小学数学教育系列教材

小学数学研究

曾小平　曹一鸣◎主编

根据《小学教师专业标准（试行）》和《义务教育数学课程标准（2011年版）》要求编写，提升小学数学教师的学科专业知识和问题研究能力，丰富教师的学科修养。

教育科学出版社
ESPH Educational Science Publishing House

小学数学教育系列教材

小学数学研究

曾小平　曹一鸣　◎　主编

根据《小学教师专业标准（试行）》和《义务教育数学课程标准（2011年版）》要求编写，提升小学数学教师的学科专业知识和问题研究能力，丰富教师的学科修养。

教

出 版 人　所广一
责任编辑　殷　欢
版式设计　博祥图文　杨玲玲
责任校对　贾静芳
责任印制　曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

小学数学研究/曾小平,曹一鸣主编. —北京:
教育科学出版社,2013.12
小学数学教育系列教材
ISBN 978-7-5041-7944-9

Ⅰ.①小… Ⅱ.①曾… ②曹… Ⅲ.①小学数学课—
教学研究 Ⅳ.①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 177306 号

小学数学教育系列教材
小学数学研究
XIAOXUE SHUXUE YANJIU

出版发行	教育科学出版社		
社　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	市场部电话	010-64989009
邮　编	100101	编辑部电话	010-64981269
传　真	010-64891796	网　址	http://www.esph.com.cn
经　销	各地新华书店		
制　作	北京博祥图文设计中心		
印　刷	保定市中画美凯印刷有限公司		
开　本	169 毫米×239 毫米　16 开	版　次	2013 年 12 月第 1 版
印　张	16.5	印　次	2013 年 12 月第 1 次印刷
字　数	296 千	定　价	28.00 元

前　言

数学教学是数学思维活动的教学，其主要目的是传授数学基础知识和传播数学思想方法，启迪学生的思维，增长学生的智慧。因此，数学教师必须掌握数学的知识技能和思想方法，理解数学的教育价值，并将它们融入数学教学中，如此数学教学才能取得实效。对数学课堂教学的研究表明，如果教师不懂得数学、不了解儿童数学学习的规律，课堂上会出现科学性错误，常常造成学生不能科学地理解数学，导致数学教学的低效甚至负效。

在一次主题为“角的认识”公开课上，学生在学习角的概念之后，知道了“角是由两条有公共端点的射线组成的图形”。在进行课堂练习时，教师出示了三角形，问学生：“三角形中有几个角？”学生回答：“三角形中没有角。”教师吃惊地问：“为什么三角形中没有角呢？”学生回答：“课本上说，角是由两条有公共端点的射线组成的图形。三角形中没有射线，因此没有角。”教师恍然大悟，说道：“同学们说得很有道理，三角形中没有角。”可是在场的众多听课教师纳了闷，三角形中没有角，为什么还叫三角形呢？到底什么是角，如何定义“角”才更科学呢？

在小学教学中，类似的疑难问题还很多。比如，0 为什么不能做除数？四则混合运算中，为何“先算乘除，后算加减”？交换律、结合律、分配律为什么是正确的呢？乘法是加法的简便运算吗？为什么被 3 整除的数的各数位上的数之和是3 的倍数？最大公约数与最小公倍数有什么用？它们有联系吗？为什么 1 既不是质数又不是合数？百分数与分数有什么区别？小数都可以化成分数吗？哪些分数可以化成有限小数？

再如，为什么三角形的内角和是 180°？为什么三角形两边之和大于第三边？周长相等的图形中，为什么圆的面积最大？为什么正方形是特殊的长方形？平均数与平均分有什么联系与区别？面对一个统计问题，平均数、众数、中位数

该用哪一个统计量？小学统计的特点是什么？小学数学中有哪些基本的数学思想？这些基本数学思想体现在哪些地方？

这些都是小学数学课堂教学中经常遇到的问题，有些甚至是学生提出的问题。这些疑难性问题不可回避，常常让很多教师感到困惑。小学数学并不像我们想象的那么简单，它是整个数学的基础，蕴藏了丰富的数学思想，有的内容还具有高等数学的背景。要想成为一名合格的小学数学教师，要想在课堂上不出现科学性错误，要想实现高效率的数学教学，教师一定要理解小学数学的知识技能与思想方法，并了解相关的背景知识。

2012 年 2 月，中华人民共和国教育部颁布了《小学教师专业标准（试行)》，规定了小学教师应当具备学科教学的专业知识，特别指出教师要“掌握所教学科知识体系、基本思想与方法”。对于小学数学教师，必须掌握小学数学的知识体系与基本思想方法，同时还要了解与之相关的背景知识。为了提升小学教师的数学学科素养，我们将小学数学的基础知识与思想方法，连同相关的背景内容，进行全面整理与系统梳理，编写成《小学数学研究》一书。

本书在编写时，力求突出以下特色。

内容丰富、体系完备。

本书将小学数学中涉及的知识内容与思想方法进行全面整理，按照“自然数与整数”“整数的性质”“分数与小数”“比例与方程”“图形与几何”“统计与概率”和“数学基本思想”七个模块，对这些核心内容进行深刻的讲解，并对相关的背景内容做了拓展延伸性的阐述。同时，本书设置了“情境引入”“教学链接”“拓展阅读”和“电子图书馆”等小栏目，分别介绍相应知识的教学困惑、教学建议、背景资料和拓展阅读文献。

科学严谨、深入浅出。

小学数学看似简单，实则深奥，有很多地方蕴含了高等数学的基础知识，有的地方也存在科学性和争议性的问题。本书将小学数学的基础知识与思想方法连同相关的背景知识进行系统整理，构建成系统的结构体系，进行了科学严谨的阐述。同时，对一些深奥的内容和疑难问题，结合实例进行了深入浅出的阐述，尤其在“教学链接”栏目中进行了比较通俗的解释，并给出了有效的教学建议。

继承创新、与时俱进。

秉持“继承和创新”的学术态度，本书认真吸取以往教材和众多师范院校相应课程教学的成功经验，精选教材内容，构建符合逻辑的知识体系。本书遵

照《国家中长期教育改革与发展规划纲要（2010—2020年）》《小学教师专业标准（试行）》《义务教育数学课程标准（2011年版）》等文件对小学数学教学的要求，结合现阶段小学教师教育的实际情况，立足丰富未来小学教师数学知识和提高教师数学素养为基本目标进行编写。

实用性强、易教易学。

本书力求体现小学数学课程与教学的前瞻性，突出实践性，充实提高小学教师的数学基础理论素养，适应教学改革与发展的要求。读者仔细阅读本书，既可以提高数学素养与教学修养，又能解决小学数学教学中遇到的疑难问题，还能澄清当前一些流行的不科学的观点。同时，本书的编写既考虑到数学知识与思想的自身逻辑结构，又考虑到读者阅读与学习的心理结构，便于教师教学和读者阅读学习与参考。

本书由曾小平（首都师范大学）和曹一鸣（北京师范大学）提出整体构想，经过全体编写人员反复研讨修改，最终形成本书的结构框架。各章编写的具体分工如下：第1章，由曾小平和韩龙淑（太原师范学院）共同撰写；第2章，由徐东星（荆楚理工学院）和赵洁（首都师范大学）共同撰写；第3章，由沈利玲（集宁师范学院）、戎松魁（杭州师范大学）、刘小辉（集美大学）和罗玉华（江苏第二师范学院）共同撰写；第4章，由肖栋坡（长沙师范学院）和徐东星共同撰写；第5章，由曾小平、张国文（集宁师范学院）和秦华（天津师范大学）共同撰写；第6章，由曹一鸣、杨伟平（兴义民族师范学院）、陈亚萍（黔南民族师范学院）和杨凡（北京师范大学）共同撰写；第7章，由曹一鸣、曾小平和王冬雪（北京市汇文第一小学）共同撰写。

本书初稿完成之后，戎松魁老师进行了全面仔细的阅读，提出了许多宝贵的修改意见。本书初稿在首都师范大学初等教育学院“小学教育”专业2010和2011级进行了教学实验，刘效丽和刘长红两位老师阅读了本书第1、3、5章，提出了不少宝贵的修改意见。本书修改稿完成后，副主编徐东星、沈利玲、赵洁进行了全面阅读和修改，并在首都师范大学初等教育学院“小学教育”专业2012级进行了教学实验。最后，经过曾小平和曹一鸣两位主编讨论和修改，形成最终文稿。

本书的编写得到了南京师范大学涂荣豹教授、贵州师范大学吕传汉教授和汪秉彝教授、首都师范大学王智秋教授的关心和支持。此外，很多小学教师从教学一线收集和整理了一系列生动的教学案例，为本书的丰富和完善提供了宝贵的资料。在此，我们特向为本书付出艰辛劳动和关心本书编写与出版的各界

人士表示衷心感谢。

本书既可以作为高等师范院校“小学教育”或者“数学与应用数学”（师范）专业教材，又可以作为小学骨干教师在职培训的教材。同时，对于其他小学教师、教育工作者、教育管理者和小学生家长，本书也是非常不错的参考资料。为此，本书编者还精心为广大一线教师提供了服务于本书的教学资源库，有需要的读者可以致电编辑部（010－64981269）或者发送电子邮件至172531608@qq.com。

我们希望，读者认真阅读本书之后，能站在比较高的角度审视小学数学的基础内容，能够提高自身的数学修养，能够增强对小学数学课程与教材的认识。这对科学合理地设计与实施有效的小学数学教学，必将起到非常积极的促进作用。虽然我们本着高度负责的态度编写本书，但由于时间、精力、能力等诸多因素的限制，疏忽和不足之处在所难免。恳请各位读者对本书提出宝贵建议，便于我们及时修改，更好地服务于广大的师生。

编　者

目录

第1章　自然数与整数

◉情境引入

在“乘法分配律”的新授课上，教师让学生从一个等式 $(4+2)\times 25=4\times 25+2\times 25$ 出发，得到“两个数的和与一个数相乘，可以先把它们与这个数分别相乘，再把乘积相加”，并把这个规律叫作乘法分配律。这时有学生问道：“老师，我们仅从一个算式出发，就得到了乘法分配律，乘法分配律正确吗？怎么能说明它一定正确呢?”

面对突如其来的问题，授课教师愣住了，不知道如何解决。学生的疑问很有道理，用不完全归纳法得到的结论不一定是正确的。怎么能说明乘法分配律是正确的呢？也就是说，在小学阶段怎么证明乘法分配律呢？乘法分配律的价值到底在哪里？小学数学中哪些地方会用到它？

类似的问题还有很多。加、减、乘、除的具体含义是什么？负整数是怎么来的？自然数是怎么扩充到整数的？本章先讲述自然数的含义与运算，介绍计数方法与读数方法、四则运算的含义与运算律。然后，展开对负整数本质、整数意义与运算等问题的讨论与研究。相信读者在认真阅读本章以后，对上述问题会得到一个比较满意的回答。

1.1 自然数的含义

◉**学习目标**

1. 了解自然数的产生过程，理解自然数的基数理论与序数理论；
2. 理解十进制计数法，并能准确利用十进制计数法进行计数和读数；
3. 了解十进制计数法的发展过程和 k 进制计数法的计数原理。

1.1.1 自然数的产生

许多动物都具有分辨多与少的本能。一只老虎面对一匹狼和一群狼的反应是不一样的；一只野狗和一群野狗面对一根骨头的反应也是不一样的。人类同其他许多动物一样，在蒙昧时代就具有辨别事物多少的能力。这就是原始的“数感”，后来逐渐发展成数概念。

拓展阅读 鸽子的数感①

据合众国际社报道，近日新西兰奥塔哥大学的科学家称，鸽子在数感方面的能力完全可以与灵长类动物相媲美，它们能将杂乱无章的数字有序化。

研究发现，鸽子可以成功地将 9 幅图像数字由小到大进行排列，而到目前为止，只有人类与猩猩等灵长类动物才具备这种抽象思维能力。

首席专家达米·斯考夫（Damian Scarf）称：“人类计数经历了一个长期进化的过程，而动物的大脑结构与人类完全不相同，鸽子能够掌握数理能力的机理还有待进一步研究。”

数的产生源于人类社会生产生活实践的需要。远古人类在狩猎、采集等社会生活中就注意到一只羊与一群羊、一个果子与一堆果子的区别，通过比较，逐渐意识到一只羊、一个山果、一棵树等之间存在着共同的数量属性，这就是单位性，它构成了数量的基本单位。

同样，人类会注意到一双手、一对小鸟、两条鱼、两个石子等之间可以一一对应，且由两个基本单位构成，即存在数量上的共同属性。以此类推，逐渐

① http：//www. epchina. com/2011/1226/28817.

抽象出事物的这一数量属性，人们便形成了数概念。当数概念越来越清晰时，人们便用语言、符号表示这些结果，即记数。

数的原始本质在于表达多与少①。早期的数是自然数，它通常表示自然界中物体的个数，是“数数（shǔshù）”数出来的。所谓数数，是指通过某种方式或途径计算详细的数目，通常采用扳手指、嘴巴念叨或心里默念等方式，是较普通的一种数学行为。

数数具有三个特点：

①结果唯一性，数事物的多少时，只要每个事物都数到，并且只数一次，那么数的结果总是唯一的。

②可替代性，数事物时，可以用其他事物代替要数的事物，然后再进行数数，数的结果不变。

③后续性，数数的时候，总是加一加一地数，后面一个数比前一个数大一，数出的最后一个数，就是数出的结果。但是数的过程是无限的，如果再有要数的事物，还可以不断地数下去。也就是说，要数的事物可以无限地数下去。因此，自然数有无限多个。

由数数产生的自然数，是人们日常生活中使用最多的数。它既可以清点物体数目，也可以编排物体的顺序。因此，自然数有两重属性。

基数属性，表示一个集合一共有几个元素，即表示元素的总个数。比如，用 3 表示集合 $\{a, b, c\}$ 有 3 个元素。

序数属性，表示某个元素的顺序，在第几个的位置上。比如，2011 年 TIMSS 数学教育评价优秀率前 5 名的国家和地区是：新加坡（43%）、韩国（39%）、中国香港（37%）、中国台湾（34%）、日本（30%）。那么中国香港的优秀率名列第 3 名。这里的“3”就是序数。

这两个属性彼此沟通，反映了离散事物的记数特征。

概念辨析 “数”与“数字”

数，是表示物体数量大小多少和先后顺序与序列的符号。数是一个用作计数、标记或量度的抽象概念，是比较同质或同属性事物的等级的简单符号记录形式（或称度量）。在日常生活中，数通常出现在标记（如公路、电话和门牌号码）、序列的指标（序列号）和国际标准书号（ISBN）上。在数学里，数的定

① 史宁中教授说，“数量的本质应当是多与少”。参见：史宁中．数学思想概论（第 1 辑）——数量与数量关系的抽象［M］．长春：东北师范大学出版社，2008.

义延伸至包含如分数、负数、无理数、超越数及复数等抽象化的概念。

数字，是一种用来表示数的书写符号或者文字，代表数的一系列符号。数字、运算符号等统称为记数系统。不同的记数系统可以使用相同的数字。比如，十进制和二进制都会用到数字“0”和“1”。同一个数在不同的记数系统中有不同的表示。比如，数 37（阿拉伯数字十进制）可以有多种写法：中文数字写作三十七，罗马数字写作 XXXⅦ，阿拉伯数字二进制写作 100101。

1.1.2 自然数的基数理论

自然数的基数定义是建立在集合论的基础之上的。集合论的创始人格奥尔康·康托（1845—1918）指出：如果一个集合能够和它的真子集建立等价关系，那么这个集合就是无限集。

比如，实数集 **R** 和其真子集（−1，+1）可以建立“一一对应”的关系

$$(-1,\ +1)\ \underset{g=\frac{2}{\pi}\arctan x}{\overset{f=\tan\frac{\pi x}{2}}{\rightleftharpoons}}\ \mathbf{R}$$，所以实数集 **R** 是无限集。

反之，不能与其任意真子集建立“一一对应”关系的集合就是有限集。比如，{甲，乙，丙，丁}、{△，□，○} 等就是有限集。

表示集合中元素个数的数叫作基数。有限集合的基数叫作自然数。比如，$M=\{a,\ b,\ c\}$ 是一个集合，凡是能和 M 构成一一对应的集合，如 $N=\{1,\ 2,\ 3\}$、3 个人组成的集合、3 只羊构成的集合，都认为它们是等价的一类。它们具有相同的基数（即元素个数相同），我们用自然数 3 表示这个基数。以此类推，集合 $P=\{a\}$ 的基数是 1，集合 $Q=\{a,\ b\}$ 的基数是 2，空集 $\phi=\{\}$ 的基数是 0。

拓展阅读 自然数体系

著名数学家、计算机之父约翰·冯·诺依曼（John Von Neumann，1903—1957）曾经用集合语言简约、清晰地构造出自然数体系。具体步骤如下：

第一个是空集 ϕ（表示 0）；

第二个是以空集为元素的集合 $\{\{\}\}$，即 $\{0\}$（表示 1）；

第三个是以 ϕ 和 $\{\{\}\}$ 为元素的集合 $\{\phi,\ \{\{\}\}\}$，即 $\{0,\ 1\}$（表示 2）；

第四个是以前三个集合为元素的集合 $\{\phi,\ \{\{\}\},\ \{\phi,\ \{\{\}\}\}\}$，即 $\{0,\ 1,\ 2\}$

（表示3）；

……

第 n 个集合是以前 $n-1$ 个集合为元素的集合，即 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n-1\}$（表示 n）。

如何比较自然数 a 与 b 的大小呢？根据自然数的基数理论，设 a 与 b 分别是集合 A 与 B 的基数，如果 A 与 B 能够建立一一对应关系，那么 $a=b$；如果 A 与 B 的真子集能够建立一一对应关系，那么 $a<b$；如果 A 的真子集与 B 能够建立一一对应关系，那么 $a>b$。

1.1.3　自然数的序数理论

1889年，意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932）在《算术原理新方法》中用公理化的方法从顺序的角度揭示了自然数的意义，被称为自然数的序数理论，或称为自然数的皮亚诺公理①。

如果一个集合 N 的元素间有一个基本的关系——后继（用 $^+$ 表示），并满足下列四条公理：

（1）$1\in\mathbf{N}$，对任意 $a\in\mathbf{N}$，$a^+\neq 1$；

（2）任何 $a\in\mathbf{N}$，有唯一的后继 a^+（即 $a=b\Rightarrow a^+=b^+$）；

（3）除1以外的任何元素，只能是一个元素的后继（$a^+=b^+\Rightarrow a=b$）；

（4）若 $M\subseteq N$，且①$1\in M$，②$a\in M\Rightarrow a^+\in M$，那么 $M=N$。

那么集合 N 的元素，就叫作自然数②。

皮亚诺公理完整地刻画了自然数序列：

（1）说明了1是第一个自然数；

（2）说明了任何一个自然数的后继唯一确定，即 $1^+=2$，$2^+=3$，……；

（3）说明了后继唯一确定前一个数，自然数中没有两个相等的数，比如，……，5是4的后继，4是3的后继，3是2的后继，2是1的后继；

（4）说明了自然数的个数是无限多，自然数的集合是无限集。皮亚诺公理

---

① 按照皮亚诺最初的记法，自然数从1开始，不包含0。如果认为0是第一个自然数，需要把公理系统中的1换成0。

② 看到自然数的皮亚诺公理，不禁想起课文《愚公移山》中的一段话，“北山愚公长息曰：汝心之固，固不可彻，曾不若孀妻弱子。虽我之死，有子存焉；子又生孙，孙又生子；子又有子，子又有孙；子子孙孙无穷匮也”，它也蕴含了这种思想。

又被称为归纳公理，是数学归纳法的基础。

例 1 用数学归纳法证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$（其中，$n\geq 1$）。

证明 当 $n=1$ 时，$1^2=1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$，说明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

假设当 $n=k$（$k\geq 1$）时，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立，有 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$。

当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)}{6}[6(k+1)]\\
&=\frac{(k+1)}{6}(2k^2+k+6k+6)\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$

由此可知，当 $n=k+1$ 时，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

综合上述，对于一切 $n\geq 1$ 的自然数，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

根据皮亚诺公理，我们容易发现：自然数的本质是对单位 1 作后继运算的复合，即 1 是构成自然数的单位，前一个数作一次后继得到后一个数。由此决定了自然数的特征：后面一个数比前一个数大 1；前一个数比后一个数小 1。

以皮亚诺公理为基础，可以对自然数的加法进行归纳定义：（1）设 $a\in\mathbf{N}$，则 $a+1=a^+$；（2）设 a、$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b^+=(a+b)^+$。其中 a 和 b 叫作加数，$a+b$ 叫作它们的和。

例 2 计算 $3+8$。

解 先求 $3+1$，易知 $3+1=3^+=4$；

再求 $3+2$，$3+2=3+1^+=(3+1)^+=4^+=5$；

再求 $3+3$，$3+3=3+2^{+}=(3+2)^{+}=5^{+}=6$；

再求 $3+4$，$3+4=3+3^{+}=(3+3)^{+}=6^{+}=7$；

……

最后求 $3+8$，$3+8=3+7^{+}=(3+7)^{+}=10^{+}=11$。

以皮亚诺公理为基础，可以对自然数的乘法进行归纳定义：（1）设 $a\in\mathbf{N}$，则 $a\times 1=a$；（2）设 a、$b\in\mathbf{N}$，则 $a\times b^{+}=a\times b+a$。其中 a 叫作被乘数，b 叫作乘数，$a\times b$（或记作 $a\cdot b$、ab）叫作它们的积。

例3　计算 3×8。

解　先求 3×1，易知 $3\times 1=3$；

再求 3×2，$3\times 2=3\times 1^{+}=3\times 1+3=3+3=6$；

再求 3×3，$3\times 3=3\times 2^{+}=3\times 2+3=6+3=9$；

……

最后求 3×8，$3\times 8=3\times 7^{+}=3\times 7+3=21+3=24$。

从上述归纳定义和例子我们可以发现：自然数加法的本质就是数数，$a+b$ 就是在 a 的后面连续数 b 个数，最后那个数就是 $a+b$ 的和；自然数乘法的本质就是连加，$a\times b$ 就是将被乘数 a 连加 b 次，最后的结果就是 $a\times b$ 的积。

在序数理论下，如何定义自然数的大小呢？皮亚诺公理中的后继关系，指明了相邻自然数的大小关系。根据自然数的加法，可以定义任意两个自然数的大小关系。如果 a、$b\in\mathbf{N}$，存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $a+k=b$，那么称 a 小于 b，记作 $a<b$，也称 b 大于 a，记作 $b>a$。

1.1.4　计数与读数

1. 计数

记数的发展也经历了由繁到简的漫长历史过程，经历了手指记数、石子记数、结绳记数等实物记数阶段，逐渐过渡到符号记数阶段。迄今发现最早的刻痕记数，是3万多年前的狼骨刻痕。到了迄今五千多年前，用书写专用符号来表示数字，就是人类社会早期的正式记数。

但是，早期的记数方式是用一个符号表示一个数，要表示很多数就需要很多符号，使用起来不太方便。后来，人们便用有限的符号，按照一定顺序加上排列规则来表述很多的数，这就是计数（注意：计数与记数是两个不同概念）。计数的方法很多，目前常用的有十进制计数法和六十进制计数法等。下面，我们来看看十进制计数法的发展过程。

第一阶段，创造数字符号，即每个数字对应一个符号。比如，公元前 2400 年左右的巴比伦楔形数字，对 1～12 的每个数字都对应有一个符号；古代罗马就采用 I、V、X、L、C、D、M 分别代表 1、5、10、50、100、500、1000。从理论上讲，这些数字符号所代表的计数单位是一，只能用有限的一些符号表示有限的数。

教学链接 | 1～10 的教学

小学生最早接触的数是自然数，是通过数物体个数，逐渐认识 1，2，3，…，10，具体形象地理解自然数的意义、自然数的顺序和大小。进入小学前，儿童已经有“口头数数”“按物点数”和“数后说总数”的经验，具有初步的数概念。小学阶段的认识数教学主要集中在以下几个方面。

建立实物和点子图的对应，经历“实物→点子图→数”三个基本阶段，明确计数的结果是表示一组物体的总数，而不是最后一个物体。

把每个数字的音、形、义统一起来，掌握每个数的实际意义，并能正确分辨每一个数。

在计数时，能顺着数，也能倒着数，掌握数的顺序，知道后一个数比前一个数多一，前一个数比后一个数少一。

知道每一个数的组成，即每一个数中含有多少个一。比如 5 的组成，可通过小棒等实物，对 5 进行不同的分解，得到“5 由 1 和 4 组成的，5 由 2 和 3 组成的”等结论。

正确书写数字，掌握字形和书写笔顺笔画。通常可以借助儿歌帮助儿童记忆数字，“1 像铅笔能写字，2 像鸭子水中游，3 像耳朵能听话，4 像小旗迎风飘，5 像钩子能钩物，6 像哨子嘟嘟响，7 像镰刀割青草，8 像葫芦空中摇，9 像勺子盛稀饭”。

第二阶段，建立进位规则，即重复使用有限的几个数字符号按一定规则进行组合表示大量数字。比如，古埃及用 | 表示 1、∩表示 10、用∩∩∩||表示 32。公元前 1600 年左右，我国的甲骨文中就有专用的符号表示“一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千”等数字，并用这些符号进行组合表示其他的数。这种计数系统的进率为十，这就是早期的“十进制计数法”。

这一阶段的计数方法，蕴含了初步的进位思想，其计数单位既有一，又有确定的数（比如五、十、十二、二十、百等），并涉及简单加减来确定数。在这一阶段，古罗马人用 I、V、X、L、C、D、M 七个数字符号按照下列规律组合起