地球物理基础丛书

数学物理方程

操华胜 编著

科学出版社

地球物理基础丛书

数学物理方程

操华胜　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是在非数学专业课程“数学物理方程”和“数学物理方程与特殊函数”的讲义的基础上编写而成的。全书共分 9 章。第 1 章介绍各种典型方程和定解问题，为以后各章提供了一些备用的定理（原理）。第 2 章回顾并且讨论了常微分方程的解法，可将它看成为一维的数学物理方程问题。第 3 章介绍了对波动方程常用的行波法。第 4 章至第 6 章详细介绍了数学物理方程中常用的分离变量方法。其中第 5 章与第 6 章结合一些特殊函数来讨论，如：一维问题中容易出现的贝塞尔函数和勒让德函数，三维问题中容易出现的柱函数和球函数，要求读者认真掌握。第 7 章讨论了无界问题十分有效的另一种方法：积分变换法。第 8 章与第 9 章讲述与广义函数相关的基本解方法和格林函数法。最后是附录部分，对前面的章节内容进行了完善与归纳。

本书可作为地球物理学本科生及相关地学专业课程的教材或教学参考书，也可供相关领域的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/操华胜编著. —北京：科学出版社，2016.3

（地球物理基础丛书）

ISBN 978-7-03-047863-4

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①操…　Ⅲ.①数学物理方程　Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 056851 号

责任编辑：张颖兵　杨光华/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市百壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2016 年 3 月第 一 版　印张：12 3/4

2016 年 3 月第一次印刷　字数：326 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

“地球物理基础丛书”编委会

“地球物理基础丛书”序

地球物理学是地球科学领域最古老、最重要而又最充满活力的分支之一。自两千多年前亚里士多德开始，就已经出现了地球物理学的萌芽。在《物理学》中，亚里士多德阐述了很多与地球及其周围空间相关的自然现象，诸如风、雨、雷、电、火山、地震等自然现象。这些现象与地球系统密切关联，其解释又涉及物理学本身。地球系统包括固态内核、液态外核、熔融地幔、黏弹地壳、固态冰川和液态海洋、地球液态固态体(简称地球本体)周围的大气层、电离层、月球以及所有绕地卫星；此外，地球系统与太阳、太阳系内的所有行星、卫星及星际物质密切关联，因而，广义地，也可将后者纳入地球系统之中。地球物理学，就其本意而言，是研究地球系统内各种物性参数、各种物理场、各种物质变化运移、各圈层相互作用及环境变化以及地球系统中发生的各种自然现象的物理学。或者简单而不太严密地说，地球物理学，是利用物理学原理、方法、实验手段研究地球系统本身及其内发生的各种自然现象的学说。随着科学技术的进步，地球物理学也在不断拓展其研究范围，现在已包含非常广泛的分支学科，如太阳系起源，行星学，地球形状学，地球自转学，地球重力学，地电学，地磁学，地热学，地球年代学，地壳形变学，地球动力学，地震学，地球内部物理学等。

由于地球物理学是研究地球的物理学，因此，随着物理学新进展或新发现的出现，其理论体系或方法论必将影响、渗透到地球物理学。从亚里士多德的宇宙地心说和自由落体重者下落较快说到哥白尼的宇宙日心说和伽利略的自由落体等速说，从开普勒三大定律到牛顿万有引力定律，从法拉第电磁感应定律到麦克斯韦电磁场统一方程，从伽利略的温度计到开尔文的热力学系统，从牛顿的经典力学体系和绝对时空观到爱因斯坦的相对论理论和相对论时空观，从微观世界的连续性理论到不连续量子理论，从古老的简单机械计算到现代的大型计算机，无一不在影响和逐步推动着地球物理学的发展进程。比如，没有牛顿的万有引力定律，就没有对天体运行规律的完美描述；没有爱因斯坦的广义相对论，就难以解释行星的近日点进动效应；没有热力学定律，地热学就难以发展。当今地球物理学，仅凭理论推演、不付诸实践检验而构建模型的时代已几乎一去不复返了。构建地球物理模型，解释各种自然现象，理论预测与实际观测比对，修改模型，进一步比对，不断循环往复，这是地球物理学的发展逻辑；不断拓展地球系统研究对象，包括利用物理学新理论新方法、新实验结果研究地球系统物性参数及各种自然现象，并向其他领域交叉渗透，这是当今地球物理学的发展趋势。

尽管历经两千多年的发展，但在地球物理学领域仍有很多悬而未决的重大科学难题，例如：太阳系起源，地磁场起源，内核的年龄，内核超速旋转速率，Chandler 晃动机理，十年尺度日长变化机理，厄尔尼诺现象的机理，地球膨胀/收缩机理，地震预报等。奥秘无穷，探索无尽。地球物理学没有终结，只有起点。

国内已有30多所大学开设了地球物理学本科专业，但尚缺乏系统性的循序渐进的适合于理科的地球物理专业教科书。因此，我们认为有必要出版地球物理基础丛书。该丛书面向地球物理专业、大地测量专业及相关专业，在内容选择方面，注重基础性和系统性，注重从第一性原理出发，强调理论的系统性、严密性和逻辑性；注重阐述基本概念、基本原理，在描述现象的基础上，诠释现象的本质；注重理论联系实践及启发式教学，注重培养学生的实际动手能力和科学研究能力。这套丛书以偏重于理科的教科书为主，兼顾偏重于应用的教科书以及实践教程，可供地球物理专业、大地测量专业本科生学习，也可供研究生及相关教学和科研人员参考。

申文斌

2016年1月26日于武昌

序

数学物理方程是建立和研究描绘物理现象(数学模型)时所用到的数学问题与方法。"数学物理方程"课程是理工科各专业学生必修的重要基础课,是在"高等数学"课程基础上又一重要的基础课程,它将为学习其他课程提供数学处理方法。本课程的重要任务就是教会学生如何把各种物理问题翻译成数学问题,并掌握定解问题的多种求解方法,如行波法、分离变数法、积分变换法、格林函数法等。

本书力求以实用为主,理论部分大多略去证明,结合例题叙述它们的意义与方法。学习本书的全部时,要求学生在此之前学习过"高等数学"(特别是常微分方程的内容不可少),有"复变函数"的概念,学习过"积分变换"与"大学物理"的相关知识。

本书对三维问题的讨论多于对二维问题的讨论。为了便于学生牢固掌握这些内容,在每一章末编排了部分习题,供学生选择性地练习。对于有些较难的内容,学生可略去详细的推导而了解它的方法,也可以略去该内容。一些标注"*"的章节多为提高性的内容(选读),而每章末的"阅读材料"可能是后面章节中要用到的知识,供学生选择阅读。由于时间的原因,部分章节还没有完善,请谅解。

编写本书时参考了众多的资料,无法一一列出。本书得到了教育部云南丽江地球物理野外实践教育基地项目的资助。很多老师与学生对本书的编排提出了许多宝贵的意见和积极的建议,这对本书的编写与修改起到了积极的作用,作者在此表示诚挚的感谢。也特此鸣谢霍学深老师为本书作图解、公式推导和描述上的修订。限于水平,书中还难免有不妥之处,恳请使用本书的师生指正。

作　者

2015 年秋于武昌

目　　录

带“*”号的章节为选读章节。

第 1 章　数学物理方程的定解问题

1.1　数学物理方程的一般概念

本节讨论：① 数学物理方程的基本概念；② 三类基本方程的数学表示；③ 一些简单解法。

数学物理方程的任务与特点　数学物理方程(亦称数理方程)在数学上为二阶偏微分方程。它的任务有两个方面：① 寻找数学定解问题的求解方法，给出解的表达式和计算方法；② 通过理论分析得出问题的通解或某些特解的一般性质。数学物理方程有如下特点：① 它紧密地、直接地联系物理学、力学与工程技术中的许多问题；② 它广泛地运用数学物理中许多的技术成果，如：数学中的复变函数、积分变换、常微分方程、泛函分析、广义函数等，物理学中的力学、电学、磁学、热力学、原子物理学、振动与波、空气动力学等。

1.1.1　一些基本概念

数学物理方程是物理过程中的一些偏微分方程。由于物理过程是十分复杂的，它们的数学表达式也是十分广泛的。本书不能将众多的数学物理方程一一讨论，仅讨论一些常用的二阶线性微分方程。

一般而言，二阶线性偏微分方程可写为

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \tag{1.1.1}$$

式中：自变量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$；系数 a_{ij}、b_i、c 为 x 的函数或为常数，并且 $a_{ij} = a_{ji}$。由于式中关于未知函数 u 的导数最高为二阶导数，方程称为二阶微分方程；同样，由于 x 为 n 维向量，方程也称为 n 维方程；由于方程中对 u 的各阶偏导数为线性的，也称为线性方程，否则就称为非线性方程。若系数 a_{ij}、b_i、c 均为常数，则称为常系数方程，否则称为变系数方程；若 $f \equiv 0$，则称为齐次方程，反之称为非齐次方程。

1. 方程的数学形式

在所有的自变量 x_i 中，时间变量 t 常常被使用，由于它的独特性，人们常常直接用 t 表示而不置于 x_i 之中，关于 t 的导数式为

$$L_t u = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.1.2}$$

故上述方程可改写为

$$L_t u = Lu + f \tag{1.1.3}$$

上述方程习惯上也称为 n 维方程(它由 n 个空间坐标 $+1$ 个时间坐标，称为 $n+1$ 个自变量)。本书仅讨论二阶 2-3 维常系数线性偏微分方程，在特殊函数中也讨论部分二阶变系数线性常微分方程的问题，即一维常系数线性微分方程。为节省篇幅，以后不说明一维

x 与 n 维 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的不同。

2. 算子

为书写简便,通常把从一个函数类(定义域)到另一个函数类(值域)的映射称为算子(或算符)。如二阶微分算子 L 及 L_t 分别为

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c \tag{1.1.4}$$

$$L_t=a\frac{\partial^2}{\partial t^2}+b\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.1.5}$$

特例,拉普拉斯算子 Δ(当下标为 3 时常略去下标)

$$\Delta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\quad\left(\text{或 }\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{1.1.6}$$

1.1.2　三类基本方程

在众多二阶数学物理方程中,以下三类方程被经常使用:

(1) 波动方程(或称双曲型方程):$u_{tt}=a^2\Delta u+f$;

(2) 传导方程(或称抛物型方程):$u_t=a^2\Delta u+f$;

(3) 泊松方程(或称椭圆型方程):$\Delta u+f$。

波动方程和传导方程因与时间的未来变化相关,将它们统称为发展方程;另将与时间无关的泊松方程称为稳定方程。它们的共性是:① 都是线性方程;② 都是常系数方程;③ 都是二阶方程。

1.1.3　简单方程的一些解法

任何一个在自变量的区域内满足方程的函数称为微分方程的解。方程的解可以通过观察发现而验证得到,也可通过使用数学方法求得。

例 1(直接积分法)　求解方程:$u_{xy}=0$。

解　首先通过方程两边对 x 直接积分,得

$$u_y=h(y)$$

上式两边对 y 积分,得

$$u=\int h(y)\mathrm{d}y+f(x)=f(x)+g(y)$$

其中:因为 u 满足方程,所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 必须二阶可导。这是一个简单的二阶线性偏微分方程,式中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为任意函数,故称其为通解。

例 2(变量替换法)　求解一维波动方程:$u_{tt}=a^2u_{xx}$。

解　作变量替换

$$\xi=x+at,\qquad \eta=x-at$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta}=0$$

由例 1 得原方程的解为

$$u=f(\xi)+g(\eta)=f(x+at)+g(x-at)$$

不难看出，本例题是上一例题的应用（注意方法与结果）。

例 3（降维法）　解方程：$tu_{xt}+2u_x=2xt$。

解　令 $v=u_x$，则原方程为

$$tv_t+2v=2xt$$

不难得到

$$v=[G(t)+2xt^3/3]/t^2$$

故

$$u=\frac{1}{3}x^2t+t^{-2}F(x)+H(t)$$

例 4（待定系数法）　求解二维调和方程：$\Delta_2 u=u_{xx}+u_{yy}=0$。

解　该方程的解难以直接求得。由复变函数知：对 $z=x+\mathrm{i}y$，任意一个解析函数 $f(z)$ 的实部与虚部均满足调和方程。即若 $u=\mathrm{Re}f(z)$ 或 $u=\mathrm{Im}f(z)$，则 $\Delta_2 u=0$。如取 $f(z)=z^n$，容易验证，以下各函数（r,θ 为极坐标）均满足 $\Delta_2 u=0$：$r^n\cos n\theta$、$r^n\sin n\theta$、$\ln r$ 或 $\mathrm{e}^{ax}\cos ay$、$\mathrm{e}^{by}\cos bx$、$u=\mathrm{e}^{ax+by}$（其中：$a^2+b^2=0$）等，它们的线性组合也是方程的解。

通过上述例题不难看出：① 一个偏微分方程的解是不唯一的，甚至可能为无穷多个（通）解；② 要使得方程的解是唯一的，必须对解附加一定的限制（称为约束条件）。

特别提醒：可以验证：$u=\dfrac{1}{r}$ 满足 $\Delta_3 u=0$，并且 $\ln r$ 满足 $\Delta_2 u=0$。

1.2　数学物理方程的导出

本节讨论：① 数学物理方程的导出；② 定解条件的分类与特点。

1.2.1　三类方程的导出

方程的导出，是指将物理现象用数学语言（公式）表述出来。表述的方法可按如下步骤进行。

1. 方程导出的步骤

（1）确定所要研究的物理量 u；

（2）用“微元法”研究系统的一小部分，根据物理过程分析邻近部分与这个小部分间的相互作用，略去微量即可；

（3）将这种关系用数学算式表达出来，化简并整理即得数学物理方程。

2. 波动方程的建立

例 1（均匀弦的微小横振动）　设有一条密度均匀的柔软弦，在张力的作用下处于平衡状态，除重力外不受外力影响（图 1.1）。求在微小横向扰动下弦的振动规律。

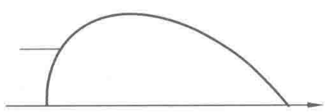

图 1.1　例 1 的示意图

设弦与 x 轴重合，振动的位移为 u 轴，弦在坐标系中的位置为$[0,l]$。由于振动的位移 u 与时间 t 及位置 x 相关，即 $u(t,x)$。考虑弦中某微小长为 $\mathrm{d}s$ 的弧段的运动 M_1M_2，运动中两端受的张力为 T_1 与 T_2；在 x 轴方向上任一点受力的总和为 $T_1\cos\alpha_1 - T_2\cos\alpha_2$，当弦仅作横向振动时，有

$$T_1\cos\alpha_1 - T_2\cos\alpha_2 = 0$$

而在 u 轴方向上任一点受力的总和为 $T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - \rho g\,\mathrm{d}s$，这里 $\rho g\,\mathrm{d}s$ 为该弧段的重力，负号表示方向向下。由牛顿第二定律得

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - g\rho\,\mathrm{d}s = (\rho\,\mathrm{d}s)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

当 $\alpha_1 \approx 0, \alpha_2 \approx 0$ 时，有

$$\cos\alpha_1 \approx 1, \cos\alpha_2 \approx 1, \sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{\partial u(t,x+\mathrm{d}x)}{\partial x}, \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$$

此时 $T_1 = T_2 = T$ 并且

$$T\left[\frac{\partial u(t,x+\mathrm{d}x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - g\rho\,\mathrm{d}x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\,\mathrm{d}x$$

将上式进一步地利用近似式

$$\frac{\partial u(t,x+\mathrm{d}x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

代入上式略去微量 $\mathrm{d}x$ 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g$$

采用记号 $a^2 = T/\rho$、$f(t,x) = -g$，故可将上式用等式表示为一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

3. 热传导方程的建立

例 2(物体的热传导过程)　当某一可导热的物体内各处的温度不均匀时，热量就要从高温处向低温处流动，该现象称为热传导。设物体内的温度分布为 $u(t,x,y,z)$，即温度的分布与时间及空间位置相关。考虑体内微元(体元)内的温度，由热传导的傅里叶定理知，在某一时段内从物体表面流入到区域内热量 ΔQ 与时间 Δt、表面积 ΔS 以及温度沿法向方向的变化率 ∇u 三者的积成正比，即

$$\Delta Q = k\nabla u \cdot \Delta S \cdot \Delta t \quad 或 \quad \mathrm{d}Q = k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

k 为热传导系数。于是，流入到物体内的全部热量

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t$$

当热量流入后物体内的温度发生变化，即

$$\iiint_\tau c\rho[u(t+\Delta t,x,y,z) - u(t,x,y,z)]\mathrm{d}\tau = \iiint_\tau c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$