给出了位势问题、弹性应力分析和残余应力问题的三个计算机源程序。在附录中列出了部分常用的形函数、高斯求积公式和基本解。

本书可作为理工科高等院校教师、高年级学生、研究生的教学参考书,也可供科研工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目 (C I P)数据

焊接中的边界单元法/马杭著. —上海:上海大学出版社,2001.6

ISBN 7-81058-273-9

I. 焊… II. 马… III. 焊接-理论研究 IV. TG4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 034784 号

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号 邮政编码 200072)

常熟市印刷八厂印刷 各地新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 11.5 字数 273 千字

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

印数:1~1 050

定价:20.00 元

前 言

记得在大学读书期间学习数学、物理这样一些基础课程时，涉及到因果关系或者数量关系时总是能够一是一，二是二，丝毫不含糊。到了高年级学习专业课时，说不清楚或者说不太清楚的事情就渐渐地多了起来。例如，焊缝为什么会出波纹，为什么用不同焊条、不同焊接方法会得到不同的焊接波纹，虽然人们也许知道焊接波纹花样与焊缝质量存在着某种联系。又如给定了材料、结构和焊接工艺，对于构件上会出现怎样的焊接变形和残余应力，给出定量的准确的预测是十分困难的。这一方面反映了实际问题 and 工程问题的复杂性，理论分析以及实验观测的某些局限性，另一方面也要求人们不断发展新的研究手段，开拓新的研究领域去解决实际工程中出现的问题。

近年来，计算机技术发展的速度之快往往出人意料，而以计算机技术为代表的新技术向传统技术领域的渗透则是可以预期的。对于焊接过程中的现象，如焊接热过程、焊接应力与变形的演变、焊接残余应力场、焊接过程中氢的扩散等都是可以用场方程来描述的现象，然而要得到这些问题的准确解答几乎是不可能的，在这里数值分析技术提供了十分有效的分析手段。事实上数值分析正是计算机技术在科学研究和工程中应用的第一个领域，其重要性是不言而喻的，例如近年来出现的虚拟制造技术，如果离开了对制造过程的有效数值模拟分析，那将是不可想像的。

伴随着计算机速度容量等性能指标的飞速发展，数值分析技术本身也已取得长足的进步，在有限差分法、有限单元法和边界单元法三种主要的数值分析方法中，边界单元法是较晚发展的一种。从应用的角度来看，边界单元法的显著特点是用较少的初始数据准备和较短的计算时间就可以获得较高精度的计算结果。对于边界单元法，无论从其技术发展的角度还是从研究者或使用者的角度来看，都是一个不断发展和不断完善的过程。希望本书能对边界单元法的普及和应用起到抛砖引玉的作用，促进计算机数值模拟技术在材料加工工程领域中的应用，推动学术的繁荣与发展。

本书从边界单元法的基础知识入手，介绍了笛卡尔张量、基本解、积分定理、数值技术等基本知识，并介绍了如何通过问题的基本解将偏微分方程转化为边界积分方程，以及如何选用适当的插值函数将边界积分方程离散为线性方程组，从而求得问题的数值解的一般过程。本书接着介绍了边界单元法在焊接工程的若干领域中，即焊接传热、焊接接头的弹性应力分析、弹塑性应力分析、热弹塑性应力分析、焊接残余应力等具体问题中的应用。在焊接传热问题中，利用焊接准稳态温度场的特点，导出了相应的边界积分方程，简化了计算过程，而在周期性热源作用下的三维焊接温度场则是在傅立叶变换域中进行的。从彻底解决焊接传热的目的出发，还介绍了焊接熔池的三维边界积分方程计算模型。在应力分析问题中，除了介绍基本原理和公式推导以外，针对构件的非弹性应力分析，还介绍了初应变格式下应力分析的研究进展，即如何将二维和三维的区域型积分转化为边界型积分，

从而避免划分内部单元的方法。在焊接残余应力的无损测定问题中，提出了通过焊接变形的测量来计算残余应力的思想，为非接触式的工程构件残余应力的在线无损检测提供了可能性。

对于所介绍的各类主要问题，书中均给出了算例，并通过与实验结果的比较，验证了边界单元法计算的有效性。重要的公式给出了较详细的推导过程，同时还给出了相关的位势问题、弹性应力分析和残余应力问题的三个源程序，以便于初学者自学。在本书的附录中还给出了常见的形函数、数值积分公式以及基本解。

在边界单元法的研究工作中得到了日本名古屋大学神谷纪生教授的悉心指导，在本书的写作过程中得到了中科院院士潘际銮教授的支持与鼓励，还得到了甘肃工业大学廖湘民老师和上海大学程昌钧教授的热情帮助。本书的出版得到中央统战部第三批华夏英才基金、上海大学学术出版基金以及上海市教委高校科技发展基金的支持。谨向他们表示诚挚的感谢。

限于作者水平，书中难免会有错误和缺陷，诚请广大读者批评指正。

马 杭

2000 年 8 月于上海大学新校区

目 录

第一章 边界单元法基础	1
1.1 序 言	1
1.2 笛卡尔张量	2
1.3 狄拉克(Dirac) δ 函数	4
1.4 基本解	4
1.5 积分定理与公式	6
1.6 边界积分方程的数值求解	13
1.7 其他种类的边界单元	17
1.8 泊淞方程	24
1.9 三维问题	26
1.10 二维位势问题的源程序介绍	27
第二章 焊接传热问题	46
2.1 序 言	46
2.2 焊接热影响区的准稳态三维传热问题	46
2.3 焊接熔池的准稳态边界积分方程模型	52
2.4 周期性热源作用下的三维焊接温度场	58
2.5 瞬态焊接温度场	63
第三章 接头与构件的边界单元法应力分析基础	67
3.1 序 言	67
3.2 静弹性应力分析	67
3.3 边界积分方程	71
3.4 边界应力的计算公式	76
3.5 二维弹性问题的源程序介绍	77
第四章 初应变格式的边界积分方程及应用	95
4.1 初应变格式的边界积分方程	95
4.2 热弹性问题	98

4.3 弹塑性应力分析	101
4.4 焊接热弹塑性平面变形问题的边界积分方程	106
4.5 焊接残余应力问题	110
第五章 初应变格式下积分类型的转换	117
5.1 序 言	117
5.2 积分核之间的内在联系	117
5.3 二维边界型积分公式	120
5.4 在残余应力问题中的应用	122
5.5 三维边界型积分公式	127
5.6 关于边界型积分公式的讨论	134
5.7 二维残余应力问题的源程序介绍	135
附录: 形函数—高斯求积公式—基本解	160
f.1 形函数: 线单元	160
f.2 形函数: 面单元	162
f.3 形函数: 体积单元	165
f.4 高斯求积公式	165
f.5 基本解	169
参考文献	174

第一章 边界单元法基础

1.1 序言

数值分析技术是随着计算机技术的飞速发展而发展起来的,已经和理论分析方法、实验观测方法一起成为解决科研和工程问题的有效手段:无论是自然现象的演化还是具体工程问题的求解,数值分析方法都是一种可选择的补充方案,在许多情况下甚至成为唯一可行的解决方案.理论分析、实验观测、数值分析这三种研究手段相互补充,大大提高了人们在科研和工程中分析问题解决问题的能力.计算力学(Computational Mechanics)、计算物理(Computational Physics)、计算数学(Computational Mathematics)、计算化学(Computational Chemistry)等新的交叉学科的出现充分说明了这一发展趋势.可以预期,随着计算机速度容量的迅速提高和计算机价格的迅速降低,数值分析技术的作用和效能也将日益提高.

边界单元法(BEM, boundary element method)是三种主要的数值分析方法之一,简单地说,边界单元法是利用问题的基本解,结合边值条件、初值条件,将问题的控制微分方程转化为等价的边界积分方程,然后利用数值技术求得问题近似解的一种数值方法^[1-3].

本章介绍与边界单元法有关的基础知识.

1.1.1 有限差分法、有限单元法、边界单元法

在三种主要的数值分析方法当中,有限差分法(FDM, finite difference method)是最早发展起来的,这种方法直接用差分方程代替微分方程,从而得到线性方程组,进而求得问题的近似解.有限单元法(FEM, finite element method)^[4,5]首先将研究对象的区域划分为有限个单元,选择适当的插值函数近似表达单元上的变量,利用变分原理或者加权余值法导出单元刚度矩阵并集成总体刚度矩阵,从而得到线性代数方程组,进而求得问题的近似解^[6].有限单元法具有较大的优越性和灵活性,适用的范围很大,拥有众多的应用软件包,前处理和后处理技术都十分成熟,是目前使用最广泛的数值计算方法^[7,8].

与边界单元法相比,有限差分法和有限单元法都属于区域型的数值方法,需要在整个求解区域上进行离散,划分单元.边界单元法是继有限单元法之后发展起来的边界型数值方法,一般而言,边界单元法只需要在求解区域的边界上划分单元就可以了,也就是说离散化工作是在边界积分方程的基础上进行的,因而边界单元法除了具有所谓的降维、减少初始数据准备工作量的优点以外,由于边界积分方程和控制微分方程是等价的,因而边界单元法的精度较高,场变量和场变量的导数可以拥有相同的精度等级.对于一些非线性问题,即使需要划分内部单元,也不是真正意义上的单元(internal cells)^[9].目前用边界单元法求解某些非线性问题而不划分内部单元的研究工作已有所进展^[10,11].

表 1-1 对三种主要数值分析方法进行了简要的比较.

表 1-1 三种数值分析方法的比较

方 法	有限差分法	有限单元法	边界单元法
基本原理	直接差分近似	变分原理、加权余值法	积分定理、互易定理
系数矩阵大小	较大, 带状分布	较大, 带状分布	较小, 满分布、不对称
离散方式	区域型	区域型	边界型
维 数	与问题同维	与问题同维	降低一维
初始数据准备量	较 大	较 大	较 小
边界条件的处理	较困难	一 般	较自然
无界域问题的处理	较困难	较困难	容 易
处理非线性问题	一 般	较适宜	正在取得进展

1.1.2 边界单元法的发展概述

关于边界单元法的发展,在嵇醒等人^[12]的著作中有系统的完整的叙述.除了积分方程数学理论的早期发展以外,作为一种数值分析技术,边界单元法还兼有解析法的特点,是在 70 年代后期彻底解决了奇异积分的准确数值计算以后才走向成熟的,也许正是由于奇异积分的困难才使得边界单元法的发展晚了一步.英国南安普敦大学的 Brebbia^[2]对边界单元法的普及作出了十分重要的贡献,他指出各种数值方法都可以用加权余值法推导出来,从而将不同的数值方法置于共同的数学基础之上,各种数值方法的不同之处仅仅在于所采用的权函数.如果将问题的基本解作为权函数,则导致边界积分方程及其离散形式——边界单元法^[13].

在我国,边界单元法的发展与改革开放同步,取得了较大的成绩,已有多部专著问世^[12,14-16],较早的有 20 世纪 80 年代中期严更、丁方明著的《边界单元法》^[14],80 年代后期杜庆华、嵇醒等人著的《边界积分方程方法——边界元法》^[15],同时也有多部国外学者的翻译著作出版,这些著作的相继出版对我国边界单元法的发展和进步起到了重要的促进作用.

1.2 笛卡尔张量

用张量(Tensor)来描述物理定理和几何定理所得到的结果,在不同的坐标系中具有不变的形式,或者说,张量关系所反映的物理事实和几何事实不仅与坐标选择无关,同时还具有简洁明快的优点.本书中采用的笛卡尔张量是在直角坐标系中的张量,是最简单的张量.

1.2.1 指标符号与求和约定

张量用具有不同数量下标的指标符号来表示,下标的数目称为张量的阶数,例如零阶张量、一阶张量、二阶张量等.零阶张量是标量,也称为不变量.一阶张量可以理解为通常

意义下的矢量, 例如某个区域 Ω 的边界 Γ 上的外向法线 n_j 、温度梯度 T_j 都是一阶张量, 其中下标 j 表示沿某个坐标的方向. 二阶张量的例子有应力 σ_{ij} 和应变 ε_{ij} 等, 其中第一个下标表示应力或应变分量所在平面的法线方向, 第二个下标则表示分量的方向. 还有三阶、四阶张量等等, 不一一例举.

如果张量具有两个重复出现的相同的下标, 则称这两个相同的下标为哑标(dummy index), 按照爱因斯坦求和约定, 对哑标按坐标系的维数进行求和, 例如在三维坐标系中

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (1-2-1)$$

表示正应力之和, 是一个不变量. 根据柯西关系, 边界面力 τ_j 可以表示为

$$\tau_j = \sigma_{ji} n_i = \sigma_{j1} n_1 + \sigma_{j2} n_2 + \sigma_{j3} n_3 \quad (1-2-2)$$

如果定义 $x_j = x_j(q) - x_j(p)$ 为两点 p 、 q 间的有向距离 r 的投影, 则两点间的距离可表示为

$$r = \sqrt{x_j x_j} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3} \quad (1-2-3)$$

1.2.2 克罗内克(Kronecker)符号

克罗内克符号 δ_{ij} 是单位张量, 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (1-2-4)$$

上式给出了当下标取得具体数值时克罗内克符号的定义, 应当注意的是, 按照求和约定, 当克罗内克符号具有哑标时所含有的完全不同的意义:

$$\delta_{kk} = \begin{cases} 2 & (2-D) \\ 3 & (3-D) \end{cases} \quad (1-2-5)$$

式中 2-D 和 3-D 分别表示二维和三维情况.

1.2.3 笛卡尔张量的代数运算

张量的加法(和减法)必须在同阶张量之间进行, 得到的结果仍然是同阶张量. 张量的加法符合交换律和结合律.

两个张量的乘积得到另一个张量, 它的阶等于这两个张量的阶之和, 这个乘积由张量分量的通常乘法而得到, 叫做张量的外积, 这一过程叫做张量的外乘.

如果张量含有哑标, 按求和约定对哑标进行求和, 所得的结果是比原来的张量阶数低了两阶的张量, 这个过程叫张量的缩并. 例如: 式(1-2-1)以及式(1-2-3)根号中的内容都是张量缩并的过程.

如果在求两个张量的外积的过程中产生了缩并, 所得到的新张量称为所给张量的内积, 这一过程叫做张量的内乘. 例如: 式(1-2-2)的边界面力 τ_j 可由边界上的应力 σ_{ij} 和边界外向法线 n_j 的内积得到.

如果不知道某个量是否为张量, 但知道这个量与任意张量的内积是张量, 则这个量也是张量, 这个定律就是所谓的商定律.

1.2.4 笛卡尔张量的微分

笛卡尔张量对坐标的导数用逗号加下标来表示,称为张量的微分运算,其运算规则与通常对函数的运算规则相同.例如 q 点的温度梯度 $T_{,j}$ 表示温度沿某个坐标的变化率,其定义为

$$T_{,j} = \frac{\partial T}{\partial x_j(q)} \quad (1-2-6)$$

又如温度沿方向 n 的导数定义为

$$\frac{\partial T}{\partial n} = T_{,j} n_j \quad (1-2-7)$$

如果不计体积力,弹性力学中用应力表示的平衡方程为

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1-2-8)$$

设 u 为场变量,拉普拉斯微分算子 $\Delta (= \nabla^2)$ 用张量的微分形式可以简记为

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = u_{,kk} \quad (1-2-9)$$

1.3 狄拉克(Dirac) δ 函数

狄拉克 δ 函数在数学物理中有很重要的作用,它的定义如下:

$$\delta(p, q) = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ \infty & (p = q) \end{cases} \quad (1-3-1)$$

其中 p, q 为空间中的两点.狄拉克 δ 函数的一个重要性质是过筛性,设 u 为区域 Ω (其边界为 Γ) 上的场变量,有

$$\int_{\Omega} u(q) \delta(p, q) d\Omega(q) = \begin{cases} u(p) & (p \in \Omega) \\ 0 & (p \notin \Omega) \end{cases} \quad (1-3-2)$$

如果 $u(q)=1$, 则上式成为

$$\int_{\Omega} \delta(p, q) d\Omega(q) = \begin{cases} 1 & (p \in \Omega) \\ 0 & (p \notin \Omega) \end{cases} \quad (1-3-3)$$

1.4 基本解

1.4.1 基本解的定义和含义

设 L 为某个微分算子,满足下列微分方程:

$$L[u(q)] = 0 \quad (1-4-1)$$

则基本解 u^* 是满足上述微分方程的伴随微分方程的一个特解,即

$$L^* [u^*(p, q)] + \delta(p, q) = 0 \quad (1-4-2)$$

式中 L^* 为伴随微分算子, p 点为作用点或源点, q 点为观察点或场点. 满足式(1-4-2)的基本解有无穷多个, 若某一基本解同时还满足 r 上的边界条件, 则称为该问题的格林(Green)函数. 基本解可分解为奇异部分和非奇异部分之和, 而基本解的奇异部分则是唯一的, 在边界单元法中的基本解只包含奇异部分. 基本解在具体的问题中有明确的物理意义, 以拉普拉斯方程为例:

$$u_{,kk} = 0 \quad (1-4-3)$$

其基本解为^[17]

$$u^*(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) & (2-D) \\ \frac{1}{4\pi r} & (3-D) \end{cases} \quad (1-4-4)$$

式中 r 为 p 、 q 两点间的距离. 拉普拉斯方程的微分算子是自伴随的, 其基本解满足关系:

$$u^*(p, q)_{,kk} + \delta(p, q) = 0 \quad (1-4-5)$$

在三维空间中, 如果拉普拉斯方程描述的是(无量纲的)稳态温度场, 则基本解表示无限大物体中点 p 处单位强度的集中点热源作用下 q 点所产生的温度. 如果拉普拉斯方程描述的是(无量纲的)静电场, 则基本解表示无限大物体中点 p 处单位强度的点电荷作用下 q 点所产生的电场强度. 但是在二维空间中, 点热源和点电荷应当分别改为线热源和线电荷.

由式(1-4-4)可知, 基本解的特点是“远小近大”, 当 p 、 q 两点重合时, 场的强度(温度或电场)为无穷大. 在边界单元法中, 基本解是导出积分方程的关键, 求得基本解的基本方法是积分变换法, 派生的方法有待定系数法、Hormander 方法等. 工程问题中经常遇到的偏微分方程的基本解可以在本书附录中或者从其他文献中查到.

1.4.2 基本解的导函数

由于基本解是两点函数, 求基本解的导函数时应当明确求导是对场点还是对源点进行的, 两者的导函数相差一个正负号, 应当予以注意. 仍以拉普拉斯方程为例, 在二维条件下, 拉普拉斯方程基本解对场点的一阶和二阶导函数分别为

$$u_{,k}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,k} \quad (1-4-6)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (1-4-7)$$

$$u_{,jk}^* = -\frac{1}{2\pi r^2} (\delta_{jk} - 2r_{,j} r_{,k}) \quad (1-4-8)$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right)_{,k} = -\frac{1}{2\pi r^2} \left(n_k - 2\frac{\partial r}{\partial n} r_{,k}\right) \quad (1-4-9)$$

在三维条件下, 拉普拉斯方程基本解对场点的一阶和二阶导函数分别为

$$u_{,k}^* = -\frac{1}{4\pi r^2} r_{,k} \quad (1-4-10)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (1-4-11)$$

$$u_{,jk}^* = -\frac{1}{4\pi r^3} (\delta_{jk} - 3r_{,j} r_{,k}) \quad (1-4-12)$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right)_{,k} = -\frac{1}{4\pi r^2} \left(n_k - 3 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right) \quad (1-4-13)$$

对基本解的求导运算实际上是对距离函数 r 的运算, 常用的公式有

$$r_{,k} = \frac{x^k}{r} \quad (1-4-14)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,k} n_k \quad (1-4-15)$$

$$r_{,jk} = \frac{1}{r} (\delta_{jk} - r_{,j} r_{,k}) \quad (1-4-16)$$

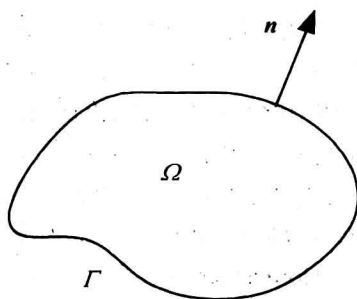


图 1-1 闭区域 Ω 的边界 Γ 和边界外向法线 n

1.5 积分定理与公式

设闭区域 Ω 的边界为 Γ , n 为边界外向法线. 在三维情况下, Ω 是某个空间区域, Γ 为其曲面边界, 而在二维情况下, Ω 是某个平面区域, Γ 为其曲线边界, 如图 1 所示.

1.5.1 高斯(Gauss)散度定理^[18]

高斯(Gauss)散度定理又称为格林(Green)公式, 是极其重要的积分定理, 有多种表达形式. 该定理给出了区域型积分和边界型积分的基本关系

$$\int_{\Omega} u_{,k} \, d\Omega = \int_{\Gamma} u n_k \, d\Gamma \quad (1-5-1)$$

利用高斯散度定理很容易导出分部积分公式, 例如, 由

$$\int_{\Omega} (uv)_{,k} \, d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,k} v + u v_{,k}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} u v n_k \, d\Gamma \quad (1-5-2)$$

移项后即可得到分部积分公式

$$\int_{\Omega} u_{,k} v \, d\Omega = \int_{\Gamma} u v n_k \, d\Gamma - \int_{\Omega} u v_{,k} \, d\Omega \quad (1-5-3)$$

又如对于含有拉普拉斯微分算子的区域型积分可以写出

$$\int_{\Omega} u_{,kk} d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,k} n_k d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (1-5-4)$$

以及

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{,kk} v d\Omega &= \int_{\Gamma} u_{,k} v n_k d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,k} v_{,k} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u v_{,kk} d\Omega \end{aligned} \quad (1-5-5)$$

1.5.2 柯西 (Cauchy) 积分主值^[9]

以一维函数 $f(x)$ 为例, $f(x)$ 定义于区间 $[a, b]$, 但是在 c 点 ($a < c < b$) 无意义, 因此在通常意义下的积分 $\int_a^b f(x) dx$ 没有意义. 但是如果对于某个正数 ε , 下列极限存在:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad (1-5-6)$$

则这个极限就称为柯西积分主值, 相应的积分在 c 点近旁具有柯西奇异性. 例如下列积分在柯西积分主值的意义下可积:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \log(\varepsilon) - \log(\varepsilon) \} \quad (1-5-7)$$

在二维和三维情况下柯西积分主值的定义与此类似.

1.5.3 积分方程

在物理和工程上有一大类问题或现象可以用位势问题来描述, 例如定常热传导、静电场、无旋流、弹性柱体的扭转等等. 位势问题的控制微分方程是拉普拉斯方程或泊松 (Poisson) 方程, 是偏微分方程中形式较为简单而又研究得比较充分的一种. 本小节以拉普拉斯方程的边值问题为例, 介绍积分方程的导出.

仍如图 1 所示, 在区域 Ω 内, 设位势 u 满足拉普拉斯方程

$$u(q)_{,kk} = 0 \quad (q \in \Omega) \quad (1-5-8)$$

在边界 Γ 上位势 u 满足下列边界条件:

$$u(q) = \bar{u} \quad (q \in \Gamma_u) \quad (1-5-9)$$

$$\frac{\partial u(q)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \quad (q \in \Gamma_q) \quad (1-5-10)$$

式中上划线表示在边界上的给定值. 寻求满足上述条件的解就是拉普拉斯方程的混合边值问题. 以拉普拉斯方程的基本解作为权函数作乘积, 并在整个区域上进行积分, 有

$$\int_{\Omega} u(q)_{,kk} u^*(p, q) d\Omega(q) = 0 \quad (1-5-11)$$

假定源点 p 不在边界 Γ 上. 对上式进行分部积分:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} u(q)_{,kk} u^*(p, q) d\Omega(q) = \\
 &\int_{\Gamma} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Omega} u(q)_{,k} u^*(p, q)_{,k} d\Omega(q) = \\
 &\int_{\Gamma} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) - \\
 &\int_{\Omega} u(q) u^*(p, q)_{,kk} d\Omega(q)
 \end{aligned} \quad (1-5-12)$$

对于上式右边最后一项, 利用式(1-3-2)和(1-4-2), 有

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u(q) u^*(p, q)_{,kk} d\Omega(q) &= \\
 - \int_{\Omega} u(q) \delta(p, q) d\Omega(q) &= \begin{cases} -u(p) & (p \in \Omega) \\ 0 & (p \notin \Omega + \Gamma) \end{cases}
 \end{aligned} \quad (1-5-13)$$

假定源点 p 在区域 Ω 之内, 则得到积分方程

$$u(p) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \quad (p \in \Omega) \quad (1-5-14)$$

当边界上的位势及其导函数全部已知时, 式(1-5-14)可以用来计算域内的位势. 将上式两边对源点 p 求导, 得

$$\begin{aligned}
 u(p)_{,k} &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q)_{,k} d\Gamma(q) + \\
 &\int_{\Gamma} u(q) \left[\frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} \right]_{,k} d\Gamma(q) \quad (p \in \Omega)
 \end{aligned} \quad (1-5-15)$$

当边界上的位势及其导函数全部已知时, 式(1-5-15)可以用来计算域内的位势梯度. 应当注意的是, 上式中基本解的导数已经改写为对场点进行. 以上两个积分方程式建立了区域量和边界量之间的关系, 但是还不能对问题进行求解, 还需要建立边界积分方程.

1.5.4 边界积分方程

边界积分方程的导出是通过极限过程进行的, 这是由于基本解及其导函数都是 p, q 两点间距离的函数, 当源点 p 逐渐靠近边界 Γ 时, 积分方程式(1-5-14)右边两个积分的被积函数都是发散的, 其中右边的第二个积分的积分核具有柯西奇异性, 必须采用极限过程来处理. 为简便起见, 考虑如图 1-2 所示的二维问题, 边界 Γ 为平面曲线.

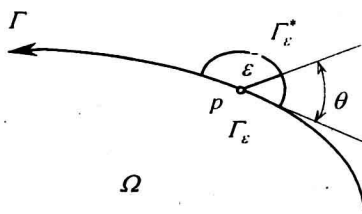


图 1-2 围绕边界上源点 p 的 ε 微小半圆

以源点 p 为中心做一 ε 微小半圆, 形成新的边界 Γ_ε^* , 这时 p 点位于域内, 由于 ε 十分微小, 可以认为 Γ_ε 为一段直线, 区域 Ω 的边界由 $\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*$ 组成. 当源点 p 趋向边界时, 极限过程可以表达为

$$u(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \right\} \quad (1-5-16)$$

注意到源点 p 附近的边界 Γ_ε^* 上有 $r = \varepsilon$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上式右边第一个积分的被积函数含有对数的弱奇异性, 极限过程和积分过程的次序可以交换, 得到正常积分, 即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) \right\} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) \quad (1-5-17)$$

其中在 Γ_ε^* 半圆上有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon^*} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\pi \frac{\partial u(q)}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon d\theta \right\} = 0 \quad (1-5-18)$$

式(1-5-16)右边第二个积分的被积函数含有柯西奇异性, 设位势 $u(q)$ 在点 p 附近具有赫尔德(Holder)意义下的连续性, 即存在 $0 < \beta \leq 1$ 和正实数 A 满足下列关系:

$$|u(q) - u(p)| \leq A\varepsilon^\beta \quad (1-5-19)$$

式(1-5-16)右边第二个积分的极限过程可以表达为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) + u(p) \int_{\Gamma_\varepsilon^*} \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) + \right. \\ \left. \int_{\Gamma_\varepsilon^*} [u(q) - u(p)] \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \right\} \end{aligned} \quad (1-5-20)$$

式(1-5-20)等号右边第一个积分在柯西主值意义下可积, 即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \right\} = \int_{\Gamma} u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \quad (1-5-21)$$

式(1-5-20)等号右边第三个积分是正常积分, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon^*} [u(q) - u(p)] \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \right\} = 0 \quad (1-5-22)$$

当点 p 附近边界光滑时, 由式(1-5-20)等号右边第二个积分可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u(p) \int_{\Gamma_\varepsilon^*} \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \right\} = u(p) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\pi \left[\frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \varepsilon d\theta \right] \right\} = -\frac{1}{2} u(p) \quad (1-5-23)$$

这样当点 p 附近边界光滑时, 边界积分方程为

$$\frac{1}{2} u(p) = \int_\Gamma \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_\Gamma u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \quad (p \in \Gamma) \quad (1-5-24)$$

三维问题的边界积分方程的推导过程与二维问题类似, 边界积分方程的表达形式也相同. 不同之处只是基本解的表达式. 当点 p 位于边界的角点上时, 由式(1-5-23)所得到的系数与 p 点附近的局部几何形状有关. 综合考虑 p 点的位置及其附近的局部几何形状, 可以把积分方程写成统一的形式:

$$C(p)u(p) = \int_\Gamma \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_\Gamma u(q) \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} d\Gamma(q) \quad (1-5-25)$$

式中的系数 $C(p)$ 与 p 点的位置和(或)边界附近的局部几何形状有关, 其表达式如下:

$$C(p) = \begin{cases} 1 & (p \in \Omega) \\ 0 & (p \notin \Omega + \Gamma) \\ \frac{\alpha}{2\pi} & (p \in \Gamma, 2-D) \\ \frac{\alpha}{4\pi} & (p \in \Gamma, 3-D) \end{cases} \quad (1-5-26)$$

式中 α 为角点处所张的内角, 二维时为平面角, 三维时为立体角. 边界积分方程是对问题的另一种描述方式, 与原来由其导出的微分方程是等价的. 边界积分方程建立了所有边界量之间的关系, 理论上根据已知的边界条件可以利用边界积分方程求得另外一半的边界未知量, 进而求得问题的全部解答, 然而对于具体的实际问题, 求得理论解答几乎是不可能的, 只能去寻求数值解, 即导致边界单元法.

但是当区域 Ω 之内含有裂纹时, 上述位势问题的边界积分方程将退化为不适定的, 还需要补充的积分方程才能求解, 补充方程可从另一个积分方程式(1-5-15)求得. 当源点 p 逐渐靠近边界 Γ 时, 式(1-5-15)右边的第一个积分的积分核具有柯西奇异性, 而第二个积分的积分核则具有更强的哈达马(Hadamard)奇异性, 仍如图 2, 按照类似于前面所进行的极限过程, 可以写出^[16]:

$$u(p)_{,k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*} \frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(p, q)_{,k} d\Gamma(q) + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*} u(q) \left[\frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} \right]_{,k} d\Gamma(q) \right\} \quad (1-5-27)$$