

电 大 五 年 制 大 专 （ 高 职 ） 导 学 教 材

（ 第 四 册 ）

《数学》

学习指导

叶惠英 主编



东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《数学》学习指导(第四册)/叶惠英主编. —南京:东南大学出版社,2005.5

电大五年制大专(高职)导学教材

ISBN 7-81089-911-2

I. 数... II. 叶... III. 高等数学—电视大学—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 047364 号

《数学》学习指导(第四册)

出版发行	东南大学出版社
出版人	宋增民
社址	南京市四牌楼2号
邮编	210096
印刷	扬中市印刷有限公司
开本	787mm × 1092mm 1/16
印张	10.75
字数	275千字
版次	2005年5月第1版 2005年5月第1次印刷
定价	17.50元

* 东大版图书若有印装质量问题,请直接向发行部调换,电话:025-83795801。

江苏电大五年制大专(高职)教育

教学资源建设指导小组

组 长:吴 进

副组长:骆苏菲 杨彩萍

组 员:史志勤 仲凤仪 朱 军 蒋静琪 徐云桦

刘新德 茆立良 陆伟新 叶惠英

编写说明

电大五年制大专(高职)2003 级各专业“数学”课程使用由江苏科学技术出版社出版的全国广播电视大学五年制大专(高职)教育《数学》教材。为了帮助不同基础层次的读者学好数学知识,根据江苏电大五年制大专(高职)《数学》课程教学要求,我们编写了这本导学教材,供 2003 级工科各专业学生和数学课程任课教师使用。

《〈数学〉学习指导》(第四册)编写体例包括各章知识点及学习目标、各章节学习指导和各章测试题。各章节学习指导包括各节知识结构、最低学习要求、知识点导读和综合练习。其中每章各节综合练习提供了 A、B 二组,练习 A 选择“应知应会”的题目;练习 B 选择的题目中,一部分与主教材中的主要知识点配套,另一部分属于补充练习;少量带“*”的题目是本学期教学要求中的拓宽部分,供基础较好、学有余力的读者使用。根据工科各专业数学课程教学要求,基础较弱的读者以 A 组题为主,基础较好的读者以 B 组题为主。各章还提供了与教学内容及综合练习配套的 A、B 二组测试题,可以作为单元测验题。读者应首选测试题 B 进行测试,若成绩低于 60 分,则可以选择测试题 A 再测试。

各章知识点学习目标 A 是指了解、知道;学习目标 B 是指理解、会用;学习目标 C 是指掌握、运用;学习目标 D 是指熟练掌握、灵活运用。

本书由叶惠英主编,吴进主审。参加编写的有张洁、凌佳、吕欣、黄隽、仲凤仪。由于水平有限,编写中难免有考虑不周及错误之处,恳请各校老师在使用中批评指正。

编者

2005 年 5 月

目 录

第 17 章 极限与连续	(1)
§ 17.1 基本初等函数与初等函数	(2)
§ 17.2 数列的极限	(9)
§ 17.3 函数的极限	(11)
§ 17.4 两个重要极限	(20)
§ 17.5 函数的连续性	(26)
测试题 A	(32)
测试题 B	(35)
第 18 章 导数及其应用	(38)
§ 18.1 导数的概念	(39)
§ 18.2 求导法则	(46)
§ 18.3 高阶导数	(54)
§ 18.4 微分	(58)
§ 18.5 导数的应用(一)	(63)
§ 18.6 导数的应用(二)	(69)
测试题 A	(75)
测试题 B	(78)
第 19 章 积分及其应用	(82)
§ 19.1 原函数与不定积分的概念	(83)
§ 19.2 不定积分公式与直接积分法	(89)
§ 19.3 换元积分法与分部积分法	(93)
§ 19.4 定积分的概念与性质	(101)
§ 19.5 定积分的计算	(105)
§ 19.6 定积分在几何与物理中的应用	(110)
测试题 A	(114)
测试题 B	(117)
第 20 章 微分方程简介	(121)
§ 20.1 基本概念	(121)

§ 20.2 一阶微分方程	(121)
第 21 章 二元函数微积分	(126)
§ 21.1 空间解析几何简介	(127)
§ 21.2 二元函数微分法	(130)
§ 21.3 二重积分	(137)
测试题 A	(142)
测试题 B	(144)
第 22 章 概率与数理统计初步	(146)
§ 22.1 连续型随机变量的概率分布	(147)
§ 22.2 几种连续型随机变量的概率分布	(153)
§ 22.3 连续型随机变量的数学期望与方差	(157)
测试题 A	(160)
测试题 B	(162)

第 17 章 极限与连续

I. 本章知识点、学习目标和参考学时

章节目录	知 识 点	学习目标	参考学时
§ 17.1 基本初等函数与初等函数	1. 函数的概念与主要性质 2. 基本初等函数及其图像和性质 3. 复合函数 4. 初等函数 5. 建立函数关系	B C C B A	6
§ 17.2 数列的极限	数列极限的概念	A	1
§ 17.3 函数的极限	1. 函数极限的定义 2. 函数的左、右极限 3. 无穷大与无穷小 4. 函数极限的四则运算法则	B A A D	5
§ 17.4 两个重要极限	两个重要极限公式	C	3
§ 17.5 函数的连续性	1. 函数的连续性概念 2. 连续区间与间断点 3. 初等函数的连续性 4. 闭区间上连续函数的性质	B B B A	3
复习小结			2
小 计			20

II. 本章学习重点与难点

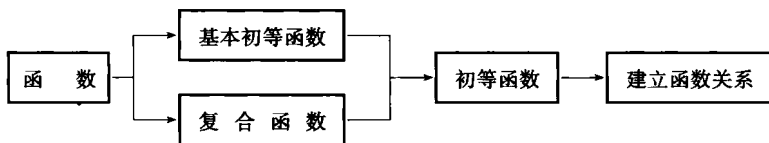
重点:极限的四则运算法则,两个重要极限,求极限方法,一点处连续的定义.

难点:复合函数的分解,极限的概念,函数连续性的判定.

III. 各节学习指导

§ 17.1 基本初等函数与初等函数

一、知识结构



二、最低学习要求

1. 通过复习,进一步了解函数的有关概念和性质,记住基本初等函数的表达式和图像形状.
2. 知道复合函数的概念和分解方法,会分解较简单的复合函数.
3. 了解初等函数概念,知道建立函数关系式的一般步骤.

三、知识点导读

1. 本节内容是在学习第一册有关内容的基础上,进一步理解函数的概念和函数的单调性、奇偶性等性质,通过复习,进一步巩固五种基本初等函数的表达式、图像和特性,这是学好微积分的基础.

2. 在第一册中已经学过函数的概念,本节再一次学习函数概念,主要是通过复习,进一步理解函数的概念及有关的性质,学习时,要注意以下几点:

(1) 明确函数的两要素是定义域和对应法则. 函数的值域是由定义域和对应法则确定的. 所谓两个函数相同,是指它们的定义域和对应法则都相同,两要素缺一不可. 例如,函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ 是相同函数,而函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 就不是相同函数.

(2) 函数的定义域有两种情况:一种是给定函数的解析式 $y = f(x)$, 则定义域是使表达式 $f(x)$ 有意义的自变量 x 的取值范围;另一种情况是有实际意义的函数表达式,则定义域不仅要考虑函数表达式,还要考虑自变量的实际意义.

(3) 函数值 $f(x_0)$ 的求法通常是函数表达式 $f(x)$ 中的 x 用 x_0 代换,所以 $f(x_0 + \Delta x)$ 就是用 $x_0 + \Delta x$ 代换 $f(x)$ 中的 x .

(4) 函数的单调性学习不仅要注意概念,还要注意图像特征.

3. 常用的五种基本初等函数

(1) 幂函数: $y = x^a (a \in \mathbf{R})$;

(2) 指数函数: $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 特例 $y = e^x$;

- (3) 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 特例 $y = \ln x$;
 (4) 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$;
 (5) 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$.

以上函数的图像和性质, 可参见主教材第 4 页到第 7 页表中的相应内容. 通过复习, 要熟记它们的表达式、图像和性质, 尽可能做到看到基本初等函数的表达式, 就能在头脑中想出它的图像. 另有几个常用的特殊幂函数, 如 $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, 要熟记它们的图像形状, 并会迅速作出图像.

4. 复合函数

(1) 概念的理解

① 复合函数是经过函数间的一种运算(即复合运算)而产生的一个新的函数. 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 I , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X , 则 y 经过中间变量 u 而成为 x 的复合函数, 即 $y = f(\varphi(x))$. 复合函数可以经过多层复合而成.

② 并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数, 只有当函数 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域 I 中时, 复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 才有意义.

例如, 函数 $y = \arcsin u$ 和 $u = 2 + x^2$ 复合而成的函数 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 就没有意义.

③ 组成复合函数的 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 通常是基本初等函数或较简单的函数, 所以研究较为复杂的复合函数时, 常常需要分析一个复合函数是由哪些基本初等函数或较简单的函数组成的, 这就是复合函数的分解.

(2) 复合函数的分解方法

- ① 分析复合函数的复合层次;
- ② 由外向里逐层设置中间变量, 找出每一层分解出来的函数;
- ③ 结论.

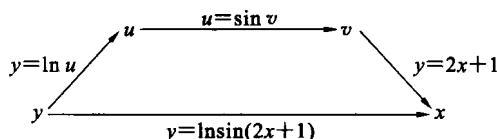
例 分解复合函数 $y = \ln \sin(2x + 1)$.

分析: 由外向里看, 复合函数 $y = \ln \sin(2x + 1)$ 是经过两层复合而成的, 第一层是对数运算, 第二层是三角运算.

解: 设 $u = \sin(2x + 1)$, 则 $y = \ln u$. 再设 $v = 2x + 1$, 则 $u = \sin v$.

所以, 复合函数 $y = \ln \sin(2x + 1)$ 是由 $y = \ln u$ 、 $u = \sin v$ 和 $v = 2x + 1$ 复合而成的.

例 1 的分解过程可以用下图来表示:



(3) 分解复合函数时要注意以下几点:

① 看清楚复合函数的复合层次. 每一层复合运算应该是幂、指数、对数、三角、反三角运算中一种, 而不是四则运算.

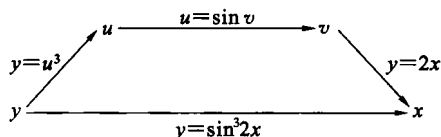
例如, 复合函数 $y = \sin e^{2x-1}$ 的第一层是三角运算, 第二层是指数运算; 函数 $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的第一层是对数运算, 而内层函数 $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 是两个函数的和, 这不是复合运算, 所以函数 $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是一层复合函数.

② 搞清楚复合函数的解析表达式的形式. 有些复合函数的表达式不易看出复合层次, 需要作适当的变形.

例如, 函数 $y = \cos^3(x^2 - 1)$ 可以变形为 $y = [\cos(x^2 - 1)]^3$. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$ 可以变形为 $y = (3x-1)^{-\frac{1}{3}}$.

③ 复合函数的分解必须分解到最后一个函数不是复合函数为止, 最后一个函数应该是基本初等函数或简单函数.

例如, 分解函数 $y = \sin^3 2x$. 设 $u = \sin 2x$, 则 $y = u^3$, 因为函数 $u = \sin 2x$ 仍是复合函数, 所以必须继续分解, 再设 $v = 2x$, 则 $u = \sin v$, 最后一个函数 $v = 2x$ 是一个简单函数, 不必再分解了. 所以函数 $y = \sin^3 2x$ 由 $y = u^3$, $u = \sin v$ 和 $v = 2x$ 复合而成. 复合过程可以用图形表示为



④ 复合函数的分解通常是“由外向里”进行分解.

5. 初等函数是由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算或复合而得出的用一个解析式表示的函数.

在我们现阶段学习的函数中, 分段函数、带有绝对值符号的函数都不是初等函数. 例如

$f(x) = 2|x|$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ -x+1, & x < 0 \end{cases}$ 都不是初等函数.

6. 建立函数关系的一般步骤

- (1) 分析题意, 弄清已知量与未知量, 选定自变量和因变量;
- (2) 根据已知条件建立等量关系式;
- (3) 化简、整理关系式;
- (4) 确定函数的定义域.

四、综合练习

练习 A

(一) 填空题

1. 写出基本初等函数的名称及其解析表达式:

- (1) _____ 函数, 解析表达式为 _____;
- (2) _____ 函数, 解析表达式为 _____;
- (3) _____ 函数, 解析表达式为 _____;
- (4) _____ 函数, 解析表达式为 _____;
- (5) _____ 函数, 解析表达式为 _____.

2. 函数 $y = x^4 - 2x^2 + 3$ 的定义域是_____, 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的定义域是_____, 函数 $y = \sqrt{3-x}$ 的定义域是_____, 函数 $y = \lg(x-1)$ 的定义域是_____.

3. 函数 $f(x) = x+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调_____, 函数 $y = \frac{4}{x}$ 在 $(0, 2)$ 内是单调_____.

4. 函数 $y = x^2 + 1$ 的单调递增区间是_____, 单调递减区间是_____.

5. 函数 $y = 2^{x^2-x}$ 由_____复合而成, 函数 $y = \lg(2x^2 - x + 1)$ 由_____复合而成.

6. 由函数 $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = e^t$, $t = 2x$ 复合而成的函数为_____.

(二) 选择题

1. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域是().

- A. $\{x \mid x \neq -2\}$ B. $\{x \mid x \geq -2\}$ C. $\{x \mid x > -2\}$ D. $\{x \mid x < -2\}$

2. 下列函数中是复合函数的为().

- A. $y = e^x$ B. $y = \lg x + 2$
C. $y = 2\sin x$ D. $y = (x^2 - 1)^3$

3. 函数 $f(x) = 2x - 1$, $x \in \{-2, 0, 1, 3, 4\}$, 则函数的图像是().

- A. 是一条直线 B. 5 个散点 C. 无数个散点 D. 一条射线

4. 下列函数中是奇函数的是().

- A. $y = x^2 \cos x$ B. $y = x^2 \sin x$
C. $y = x \sin x$ D. $y = |\sin x|$

5. 分解复合函数 $y = \ln \sin x^3$ 得到().

- A. $y = \ln u$, $u = v^3$, $v = \sin x$ B. $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = x^3$
C. $y = \ln u$, $u = \sin x^3$ D. $y = 3 \ln u$, $u = \sin x$

(三) 解答题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{2x-3}$

(2) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $y = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$

(4) $y = \lg(3x+2) + \frac{1}{x}$

2. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数:

(1) $y = \sqrt{u}, u = x^3 + 1$

(2) $y = \ln u, u = 2^v, v = \cos x$

3. 指出下列各复合函数的复合过程:

(1) $y = \sqrt{1 - x^2}$

(2) $y = (2x - 3)^{10}$

(3) $y = e^{2x+1}$

(4) $y = \sin^2(3x + 2)$

(5) $y = \ln(1 + \sqrt{2 + x})$

(6) $y = \arctan x^2$

4. 某煤油厂要建造一个容积为 V_0 的圆柱形储油罐, 试建立该储油罐的表面积和底面半径之间的函数关系.

练 习 B

(一) 填空题

1. 函数的两要素是指_____, 值域由_____确定.

2. 设函数 $y = 3x + 2$, 若定义域为 $\{-1, 0, 2, 3\}$, 则值域为_____;
若定义域为 $[0, +\infty)$, 则值域为_____.

3. 函数 $y = \sqrt{\frac{3x - x^2}{5}}$ 的定义域是_____.

4. 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = \ln x$, 则 $f[g(x)] =$ _____.

5. 函数 $y = \sqrt[3]{\ln^2 x}$ 由 _____ 复合而成.

6. 函数 $y = \cos \sqrt{3x-1}$ 由 _____ 复合而成.

(二) 选择题

1. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 是().

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 非奇非偶函数

D. 以上答案都不对

2. 下列各组函数中, 相同的一组函数是().

A. $f(x) = \ln x^2$ 和 $g(x) = 2 \ln x$

B. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 和 $g(x) = x+1$

C. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 和 $g(x) = x$

D. $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

3. 函数 $y = \lg(x-x^2)$ 的定义域是().

A. $(0, +\infty)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-\infty, +\infty)$

4. 分解函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 得().

A. $y = \ln u$, $u = x + v^{\frac{1}{2}}$, $v = x^2 + 1$

B. $y = \ln u$, $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$

C. $y = \ln u$, $u = v^{\frac{1}{2}}$, $v = x^2 + 1$

D. 以上结论都不正确

(三) 解答题

1. 设 $f(x-1) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(x)$ 和 $f(3)$.

2. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数:

(1) $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 - 1$

(2) $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = \ln x$

3. 指出下列各复合函数的复合过程:

$$(1) y = \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2) y = (1 + \lg x)^4$$

$$(3) y = (\arctan \sqrt{x})^5$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - 3}}$$

$$(5) y = 3^{\tan x^2}$$

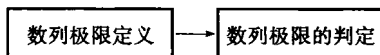
$$(6) y = \log_2(1 + e^{\sqrt{1-2x^2}})$$

4. 在一块长、宽分别为 a 和 b 的矩形铁皮的四角各截去一个边长为 x 的小正方形, 然后做成一个无盖的长方体容器, 试建立该容器的体积与小正方形边长 x 之间的函数关系式.

5. 某化肥厂生产某产品 1 000 吨, 每吨定价为 130 元, 销售量在 700 吨以内时, 按原价出售, 超过 700 吨时, 超过的部分打 9 折出售, 写出销售总收益与总销售量之间的函数关系.

§ 17.2 数列的极限

一、知识结构



二、最低学习要求

1. 了解数列极限的定义, 会判断较简单的数列极限的存在性.
2. 记住几个常用的简单数列的极限.

三、知识点导读

1. 极限是研究微积分基础, 极限方法是人们从有限中认识无限、从近似中认识精确、从量变中认识质变的一种数学方法, 极限运算是数学中一种重要的运算.

2. 数列极限概念

(1) 数列极限的描述性定义: 如果当项数 n 无限增大时, 无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 无限地趋近于一个常数 A , 那么就说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 也可记作当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow A$.

(2) 数列的极限反映了当项数无限增大时, 数列的项的变化趋势.

(3) 如果一个无穷数列以某个常数为极限, 那么这个数列就是有极限的数列, 但并不是每个数列都有极限.

四、综合练习

练习 A

(一) 填空题

1. 数列 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ 的极限为_____.
2. 数列 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots$ 的极限为_____.
3. 数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ 的极限为_____.

(二) 选择题

1. 数列 $1.1, 1.01, 1.001, \dots, 1+10^{-n}, \dots$ 的极限为().
A. 1.1 B. 1 C. 2 D. 不存在
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^n}{2}$ 的值是().
A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. 不存在
3. 数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots$ 的极限为().
A. 0 B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ C. 1 D. 不存在

(三) 观察下列数列有无极限,若有,写出它们的极限

1. $a_n = \frac{1}{2n}$ 2. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$
3. $a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ 4. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

练 习 B

(一) 填空题

1. 数列 $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$ 的极限为_____.
2. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$, 则 $|a_1 - 2| =$ _____, $|a_2 - 2| =$ _____, $|a_3 - 2| =$ _____, $\dots$, $|a_n - 2| =$ _____, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

(二) 选择题

1. 下列数列中,有极限的是().
A. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ B. $a_n = (-1)^n n$
C. $a_n = n - (-1)^n$ D. $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$

2. 数列 $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}, \dots, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \dots$ 的极限为 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在

3. 有下列四个命题:

- (1) 数列 $\{(-1)^n \sqrt{3}\}$ 没有极限; (2) 数列 $\left\{(-1)^n \frac{3}{n}\right\}$ 的极限为 0; (3) 数列 $\left\{\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^n + \sqrt{3}\right\}$ 的极限为 $\sqrt{3}$; (4) 数列 $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$ 没有极限.

其中正确的有 ().

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

(三) 观察下列数列有无极限, 若有, 写出它们的极限

1. $a_n = 3 + \frac{1}{10^n}$

2. $a_n = (-1)^n + n$

3. $a_n = \frac{n}{3^n}$

4. $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$

5. $a_n = \sin n\pi$

6. $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

§ 17.3 函数的极限

一、知识结构

