新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

陈德燕 主编

高中数学 1

集合与函数

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 1

集合与函数

主 编 陈德燕

参 编 陈 健 苏 健

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程.高中数学1　集合与函数/陈德燕主编.—上海:华东师范大学出版社,2004.3
ISBN 978-7-5617-3762-0

Ⅰ.新...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第021824号

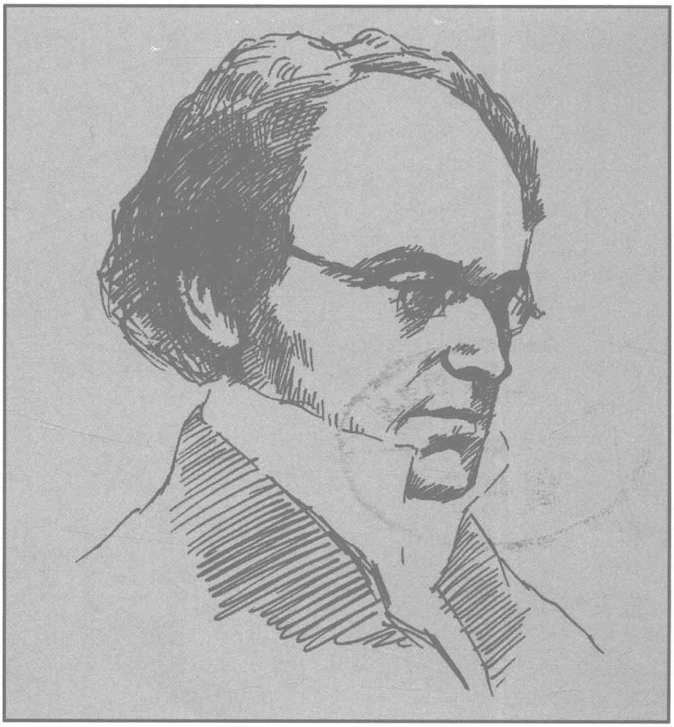
新专题教程
高中数学1·集合与函数

主　　编　陈德燕
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　段贵霞
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960　16开
印　　张　10
字　　数　196千字
版　　次　2009年4月第四版
印　　次　2009年7月第四次
书　　号　ISBN 978-7-5617-3762-0/G·2069
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人



数学发明创造的动力不是推理，而是想象力的发挥。

——德·摩根

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科，共计50个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威　编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性。

材料典型　丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练。总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果。

版本通用　丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

编排科学　丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

函数是描述客观世界变化规律的重要模型，它的思想方法贯穿了整个高中数学课程.学好函数知识对掌握高中数学有着举足轻重的作用.本书的目的在于帮助学生系统地学习函数知识，提高运用函数知识及函数思想解决问题的能力，从而为其他数学知识的学习提供帮助.

本书分为9个专题，每个专题包括知识疏理、分类举例、基础训练、能力提高五个部分.其中知识疏理部分对本专题所涉及的知识、方法进行系统的归纳.分类举例部分，通过例题的形式，分类整理本专题应该掌握的解题方法，帮助学生提高解题能力，引导学生掌握正确的思维方法.所选例题典型、有代表性.基础训练、能力提高两个部分供同学们练习使用.基础训练以基础题为主，能力提高部分要求有一定的综合解题能力.为帮助同学们把握高考的要求，还专门设置了"高考热点问题剖析"这一专题.

本书系统地归纳了高中阶段所学函数的基本性质，有助于学生系统地学习函数知识，加深对函数概念的理解.与此同时，还给出了研究一般函数的方法，帮助学生提高研究函数性质的能力.本书既突出函数性质的运用，同时强调函数与方程、函数思想等数学思想与方法在解决数学问题与实际问题中的应用.为此，专门设置了"函数思想及其应用"和"函数模型及其应用"两个专题.

前　言

学而不思则罔. 只有通过自己的独立思考，同时掌握科学的思维方法，才能学好数学. 使用本书分类举例中例题时，希望同学们能够先思考、先演算，再对照书本给出的解题方法，并注重对例题中解析部分的阅读以启发思路，达到举一反三的目的.

本书可供高三总复习时使用，也可以供高一学生在学习第1模块时使用. 书中有不妥之处，欢迎读者批评指正.

陈德燕

CONTENTS

目 录

高中数学1·集合与函数

专题 1

集合与集合的运算

【知识梳理】

集合的概念及基本理论是现代数学的重要基础，它已渗透到数学的各个分支，它的思想方法是我们继续学习的必要知识，也是学习、掌握和使用数学语言的基础.

主要内容包括：

1. 集合的基本概念

(1) 集合和元素的概念

某些指定的对象集在一起就成为一个集合，构成集合的各个对象叫做这个集合的元素.

集合是数学中不加定义的基本概念.

(2) 集合中元素的性质

确定性　任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，两者必居其一，而且只居其一.

互异性　对于给定集合中的任何两个元素都是不同的对象.

无序性　在给定集合中的元素相互交换次序所得的集合与原来的集合相同.

(3) 集合的分类

含有有限个元素的集合叫做有限集；

含有无限个元素的集合叫做无限集；

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

$\{0\}$，$\{\varnothing\}$均不是空集.

(4) 元素与集合的关系

如果a是集合A中的元素，就说a属于集合A，记作$a \in A$；否则记作$a \notin A$.

2. 集合的表示法

(1) 列举法

使用列举法要注意：元素间用分隔号

将集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的

“,”;对于含较多元素的集合,若其元素有明显规律,需把元素间规律显示清楚后才能用删节号.

图示法又称韦恩图法.

若 $A\subsetneqq B$, $B\subseteq C$,则集合 A 与 C 的关系怎样?

方法.

(2) 描述法

把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号内,其模式为:$\{x \mid p(x)\}$.

(3) 图示法

用任意封闭曲线围成的图形表示集合.

(4) 字母、符号表示法

为了书写方便,规定以下几种常用的数集及其记法:

空集,记作 $\varnothing$;

自然数集(或全体非负整数的集合),记作 $\mathbf{N}$;

正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$);

全体整数的集合通常简称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数的集合通常简称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数的集合通常简称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

3. 子集

(1) 对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么 A 称为 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$). 如果 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么 A 称为 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

(2) 子集的性质

$A\subseteq A$; $\varnothing\subseteq A$; $\varnothing\subsetneqq A\ (A\neq\varnothing)$;

若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

子集的个数: n 元集有 2^n 个子集;有 2^n-1 个真子集;有 2^n-1 个非空子集;有 2^n-2 个非空真子集.

(3) $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A \Leftrightarrow A=B$.

4. 交集

(1) 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,叫做 A、B 的交集,记作 $A\cap B$,

即 $$A\cap B=\{x \mid x\in A,\text{且 } x\in B\}.$$

(2) 性质

$A\cap A=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cap B\subseteq A$;

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

5. **并集**

(1) 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A,\text{或 } x\in B\}.$$

(2) 性质

$A\cup A=A$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cup B\supseteq A$; $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

6. **补集**

(1) 设全集为 U,集合 $A\subseteq U$,则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在集合 U 中的补集,记作 $\complement_U A$,即 $\complement_U A=\{x \mid x\in U,\text{且 } x\notin A\}$.

(2) 性质

$A\cup\complement_U A=U$; $A\cap\complement_U A=\varnothing$; $\complement_U U=\varnothing$; $\complement_U\varnothing=U$; $\complement_U(\complement_U A)=A$.

有时在运算时,还可用德·摩根运算律:
$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$
$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

【分类举例】

例 1 判断下列四个集合是否为相等集合. $A=\{x \mid y=x^2+1\}$; $B=\{y \mid y=x^2+1\}$; $C=\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$; $D=\{y=x^2+1\}$.

解析 用描述法表示集合时,常把集合写成如下形式:$\{x \mid x$具有公共属性$P\}$. 其中 x 是“代表元”,这四个集合中前三个的代表元均不同. A 为二次函数自变量 x 的值的全体,即 $A=\mathbf{R}$;B 为二次函数值 y 的全体,即 $B=\{y \mid y\geqslant 1\}$;$C$ 为二次函数图像上所有点的全体组成的集合;而 D 为列举法表示,把二次函数 $y=x^2+1$ 作为该集合元素,为单元素集. 故这四个集合均为不同集合.

集合 $A=\{x \mid x>1\}$ 与集合 $B=\{y \mid y>1\}$ 是否为相同集合?

例 2 (2006·江苏)若 A、B、C 为三个集合,$A\cup B=B\cap C$,则一定有( ).

(A) $A\subseteq C$ (B) $C\subseteq A$

(C) $A\neq C$ (D) $A=\varnothing$

解析 本题主要考查集合的并集与交集运算、集合之间关系的理解. 因为 $A\subseteq A\cup B$ 且 $C\cap B\subseteq C$, $A\cup B=C\cap B$, 所以 $A\subseteq C$. 故选 A.

本题所考查的三个抽象集合之间的关系,还可考虑借助文氏图法.

例 3 设 A、B 是两个非空集合,我们规定:$A-B=\{x \mid x\in A,\text{且 } x\notin B\}$,根据上述规定,$M-(M-N)$ 等于( ).

实际上，$x\in(A-B)\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin B$ 与 $x\notin(A-B)\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\in B$ 这两命题互为逆否命题.

(A) M　　(B) N

(C) $M\cup N$　　(D) $M\cap N$

解析　解题的关键是理解这个"规定"，即 $x\in(A-B)\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin B$ 或 $x\notin(A-B)\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\in B$. 由此可知：$x\in[M-(M-N)]\Leftrightarrow x\in M$ 且 $x\notin(M-N)$，而 $x\notin(M-N)\Leftrightarrow x\notin M$ 或 $x\in N$，所以 $x\in[M-(M-N)]\Leftrightarrow x\in M$ 且 $x\in N$，所以 $M-(M-N)=M\cap N$. 答案为 D.

例 4　(2006·湖南)设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，$P=\{x\mid f'(x)>0\}$，若 $M\subsetneqq P$，则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $(-\infty,1)$　　(B) $(0,1)$

(C) $(1,+\infty)$　　(D) $[1,+\infty)$

解析　设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，若 $a>1$ 时，$M=\{x\mid 1<x<a\}$；若 $a<1$ 时，$M=\{x\mid a<x<1\}$；$a=1$ 时，$M=\varnothing$；又 $\because f'(x)=\dfrac{(x-1)-(x-a)}{(x-1)^2}=\dfrac{a-1}{(x-1)^2}>0$，$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$P=\{x\mid x\neq1\}$；$a\leqslant1$ 时，$P=\varnothing$. $\because M\subsetneqq P$，故选 C.

例 5　已知集合 $M=\{x\mid x^2+ax+1=0\}$，$N=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，且 $M\cap N=M$，求 a 的取值范围.

解析　由 $M\cap N=M$ 知，$M\subseteq N$. 因为 N 为确定集合，所以应根据 $M\subseteq N$，对 M 的可能的情况进行分类讨论，其中 $M=\varnothing$ 不能忽略.

由 $x^2-3x+2=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$，所以 $N=\{1,2\}$. 又由已知，得 $M\subseteq N$.

(1) 若 $M=\varnothing$，即 $x^2+ax+1=0$ 无实数解.

$\Delta<0$，此时 $a^2-4<0$，即 $-2<a<2$ 时，符合题意.

(2) 若 $M\neq\varnothing$，则 $M=\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{1,2\}$. 又 $x^2+ax+1=0$ 的两根之积为 1，故 $M=\{1\}$，所以 $x^2+ax+1=0$ 有两重根 1. 所以 $x_1+x_2=2=-a$，且满足 $\Delta\geqslant0$. 综上所述：$-2\leqslant a<2$.

M 在 $x^2+ax+1=0$ 有解的情况下，两根积为定值 1，为解题提供一条捷径.

例 6　(2006·全国Ⅱ卷)设 $a\in\mathbf{R}$，二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，$A\cap B\neq$

$\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析 由 $f(x)$ 为二次函数知 $a\neq 0$. 由 $f(x)=ax^2-2x-2a=0$ 知：$\Delta=4+8a^2>0$. 则其两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，且易知 $x_1<0$，$x_2>0$.

(1) 当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$，解得 $a>\frac{6}{7}$.

(2) 当 $a<0$ 时，$A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$，解得 $a<-2$.

综上，使 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立的 a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

基础训练

1. 有下列命题：① 空集没有子集；② 空集是任何集合的真子集；③ 任何集合至少有两个子集；④ 任何一个集合必有一个真子集；⑤ 若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$. 其中正确命题的个数是(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 0 个

2. 方程组 $\begin{cases}2x+y+6=0,\\ x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是(　　).

(A) $\{(-3,0)\}$　　(B) $\{-3,0\}$　　(C) $(-3,0)$　　(D) $\{(0,-3)\}$

3. (2005 • 天津)集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<3 \text{ 且 } x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是(　　).

(A) 16　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 4

4. 已知 $M=\{x\mid x\leqslant 1\}$，$N=\{x\mid x>a\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 a 的范围为(　　).

(A) $a>1$　　(B) $a\geqslant 1$　　(C) $a<1$　　(D) $a\leqslant 1$

5. (2006 • 上海)已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$ ________.

6. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，求 a 的值.

7. (2005 • 北京春招)记函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=$

$\sqrt{1-\dfrac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求：

(1) 集合 M, N;(2) 集合 $M\cap N$, $M\cup N$.

能力提高

8. (2005·杭州二模) $P=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}=(-1,1)+m(1,2), m\in\mathbf{R}\}$, $Q=\{\vec{\beta}\mid\vec{\beta}=(1,-2)+n(2,3), n\in\mathbf{R}\}$ 是两个向量集合,则 $P\cap Q=($　　$)$.

(A) $\{(1,-2)\}$　　(B) $\{(-13,-23)\}$

(C) $\{(-2,1)\}$　　(D) $\{(-23,-13)\}$

9. 设 S、T 是两个非空集合,令 $X=\{x\mid x\in T$ 且 $x\notin S\}$, $Y=\{y\mid y\in S$ 且 $y\notin T\}$, 则下列各结论中正确的是(　　).

(A) $X\cup Y=S\cup T$　　(B) $X\cap Y=S\cap T$

(C) $X\cup S=Y\cup T$　　(D) $X\cup T=Y\cup S$

10. (2005·浙江)设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$, $P=\{1,2,3,4,5\}$, $Q=\{3,4,5,6,7\}$,记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$, $\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$,则 $(\hat{P}\cap\complement_{N}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{N}\hat{P})$ 等于(　　).

(A) $\{0,3\}$　　(B) $\{1,2\}$　　(C) $\{3,4,5\}$　　(D) $\{1,2,6,7\}$

11. 已知 $M=\{f(x)\mid f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)\}$, $N=\{f(x)\mid$ 若 $x_1<x_2$, 则 $f(x_1)>f(x_2)\}$, 满足条件 $M\cap N$ 的其中一个元素是________.(只写出一个即可)

12. 是否存在实数 p, q,使得对全集 $I=\{1,2,3,4\}$ 及 $A=\{x\mid x^2-5x+p=0\}$,有 $\complement_I A=\{x\mid x^2-qx+6=0\}$ 成立,若存在,求出 p、q 的值;若不存在,请说明理由.

简 易 逻 辑

【知识梳理】

逻辑是研究思维形式及其规律的一门学科，在学习数学的过程中，全面理解概念，正确进行表述、判断和推理都离不开逻辑知识，因此它是我们认识问题、研究问题不可缺少的工具.

1. 逻辑连接词

(1) 命题　可以判断真假的语句叫做命题.

(2) 逻辑连接词　“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑连接词.

(3) 简单命题　不含逻辑连接词的命题叫做简单命题.

简单命题常用小写拉丁字母：p，q，r，s，…表示.

(4) 复合命题　由简单命题与逻辑连接词构成的命题叫做复合命题，复合命题由“p 且 q”，“p 或 q”或“非 p”构成.

(5) 判断复合命题的真假，可用下表表示.

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

2. 四种命题

(1) 四种命题

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否命题. 于是四种命题的形式为：

原命题　若 p 则 q；

逆命题　若 q 则 p；

否命题　若$\neg p$则$\neg q$；

逆否命题　若$\neg q$则$\neg p$.

(2) 四种命题的关系

① 原命题⇔逆否命题，它们的关系是相互的，且具有相同的真假性.

② 逆命题⇔否命题，它们之间也互为逆否关系，且具有相同的真假性.

③ 原命题、逆命题、否命题的真假之间无一定联系，如原命题为真，则其逆命题与否命题未必为真.

(3) 反证法

① 用反证法证明命题的一般步骤为：

a. 假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立；

b. 从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾；

c. 由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

② 可用反证法证明的几种类型：

a. 结论本身是以否定形式出现的命题；

b. 有关结论是以“至多……”或“至少……”的形式出现的命题；

c. 有关唯一性、存在性的问题；

d. 结论的反面是比原结论更具体、更容易研究的命题.

(4) 充分条件和必要条件

① 命题$A \Rightarrow B$成立，则称：

A是B的充分条件；

B是A的必要条件；

A的必要条件是B；

B的充分条件是A.

② 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，则称A是B的充分且必要条件，简称充要条件，记作$A \Leftrightarrow B$.

③ 若$A \Rightarrow B$，$B \not\Rightarrow A$，称A是B的充分而不必要条件.

④ 判断所给命题的条件是结论成立的什么条件是常见的一类题型，解决这类问题的常用方法有：

a. 定义法　判断B是A什么条件，实际上就是判断$B \Rightarrow A$或$A \Rightarrow B$是否成立，只要把题目中所给条件按逻辑关系画出箭头示意图，再利用定义即可判断.

b. 转换法　当所给命题的充要条件不易判定时，可对命题

思考：

你能指出否命题与命题的区别吗？并举例说明.

思考：

你能说出推出矛盾可能出现的几种情况吗？

思考：

“至多……”，“至少……”，“都是”的否定形式是什么？

点击：

你能说出一些与充要条件同义的词语吗？如：“当且仅当”，“必须且只需”等.