华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学经管类

配高教社《数学分析》下册（第三版）华东师范大学数学系 编

# 数学分析

## 下册 第三版

## 同步辅导及习题全解


华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 何联毅

本书主编 清华大学 曾 捷



- 紧贴教材：精讲重点 点拨方法 联系考研
- 考试宝典：教材精华 经典试卷 常考试题
- 学习卡：资料下载 信息交流 互动论坛
- 课后习题：三级突破 分析要点 总结难点


中国矿业大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析(下册)同步辅导及习题全解/曾捷主编.
徐州:中国矿业大学出版社,2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-401-X

Ⅰ.数… Ⅱ.曾… Ⅲ.数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086919 号

**主　　编**　曾　捷
**责任编辑**　罗　浩
**出版发行**　中国矿业大学出版社
**印　　刷**　北京市昌平百善印刷厂
**经　　销**　新华书店
**开　　本**　787×1092　1/16　**本册印张** 21.25　**本册字数** 505 千字
**版次印次**　2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
**总 定 价**　156.00 元
(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

# 高等学校教材
# 经典同步辅导丛书编委会

# 前言
# PREFACE

《数学分析》(下册)是数学类专业重要的专业课程之一，也是报考数学类专业硕士研究生的考试课程。华东师范大学数学系编的《数学分析》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《数学分析同步辅导及习题全解(下册)》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

**1. 内容提要**：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统。

**2. 典型例题与解题技巧**：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

**3. 历年考研真题评析**：精选历年考研真题进行深入的讲解。

**4. 课后习题全解**：本书给出了华东师范大学数学系《数学分析》(第三版)(下册)各章习题的答案.我们不仅给出了详细的解题过程，而且还依照难易程度将习题分为三个等级，根据不同等级对习题进行了不同程度的讲解。由于解题方法具有多样性，通常本书只给了一种方法，仅作读者参考。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

**华腾教育教学与研究中心**

# 目录

# CONTENTS

第十二章　数项级数 …… 1
内容提要 …… 1
典型例题与解题技巧 …… 2
历年考研真题评析 …… 3
课后习题全解 …… 3

第十三章　函数列与函数项级数 …… 25
内容提要 …… 25
典型例题与解题技巧 …… 27
历年考研真题评析 …… 28
课后习题全解 …… 29

第十四章　幂级数 …… 47
内容提要 …… 47
典型例题与解题技巧 …… 48
历年考研真题评析 …… 49
课后习题全解 …… 50

第十五章　傅里叶级数 …… 66
内容提要 …… 66
典型例题与解题技巧 …… 67
历年考研真题评析 …… 69
课后习题全解 …… 70

第十六章　多元函数的极限与连续 …… 94
内容提要 …… 94
典型例题与解题技巧 …… 96
历年考研真题评析 …… 97
课后习题全解 …… 98

第十七章　多元函数微分学 …… 120
内容提要 …… 120
典型例题与解题技巧 …… 122
历年考研真题评析 …… 123
课后习题全解 …… 124

第十八章　隐函数定理及其应用 …… 153
内容提要 …… 153
典型例题与解题技巧 …… 155
历年考研真题评析 …… 155
课后习题全解 …… 156

第十九章　含参量积分 …… 181
内容提要 …… 181
典型例题与解题技巧 …… 182
历年考研真题评析 …… 182
课后习题全解 …… 183

第二十章　曲线积分 …… 197
内容提要 …… 197
典型例题与解题技巧 …… 199
历年考研真题评析 …… 199
课后习题全解 …… 200

第二十一章　重积分 …… 211
内容提要 …… 211
典型例题与解题技巧 …… 213
历年考研真题分析 …… 213
课后习题全解 …… 213

第二十二章　曲面积分 …… 245
内容提要 …… 245
典型例题与解题技巧 …… 246
历年考研真题评析 …… 247
课后习题全解 …… 249

第二十三章　流形上微积分学初阶 …… 270
内容提要 …… 270
典型例题与解题技巧 …… 271
课后习题全解 …… 272

# 第十二章

# 数项级数

## 内容提要

### 一、定义

给定一个数列$\{u_n\}$,对它的各项依次用"+"号连接起来的表示式

$$u_1+u_2+\cdots\cdots u_n+\cdots\cdots \quad ①$$

称为数项级数或无穷级数(也常简称级数),其中 $u_n$ 称数项级数①的通项.数项级数①记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或 $\sum u_n$ .

### 二、级数收敛的柯西准则

级数①收敛的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,总存在自然数 $N$,使得当 $m>N$ 和任意的自然数 $p$,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$$

反之,级数①发散的充要条件是:存在某正数 $\varepsilon_0$,对任何自然数 $N$,都存在 $m_0>N$ 和自然数 $p_0$,有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon$$

由此易得:若级数①收敛,则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$.

### 三、正项级数收敛性的判别方法

1. 正项级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 收敛的充要条件是:部分和数列$\{S_n\}$有界,即存在某正数 $M$,对一切自然数 $n$ 有 $S_n<M$.
2. 比较判别法
3. 比较原则的极限形式
4. 达朗贝尔判别法(或称比较判别法)
5. 比较判别法的极限形式

6. 柯西判别法(或称根式判别法)
7. 根式判别法的极限形式
8. 积分判别法
9. 拉贝判别法
10. 拉贝判别法的极限形式

## 四、一般项级数收敛性的判别方法

1. 级数 $\sum |u_n|$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 绝对收敛,若 $\sum u_n$ 收敛,$\sum |u_n|$ 发散,称级数 $\sum u_n$ 为条件收敛.
2. 莱布尼兹判别法
3. 阿贝尔判别法
4. 狄利克雷判别法

## 典型例题与解题技巧

$\leqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + \frac{1}{n\ln^2 n})$

**【例 1】** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,证明:$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛($a_n>0$).

**分析** 本题主要考查正项级数的判敛,要求灵活运用正项级数的几种判敛法.

**证明**

$$0<\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}<\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$$

易知:$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛(积分判别法),又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n^2$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 \dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$ 收敛.

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛($a_n>0$).

**【例 2】** 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有连续的二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.　　$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$　$\frac{f''(0)}{2n^2}$

**分析** 本题考查级数与之前所学知识的综合运用.级数的绝对收敛的判定.

**证明** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,可推出

$$f(0)=0,\quad f('0)=0$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f('0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi \text{在 0 与 } x \text{ 之间})$$

又由题设 $f(''x)$ 在属于邻域内包含原点的一个小闭区间连续,因此 $\exists M>0$,使 $|f(''x)|\leqslant u$,

于是
$$|f(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2\leqslant\frac{u}{2}x^2$$

令 $x=\dfrac{1}{n}$,则 $|f(\dfrac{1}{n})|\leqslant\dfrac{u}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

## 历年考研真题评析

【题 1】（中山大学，2006 年）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是：对任意的正整数序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 都有 $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$.

分析　本题考查对级数收敛的定义的理解程度.

证明　必要性　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以对 $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 及 $\forall P\in N$，有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

特别地

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n}|<\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$$

充分性　用反证法. 若 $\sum a_n$ 发散，则 $\exists \varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n>N$ 及自然数 $p$，使

$$|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n+p}|\geqslant\varepsilon_0$$

特别地 $N_1=1, \exists n_1>1$ 及自然数 $r_1$ 使

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n_1+r_1}|\geqslant\varepsilon_0$$

$N_2=\max\{n_1,2\}, \exists n_2>N_2$，及自然数 $r_2$，使

$$|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2+r_2}|\geqslant\varepsilon_0$$

$$\cdots\cdots$$

这与 $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$ 的假设矛盾.

【题 2】（同济大学，2006 年）证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ $\forall x\neq0$ 都是条件收敛的.

分析　本题考查条件收敛的判断，莱布尼兹判别法与比较判别法的灵活运用.

证明　不妨设 $x>0$，则 $\exists N_x>0$，当 $n>N_x$ 时，$0<\frac{x}{n}<\frac{\pi}{2}$，此时 $\sin\frac{x}{n}>0$，且 $\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$ 为单调递减数列，且 $\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{x}{n}=0$.

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ 收敛.

而当 $n>N_x$ 时，$\left|(-1)^n\sin\frac{x}{n}\right|=\sin\frac{x}{n}>0$，$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}=1$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}$ 发散，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}$ 也发散.

所以 $\forall x\neq0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ 都是条件收敛的.

## 课后习题全解

### §1　级数的收敛性

◎ 1. 证明下列级数的收敛性，并求其和数：

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

**分析** (1) 进行积分和差的转化.(4) 以某一项拆分为两项的方式重新组合原式.

**解** (1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1})$

$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{5}$.

(2) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k})=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\times 3^n}$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$,故级数收敛且其和为$\frac{3}{2}$.

(3) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{4}$.

(4) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)$

$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

于是 $S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$,故级数收敛且其和为 $1-\sqrt{2}$.

(5) $S_n=2S_n-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

$=1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} (n \geqslant 2)$$

于是 $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 3$，故级数收敛且其和为 3.

○2. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，$c \neq 0$，则 $\sum cu_n$ 也发散.

**证明**　因为级数 $\sum u_n$ 发散，即 $\exists \varepsilon_0 > 0$，对任何 $N \in \mathrm{N}_+$，总有 $m_0 \in \mathrm{N}_+$ 和 $p_0 \in \mathrm{N}_+$ 使

$$| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} | \geqslant \varepsilon_0$$

所以 $| cu_{m_0+1} + cu_{m+2} + \cdots + cu_{m_0+p_0} | = | c | | u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} | \geqslant | c | \varepsilon_0$

于是 $\sum cu_n$ 亦发散.

○3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗？又若 $u_n$ 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

**解**　若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都发散，则 $\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散.

例如，$\sum 1$ 和 $\sum (-1)$ 是发散的，但 $\sum (1 + (-1))$ 是收敛的；

$\sum 1$ 和 $\sum 2$ 是发散的，$\sum (1+2) = \sum 3$ 亦是发散的.

若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都发散且 $u \geqslant 0$，$v_n \geqslant 0$，则 $\sum (u_n + v_n)$ 发散. 由柯西收敛准则，知 $\exists \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$，对任何的 $N \in \mathrm{N}_+$，总存在 $m_0, p_0, m_1 \in \mathrm{N}_+$，使

$$| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} | = u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \geqslant \varepsilon_0$$

和
$$| v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1} | = v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1} \geqslant \varepsilon_1$$

故
$$| (u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{0+p_0} + v_{m_0+p_0}) |$$
$$= (u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}) + (v_{m_0+1} + v_{m_0+2} + \cdots v_{m_0+p_0}) \geqslant \varepsilon_0$$

即 $\sum (u_n + v_n)$ 必发散.

◎4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

**分析**　单项收敛则和也收敛.

**证明**　由已知条件知，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，即 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

故
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

从而
$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = a_1 - a$$

◎ 5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$，则

(1) 级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时，级数 $\sum \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

**分析**　(2) 中间项相互抵消即可.

**证明**　(1) 因为
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$$
$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty$$

故$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散.

(2) 当$b_n\neq 0$时

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}$$

即

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1}$$

故级数$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$收敛于$\frac{1}{b_1}$.

◎6. 应用第4,5题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

**分析**　(1) 积化和差将原式拆分,简化了问题.(3) 识记$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

**解**　(1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)$$

而数列$\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$收敛于0,故由第4题的结论,可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}\quad(a\neq 0)$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right]$$

而数列$\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛于0,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\frac{(-1)^1}{1}-0=1$$

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$$

而数列$\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$收敛于0,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}$$

◎7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$;　　(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}$;　　(4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

**分析**　(1) 运用柯西准则进行判别.(4) 注意取$\varepsilon_0$时,应考虑合适的取法.

**解**　(1) 由于 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|=\left|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|$

$$<\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m+p}}<\frac{1}{2^m}$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$. 取 $m=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$使得当 $m>N$ 及 $\forall p\in N_+$，由上式就有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$ 成立，故由柯西准则可推出 $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛．

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，故取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. 对任一 $N\in N_+$，总存在 $m_0>0$，和 $p_0=1$，有

$$|u_{m_0+1}|=\frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0$$

由柯西准则可知 $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ 发散．

(3) 由于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减小，故

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|=\left|\frac{1}{m_0+1}-\frac{1}{m_0+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m_0+p}\right|$$
$$<\frac{1}{m_0+1}<\frac{1}{m_0}$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取

$$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

当 $m_0>N$ 及 $p\in N_+$ 时，都有 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|<\varepsilon$ 成立．

由柯西准则可知级数 $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛．

(4) 取
$$\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\forall N\in N_+$，及取 $m_0=2N$，$p_0=m_0$，则当 $m_0>N$ 时，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)+(m_0+k)^2}}\right|>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2(m_0+k)^2}}=\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+k)}$$
$$>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+m_0)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

由柯西准则知 $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散．

**8.** 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 $\varepsilon$，存在某正整数 $N$，对一切 $n>N$ 总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

**分析**　由结论 $|u_N+\cdots+u_n|<\varepsilon$ 的形式推出用柯西准则证明.

**证明**　必要性　若 $\sum u_n$ 收敛，则由柯西准则可知

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N_+$ 使得 $\forall n>m>N_1$ 时有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon$$

取 $N>N_1+1$,则 $\forall n>N$,有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$$

充分性　若 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathrm{N}_+,\forall n>N$, 总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots u_n|<\varepsilon/2$$

则 $\forall m>N$ 及 $p\in\mathrm{N}_+$ 有

$$\begin{aligned}&|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|\\ \leqslant&|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_{m+p}|+|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m|\\ <&\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

由柯西准则知级数 $\sum u_n$ 收敛.

**小结**　$\varepsilon/2$ 和 $\varepsilon$ 都是表示无穷小的数,形式不一样但含义一样.

○9. 举例说明:若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 $p$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

**解**　调和级数 $\sum\frac{1}{n}$ 对每一个固定自然数 $p$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p}=0$$

但该级数 $\sum\frac{1}{2}$ 是发散的.

●10. 设级数 $\sum u_n$ 满足:加括号后级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k+1}}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_k+1})$

收敛($n_1=0$),且在同一括号的 $u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同,证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

**分析**　证明 $\sum u_n$ 收敛需要证其和表达式 $S_n$ 收敛于某数 $S$.

**证明**　因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_{k+2}}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛,则有

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}})=0$$

所以 $\forall n\in\mathrm{N}_+$,总存在 $k\in\mathrm{N}_+$,使 $n=n_k+j(1\leqslant j\leqslant n_{k+1}-n_k)$ 时,有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}u_n=\sum_{i=1}^{k-1}(u_{n_i+1}+u_{n_i+2}+\cdots+u_{n_{i+1}})+(u_{n_{k+1}}+u_{n_k+2}+\cdots u_{n_{k+j}})\\&=S'_{k-1}+(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+j}})\end{aligned}$$

其中 $S'_{k-1}$ 表示加括号级数的前 $k-1$ 项之和. 当 $n\to\infty$ 时,$k-1\to+\infty$,从而有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S'_{k-1}+\lim_{n\to\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+j}})=\lim_{n\to\infty}S'_{k-1}$$

故 $\sum u_n$ 收敛,其和不变.

**小结**　此题根据 $k\to+\infty$ 时和 $S_k$ 与 $S_{k+1}$ 的极限一样得出结论.

## §2　正项级数

◎1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$；　(2) $\sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$；　(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$；

(5) $\sum \left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$；　(6) $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(7) $\sum (\sqrt[n]{a}-1)(a>1)$；　(8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(9) $\sum (a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)(a>0)$.

**分析**　(1) 将原式同$\frac{1}{n^2}$比较得出结果. (2) 考虑 $\sin \frac{\pi}{3^n} \cdot 2^n \sim \pi(\frac{2}{3})^n$. (6) 识记$\sum \frac{1}{n}$数列是发散的. (7) 先做代换 $t=\frac{1}{n}$.

**解**　(1) 因为

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2+a^2} < \frac{1}{n^2}$$

而正项级数$\sum \frac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum \frac{1}{n^2+a^2}$收敛．

(2) 因为

$$0 < 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \sim \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

而正项级数$\sum \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，所以级数$\sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$收敛．

(3) 因为

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant 0$$

而正项级数$\sum \frac{1}{n+1}$发散，所以级数$\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$发散．

(4) 因为

$$0 < \frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n} \quad (n > e^2)$$

而正项级数$\sum \frac{1}{2^n}$收敛，所以级数$\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$收敛．

(5) 因为

$$1-\cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 (n \to +\infty)$$

而正项级数$\sum \frac{1}{2n^2}$收敛，所以级数$\sum \left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$收敛．

(6) 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$，故 $\exists N \in \mathrm{N}_+$，当 $n>N$ 时，有

$$\sqrt[n]{n} < 2$$

即

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{2n}$$

而正项级数$\sum \frac{1}{2n}$发散．所以级数$\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散．

(7) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} \xlongequal{令 t=\frac{1}{n}} \lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^t \ln a}{1} = \ln a$$

而正项级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum (\sqrt[n]{a}-1)$ 发散.

(8) 因为
$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}}=\frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln(\ln n)}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{n^2}$$

而正项级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(9) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{(\frac{1}{2n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}})^2}{(\frac{1}{2n})^2}$$
$$\xlongequal{令 t=\frac{1}{2n}}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{a^t-a^{-t}}{t}\right)^2=(2\ln a)^2$$

而正项级数 $\sum (\frac{1}{2n})^2$ 收敛，所以级数 $\sum (a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ 收敛.

◎ 2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$；　(2) $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$；

(3) $\sum (\frac{n}{2n+1})^n$；　(4) $\sum \frac{n!}{n^n}$；

(5) $\sum \frac{n^2}{2^n}$；　(6) $\sum \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$；

(7) $\sum \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$（其中 $a_n\to a(n\to\infty)$；$a_n,b,a>0$，且，$a\neq b$).

**分析**　(4) 运用到 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 知识点.(7) 根据 $a$、$b$ 不同取值情况考虑.

**解**　(1) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum \frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$ 发散.

(2) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{10}=+\infty$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

(3) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{2n+1})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根式判别法知正项级数 $\sum (\frac{n}{2n+1})^n$ 收敛.

(4) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

(5) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}=\frac{1}{2}<1$$