非线性
自回归时序模型分析

The General Expression for Nonlinear Auto-regressive Time Series Model and Its Engineering Application

陈茹雯◎著

东 南 大 学 出 版 社

非线性自回归时序模型分析及工程应用

The General Expression for Nonlinear Auto-regressive Time Series Model and Its Engineering Application

陈茹雯　著

东南大学出版社
·南京·

内 容 简 介

本书主要内容包括：时间序列分析基础，非线性自回归时序模型，模型的定阶和参数估计理论和算法，模型在预测预报、机器视觉、系统辨识及故障诊断领域的研究。

本书与工程应用联系紧密，可以作为相关专业的教师、研究生和技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非线性自回归时序模型分析及工程应用/陈茹雯著
南京：东南大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-5641-2893-7

Ⅰ.①非… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①计算机应用—信息处理
Ⅳ.① TP391

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131298 号

非线性自回归时序模型分析及工程应用

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社 址	南京市四牌楼 2 号
邮 编	210096
经 销	全国各地新华书店
印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	700 mm×1000 mm 1/16
印 张	8
字 数	158 千字
书 号	ISBN 978-7-5641-2893-7
印 次	2011 年 9 月第 1 次印刷
版 次	2011 年 9 月第 1 版
印 数	1—1000 册
定 价	22.00 元

(凡有印装质量问题，请与我社读者服务部联系。电话：025—83792328)

前　言

时间序列分析是系统辨识的一种方法，它的主要优点是利用数据的内在规律建模，无需知道系统的输入，因而在工业过程控制、经济、生物医学工程等自然科学和社会科学领域都有重要的应用。

经典的时间序列模型如自回归移动平均（ARMA）模型、自回归（AR）模型、移动平均（MA）模型是以系统的正态性和平稳性为前提的，采用线性差分方程表示，因此只适用于线性系统。由于实际工程系统中或多或少存在着一定的非线性成分，当非线性行为不能忽略时，采用上述线性时序模型进行系统辨识很难获得较好的效果。典型的非线性时间序列模型，如门限自回归（TAR）模型、指数自回归（EXPAR）模型、双线性（BL）模型等，一般是根据某种工程背景提出的，通用性不强。因此，在面对复杂的应用时，当前时序分析技术仍然显现出自身的不足，存在不少问题，其中最为关键的就是缺乏一个能包含线性和非线性的通用模型。因此，寻求一种应用范围广、包含线性和非线性特性、简单快速的通用模型，以解决工程中既有线性又有非线性特性的系统建模和辨识问题，具有重要意义。基于此指导思想，本研究室提出了一种非线性自回归时序（general expression for linear and nonlinear auto-regressive time series，GNAR）模型，并对其进行了一系列实验研究。

本书首先回顾了国内外非线性时序模型分析及其工程应用的基本理论和发展状况，然后根据函数逼近理论中的 Weierstrass 定理，对 GNAR 模型结构进行了推导，探讨了模型定阶和参数估计的理论和算法，最后将研究成果应用于时间序列数据的预测预报、图像处理、系统状态辨识和故障诊断等领域，获得了较为理想的结果。但是，非线性时间

序列的分析和处理比平稳序列复杂得多，在模型选择、参数估计和模型适用性检验等方面尚无统一、规范的方法和评价指标；在高维数据空间，非线性时间序列的量化分布关系正是我们着力探讨的问题。因此，GNAR 模型仍存在大量的问题有待探讨研究，只有从理论上明确了 GNAR 模型的意义，才能使其在工程中得到更为广泛和有效的应用。

本书所开展的研究获得了江苏省高校自然科学研究面上项目(09KJB580002)、江苏省“六大人才高峰”高层次人才第四批项目(07-D-014)、江苏省高校自然科学基础研究项目(07KJD580084)的资助。成书过程中得到东南大学黄仁教授、史金飞教授、许飞云教授、张志胜教授以及张雨教授的悉心指导，在此，谨向各位导师表示衷心感谢！

由于作者水平有限，本书的内容和体系难免存在不足，衷心希望给予批评和指教。

陈茹雯

2011 年 4 月

目　录

1 时间序列分析基础

1.1 时间序列

在现实生活中，大量数据带有时间特征，如股市每日(月)指数、逐年太阳黑子数、逐日平均气温或某一机械设备某处采集到的振动信号等，遍及经济、气象、机械、通信、医疗等多个领域。

时间序列由客观系统产生，由于客观系统不可避免地处于多种干扰中，因此，它们产生的时间序列取值不能确定，用随机过程描述最为合适。随机过程被定义为一簇随机变量$\{x_t, t \in T\}$，其中T表示时间t的变化范围。从概率论角度来看，时间序列就是在时间$t \in T$范围内，通过一次实验观测得到的一组按时间或空间顺序排列的数据序列，称为一次实现，或一个样本函数。对于任意时刻t_i，$i=1,2,\cdots$，每一次实现的观测值就定义为随机过程在该时刻的随机变量，它是在t_i时刻观测值的集合，每次观测到的结果是不相同的，即随机过程的观测值不能重复。

时间序列作为一类特殊的随机过程，样本取值虽然是随机的，但必然性存在于偶然性之中。信号是信息的载体，时间序列数据的顺序和数值大小蕴含着客观系统及其变化的信息，表现了变化的动态过程，因此，时间序列也被称为是“动态数据”。

从系统角度来看，时间序列就是相应客观系统的输出或响应。数据序列中应该包含4个方面的信息：

(1) 序列本身的结构和规律，即系统的行为特性；

(2) 系统本身的固有特性；

(3) 外界对系统的输入；

(4) 系统与外界产生联系的方式方法。

系统本身的固有特性与外界无关，是系统动态变化的内因；后两点则是系统产生响应、行为、运动的外因和条件。

1.2 时间序列分析

时间序列分析是指采用参数模型对所观测到的有序随机数据进行分析和处理的一种数据处理方法,简称为时序分析。采用时序分析方法对系统输出数据建立参数模型,可以将参数模型与系统分析直接紧密结合,认识系统的固有特性,掌握系统与外界的关系,从中寻找和分析系统的变化特征、发展趋势和规律。

实际领域中,系统往往是"黑箱",即无法确知系统输入与输出之间的因果关系,因而难以采用控制理论中的系统辨识方法。时序分析方法建模建立在输出等价的基础上,将所观测到的时序作为系统的一维或多维输出,将模型所描述的等价系统视为白噪声驱动下产生这一输出的系统,驱动白噪声与输出同维,如图 1.1 所示。

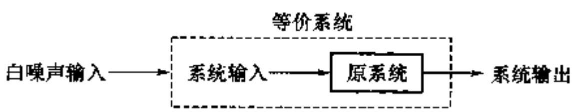

图 1.1 时序建模原理

可见,时序分析方法的主要优点是利用数据的内在规律建模,无需知道系统的输入,它在工业过程控制、经济、生物医学工程等自然科学和社会科学领域中都有重要的应用。

1.3 线性时序模型

1.3.1 ARMA(n,m)模型

对于零均值平稳正态时间序列,自回归移动平均(Auto-regressive and moving average,ARMA)模型具有广泛的代表性。ARMA(n,m)模型可用如下的随机差分方程描述:

$$x_t-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_{t-i}=a_t-\sum_{j=1}^{m}\theta_j a_{t-j} \tag{1.1}$$

式中：n, m 分别为模型的自回归（Auto-regressive，AR）部分的阶次和移动平均（Moving average，MA）部分的阶次；$\varphi_i (i=1,2,\cdots,n)$，$\theta_j (j=1,2,\cdots,m)$为模型参数；$\{a_t\}$为零均值白噪声序列。

由式(1.1)描述的时间序列$\{x_t\}$也称为 ARMA 序列。

引入后移算子 $\boldsymbol{B}$，则 ARMA(n,m)模型可表示为：

$$\varphi(\boldsymbol{B})x_t = \theta(\boldsymbol{B})a_t \tag{1.2}$$

式中：

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = 1-\sum_{u=1}^{n}\varphi_u \boldsymbol{B}^u \tag{1.3}$$

$$\theta(\boldsymbol{B}) = 1-\sum_{v=1}^{m}\theta_v \boldsymbol{B}^v \tag{1.4}$$

用传递函数表示为：

$$x_t = \frac{\theta(\boldsymbol{B})}{\varphi(\boldsymbol{B})}a_t \tag{1.5}$$

因此 ARMA(n,m)序列$\{x_t\}$可以视为一个传递函数为$\dfrac{\theta(\boldsymbol{B})}{\varphi(\boldsymbol{B})}$的系统在白噪声序列$\{a_t\}$激励下的响应，如图 1.2 所示。

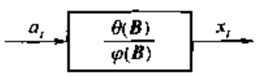

图 1.2　ARMA(n,m)模型的输入和输出

1.3.2　AR(n)模型和 MA(m)模型

ARMA(n,m)模型在应用中的主要困难是在进行模型的参数估计时，观测值$\{x_t\}$可通过检测得到，而残差$\{a_{t-j}\}$则需要递推计算求出，因此参数估计复杂，往往不能满足工程应用中快速建模的要求。

表达一个系统的数学模型不是唯一的，式(1.1)仅仅是一个数学表达式，它的含义是数据序列不仅与它的观测值有关，而且与$\{a_{t-j}\}$也是相关的；若$m=0$，即不考虑$\{a_{t-j}\}$对数据序列的影响，认为系统的主要信息都用观测值$\{x_{t-i}\}$本身的相关

性描述，则由式(1.1)可以得到自回归(AR)模型(AR(n)模型)：

$$x_t - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{t-i} = a_t \tag{1.6}$$

或

$$x_t = \frac{1}{\varphi(\boldsymbol{B})} a_t \tag{1.7}$$

在时间序列分析中已经证明，足够高阶的 AR 模型可以取代 ARMA 模型，以避免 ARMA 模型参数估计的困难。

若 $n=0$，则称之为移动平均(MA)模型(MA(m)模型)：

$$x_t = a_t - \sum_{j=1}^{m} \theta_j a_{t-j} \tag{1.8}$$

MA 模型较 AR 模型复杂，参数估计精度低于后者，计算量却大于后者，因而在工程实际中，MA 模型应用也较少。

1.4 非线性时序模型

AR、MA、ARMA 类模型以线性差分形式表达，只适用于线性系统。由于实际系统或多或少都存在一定的非线性成分，当非线性行为不能忽略时，采用上述线性时序模型进行系统辨识很难得到满意的效果。因此，数十年来许多学者开始研究非线性问题，并提出了多种非线性模型。

1.4.1 BL 模型

双线性(Bi-linear，BL)时间序列模型(简称 BL 模型)，是 C. W. J. Granger 等人于 1978 年提出的。BL 模型最早来自经济学上的问题，然后逐渐引入到控制理论中，进而在时间序列分析中获得应用。

一般的 BL(n,m,p,q)模型可以写成下列形式：

$$x_t = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{t-i} + \sum_{j=0}^{m} \theta_j a_{t-j} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \beta_{kl} x_{t-k} a_{t-l} \tag{1.9}$$

式中：$\theta_0=1$；$\{a_t\}$为严格白噪声序列，即对于任意整数 s 和 t，a_t 与 a_s 是相互独立且均值为 0、方差为 σ^2 的随机变量。

当随机序列$\{x_t\}$为常数时，BL 模型关于$\{a_t\}$呈线性；反之，当$\{a_t\}$为常数时，BL 模型关于$\{x_t\}$呈线性。由此模型得名为“双线性”。显然，BL 模型是线性模型的直接推广，它在控制理论中已有广泛的探讨。由于 BL 模型在某些方面十分接近线性系统，故可运用许多线性系统的技巧和分析方法。

1.4.2　TAR 模型

门限自回归（Threshold auto-regressive，TAR）模型由汤家豪（Tong Howell）在 1978 年提出，其一般表达式为：

$$x_t = \varphi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{n_j} \varphi_i^{(j)} x_{t-i} + a_t^{(j)}$$

$$r_{j-1} < x_{t-d} \leqslant r_j,\ j=1,2,\cdots,l \tag{1.10}$$

式中：$-\infty=r_0<r_1<\cdots<r_l$，$r_j(j=1,2,\cdots,l)$为门限或阈值；$d$ 为延迟参数。

TAR(n)模型的基本思想是利用门限值把非线性模型按状态空间取值，并采用逐段线性化手段来处理非线性系统，同时将极限环引入非线性随机系统。因此，其参数估计和定阶可借助于线性模型的方法，不存在本质上的困难。

1.4.3　EXPAR 模型

指数自回归（Exponential auto-regressive，EXPAR）模型由日本学者尾崎（T. Ozaki）在 1978 年提出，其一般形为：

$$x_t = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i + \pi_i \mathrm{e}^{-r x_{t-1}^2}) x_{t-i} + a_t \tag{1.11}$$

式中：φ_i，$\pi_i(i=1,2,\cdots,n)$，$r>0$ 都是常数；$\{a_t\}$是白噪声序列。

EXPAR(n)模型可以描述幅频依赖现象。

1.4.4　SD－AR 模型

状态依赖自回归（State dependent auto-regressive，SD－AR）模型是 M. B.

Priestley 于 1980 年提出的，它的定义如下：

$$x_t = \mu(\boldsymbol{X}_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p} \Phi_j(\boldsymbol{X}_{t-1}) x_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \Psi_i(\boldsymbol{X}_{t-1}) a_{t-i} + a_t \tag{1.12}$$

式中：$\boldsymbol{X}_{t-1} = (a_{t-q}, \cdots, a_{t-1}, x_{t-q}, \cdots, x_{t-1})^{\mathrm{T}}$。

当函数 $\Phi_j(\boldsymbol{X}_{t-j})(j=1,2,\cdots,p)$，$\Psi_i(\boldsymbol{X}_{t-j})(i=1,2,\cdots,q)$，$\mu(\boldsymbol{X}_{t-j})$ 均为常数时，式(1.12)的 SD－AR 模型就变成线性 ARMA 模型。

当 $\Phi_j(\boldsymbol{X}_{t-j})(j=1,2,\cdots,p)$，$\mu(\boldsymbol{X}_{t-j})$ 为常数时，式(1.12)的 SD－AR 模型就变成 BL 模型。

当 $\Psi_i(\boldsymbol{X}_{t-j}) \equiv 0(j=1,2,\cdots,q)$ 且 $\mu(\boldsymbol{X}_{t-j}) = a_0^{(i)}$，$\Phi_j(\boldsymbol{X}_{t-j}) = -a_j^{(i)}$ 时，SD－AR 模型就变成 TAR 模型。

当 $\Psi_i(\boldsymbol{X}_{t-j}) \equiv 0(j=1,2,\cdots,q)$ 且 $\mu(\boldsymbol{X}_{t-j}) = 0$，$\Phi_j(\boldsymbol{X}_{t-1}) = -(\Phi_j + \pi_j \mathrm{e}^{-\gamma X_{t-1}^2})$ $(j=1,2,\cdots,p)$时，SD－AR 模型就变成 EXPAR 模型。

由于 SD－AR 模型参数估计的复杂性，至今还仅停留在理论阶段。

1.5 随机过程的数字特征

观测数据蕴含了系统状态的重要信息，但这种原始信号是随机的，必须采用各种现代科学技术手段对原始信号进行处理，才能找出其内在规律。时间序列是一类特殊的随机过程，因此需要采用随机过程的某些数字特征从不同角度部分地反映时间序列的特性。

1.5.1 均值和方差函数

设$\{x_t, t \in T\}$为随机过程，x_t 为它在时刻 t 对应的随机变量，其概率密度函数为 $p(x)$，则 x_t 的均值可定义为：

$$\mu_t = E(x_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) \mathrm{d}x \tag{1.13}$$

方差可定义为：

$$\sigma_t^2 = E[x_t - E(x_t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_t)^2 p(x) \mathrm{d}x \tag{1.14}$$

均值 μ_t 和方差 σ_t^2 均为下标集 T 上的函数，分别称为均值函数和方差函数。随机变量的均值反映了 x_t 的随机变化中心，方差则反映了 x_t 不同的样本函数对 μ_t 的平均偏离程度。

对于正态随机变量来说，如果其均值和方差已经确定，则其概率密度函数也就唯一确定。随机过程的均值函数、方差函数及其样本函数之间的关系如图 1.3 所示。

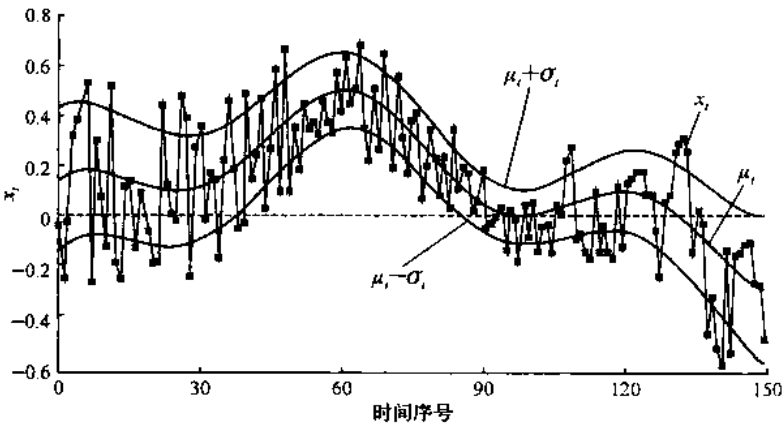

图 1.3 随机过程的均值、方差及样本函数

1.5.2 矩函数

设 x_t 为随机过程 $\{x_t, t\in T\}$ 在时刻 t 对应的随机变量，其概率密度函数为 $p(x)$，定义为：

$$M_0^{(k)}(x_t)=E(x_t^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k p(x)\mathrm{d}x \tag{1.15}$$

$$M_c^{(k)}(x_t)=E[x_t-E(x_t)]^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_t)^k p(x)\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

式中：$M_0^{(k)}(x_t)$ 和 $M_c^{(k)}(x_t)$ 分别为 x_t 的 k 阶原点矩和 k 阶中心矩。

由定义可知随机变量的均值即为一阶原点矩，方差即为二阶中心矩。

1.5.3 自协方差函数和自相关函数

设$\{x_t, t\in T\}$为随机过程，$t,s\in T$，随机变量x_t与x_s的联合概率密度函数为$p(x_t,x_s)$，定义为：

$$r(t,s) = E[(x_t - Ex_t)(x_s - Ex_s)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_t-\mu_t)(x_s-\mu_s)p(x_t,x_s)\mathrm{d}x_t\mathrm{d}x_s \tag{1.17}$$

式中：$r(t,s)$为随机过程的自协方差函数，记为$r(t,s)=\mathrm{cov}(x_t,x_s)$。

由定义可以证明，自协方差函数是二元对称的，即恒有$r(t,s)=r(s,t)$。若$s=t$，即

$$r(t,t) = E(x_t - Ex_t)^2 \tag{1.18}$$

显然，$r(t,t)$即为时刻t随机变量x_t的方差。

随机过程的自相关函数定义为：

$$\rho(t,s) = \frac{r(t,s)}{\sqrt{r(t,t)r(s,s)}} \tag{1.19}$$

1.5.4 高阶自相关函数

若$n\geqslant 2$，则随机过程$\{x_t, t\in T\}$的n阶自相关函数定义为：

$$r_n(t_1,t_2,\cdots,t_n) = E\Big[\prod_{i=1}^{n}(x_{t_i} - Ex_{t_i})\Big] \tag{1.20}$$

若随机变量x_{t_i}（$i=1,2,\cdots,n$）具有联合概率密度$p(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})$，$Ex_{t_i}=\mu_{t_i}$，则

$$r_n(t_1,t_2,\cdots,t_n) = E\Big[\prod_{i=1}^{n}(x_{t_i} - Ex_{t_i})\Big] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\prod_{i=1}^{n}(x_{t_i}-\mu_{t_i})\Big]p(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})\mathrm{d}x_{t_1}\cdots\mathrm{d}x_{t_n} \tag{1.21}$$

正态随机过程的分布规律只取决于其一阶和二阶统计特性，但对于非正态过程，高阶自相关函数则包含了自协方差函数所不能反映的信息，而且根据高阶自相关函数可以定义频域特征函数——多谱。