复分析及其在数值数学中的应用

●匡蛟勋 田红炯 著

科学出版社

复分析及其在数值数学中的应用

匡蛟勋　田红炯　著

科 学 出 版 社

北 京

前　　言

复分析或复变函数以复变量函数为研究对象, 它是一门古老的学科. 1545 年, 就已经在卡登 (H. Cardan, 1501—1576) 的文章中出现虚数, 他将 40 分解为两个共轭复数的乘积, 即 $40 = (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})$. 沃利斯 (J.Wallis, 1616—1703) 第一个将复数 $a+b\mathrm{i}$ 用笛卡儿坐标平面上的点 $a+b\mathrm{i}$ 来表示, 其后又有很多人独立完善了 Wallis 的表示方法. 1831 年高斯 (G.F.Gauss, 1777—1855) 和 1837 年哈密顿 (W.R.Hamilton, 1805—1865) 定义复数 $a+b\mathrm{i}$ 为一对实数 (a,b). 因此复数可以用一对实数来处理算术运算, 复数理论转变为一对实数的理论. 到目前为止, 许多教科书中仍采用这样的办法来引进复数的概念及运算法则.

最早, 人们将复变函数以 $W=f(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)$ 来研究, 其中 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 为两个实变量函数. 这样定义的复函数的范围较广, 后来人们将注意力集中于解析函数, 柯西 (A.L.Cauchy, 1789—1857) 将一个复变函数 $f(z)$ 视作复数 z 的一元函数来研究, 1814 年他定义的正则函数 (解析函数) 要求 $f(z)$ 的导数存在且连续. 经过 86 年, 才由古尔萨 (E.Goursat, 1858—1936) 免去了导数必须连续的条件. 但是, Cauchy 在复变函数论中的作用无人可以替代. 尽管 Cauchy-Riemann 方程早在 1746 年就已出现, 但是由于 Cauchy 在复积分方面的贡献及其他系统的理论, 人们还是认为他是复分析的创始人. 另外必须提及的人是黎曼 (B.Riemann, 1826—1866), 他的工作不仅仅是对 Cauchy 工作的完善, 而且提出复变函数的几何理论. 他提出的 Riemann 曲面的模型不仅对多值函数的研究起了极大的作用, 代数函数及模函数理论也得以建立. 魏尔斯特拉斯 (K.Weierstrass) 放弃了 Cauchy 理论中依赖几何直观的问题, 他的工具多数依赖于幂级数, 他将多项式的乘积表达式推广到将整函数表示为无穷乘积, 将有理函数的部分分式表示推广到半纯函数的部分分式分解定理.

复分析古老且完善, 它在各门学科中的应用越来越广泛及深入, 有些问题已是非它无解. 在历史上, 微分方程理论与复分析起到互相依赖、互相促进的作用; 近代泛函分析中的算子理论是不能离开复分析的, 有些理论完全建立在复分析的理论基础上, 近几年, 泛函微分方程的研究中, 有些问题的解决, 要绕过复分析是不可能的. 线性常微分系统的特征方程虽然简单, 但是一到所谓延时微分系统或中立型系统, 其稳定性研究涉及一个特殊的整函数 (非多项式) 的零点分布, 要绕过复分析的理论是无法解决的. 复分析在物理学、力学、电磁学中的应用由来已久. 近几年蓬勃发展的计算数学中的许多分支必然不可能脱离复分析而获得较好的结果, 如代数

特征值问题, 归根究底, 特征值是一个代数函数, 如果矩阵的元素是解析函数, 那么特征值的扰动仅是多值函数的解析扰动. 再如, 许多数值方法的收敛性及稳定性研究, 特别是数值微分方程, 要绕过复分析是困难的, 而且有自找烦恼之嫌. 本书中的许多章节收集了大量复分析用于微分方程理论及数值方法分析成功的例子, 也印证了使用复分析解决问题的好处.

本书共分 15 章. 第 1、第 2 章为准备知识, 第 1 章中引入无穷远点, 建立 Riemann 球面上的点的坐标与复平面上点的坐标之间的解析表达式, 提高读者对复平面的几何直观的理解; 第 3 章 (解析函数) 是复分析的出发点, 重点解释什么是解析函数; 第 4 章 (初等函数) 将实分析中常见的初等函数推广到复变量函数, 通过此章可以加深对解析函数概念的理解及为今后的理论研究提供众多的例子; 第 5 章 (复积分) 是本书的基础, 也是重点, 没有复积分, 后面的章节难以继续; 第 6 章为矩阵函数及其应用, 实际内容为矩阵论中的一个分支, 即矩阵分析, 我们仅用已学过的复积分等知识, 介绍矩阵分析中许多重要而且有些是近代的结果; 第 7 章 (保角映射) 是研究解析函数的几何面貌的章节, 在本章中也引入保角映射的某些应用; 第 8 章 (函数项级数、函数的展开) 的主要内容为解析函数的 Taylor 展开与 Laurent 展开, 这两个展开为研究解析函数的有力工具, 它可与复积分并列, 利用这章前后的知识, 介绍如何用复分析的工具来研究解常微分方程初值问题的单步法与多步法的稳定性理论; 第 9 章为复函数奇点的分类; 第 10 章 (残数及其应用) 介绍用残数求定积分的知识, 用辐角原理、Rouché 定理研究滞后差分方程的稳定性及一类特征函数的零点分布; 第 11 章 (整函数及半纯函数) 是将多项式的因式分解与有理函数的部分分式理论推广到整函数与半纯函数的无穷乘积与部分分式表达理论; 第 12、第 13 章是密切联系的, 第 12 章介绍解析开拓的理论与技巧, 为第 13 章 (多值函数) 作准备, 我们以解析开拓为工具来研究多值函数, 对代数函数也作了系统的介绍; 第 14、第 15 章都是应用, 第 14 章介绍一类非常广泛的特征函数零点分布的最新研究成果, 主要工具为代数函数理论与 Picard 定理等; 而第 15 章为介绍数值方法的所谓 L 型稳定性, 其主要工具是多值函数与代数函数理论. 最后的附录为多复变函数论初步, 对需要用到多复变函数论知识的读者是有益的, 因为此附录除了本身的实用价值外, 也为读者进一步阅读该课程打下了初步的基础.

作者希望读者通过对本书的阅读, 能够对解析函数、围道积分、保角映射、幂级数、Taylor 与 Laurent 展开、零点理论、最大模原理、残数理论、辐角原理、整函数与半纯函数、解析开拓与多值函数、代数函数理论等主要内容有深刻的理解, 并能将已学到的知识灵活应用到自己所研究的学科中去. 对于应用数学及计算数学专业的读者, 书中所列出的应用内容如 8.10 节、8.11 节、9.8 节、10.6 节、10.7 节、第 6 章、第 14 章、第 15 章应能细致阅读, 以便起到举一反三之作用.

阅读本书仅需要有高等数学分析、线性代数、常微分方程理论初步、数值分析

初步等知识. 本书列有大量例题以帮助读者理解正文及顺利地完成每章后由教师布置的习题, 这些习题有些是正文的补充, 有些是为了便于读者进一步理解正文内容而设置的. 本书内容大约可以用每周四节课, 一学期教学完成.

本书编写过程曾得到刘倩倩、张平硕士和喻全红博士的有力帮助, 作者在此表示真诚的感谢! 另外, 本书的出版曾获得上海市自然科学基金 (No.09ZR1423200) 和国家自然科学基金 (No.11071170) 的大力资助, 作者同样表示衷心的感谢!

作 者

2011 年春于上海

目　　录

第 1 章　复数回顾

1.1　复　　数

在微积分学中, 我们已经熟悉了实数的许多性质及运算法则. 19 世纪 40 年代, 数学家哈密顿 (Hamilton) 建立了复数的理论基础, 以后由它引出的复分析, 或者复变函数论, 不管在数学科学本身或者在各种各样的应用科学中都起着十分重要的作用.

所谓复数是由一对实数 a, b 以及虚数 i 结合而成的数, 一般记为 $a+b\mathrm{i}$, 这里的 i 是方程 $x^2+1=0$ 的一个根, 它满足一个基本性质, 即 $\mathrm{i}^2=-1$, 所以记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

对于上面规定的复数, 当我们建立其四则运算法则时必须与实数的运算法则相容, 亦即几个复数的运算结果, 当复数蜕化为实数时其结果两者必须一致. 设 $A=a+b\mathrm{i}$ 是一个复数, 其中 a, b 为实数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 那么我们称 a 为 A 的**实部**, b 为 A 的**虚部**, 分别记为 $a=\mathrm{Re}(A)$ 及 $b=\mathrm{Im}(A)$. 当 $a=b=0$ 时, 称 A 为零, 记为 $A=0$.

1.2　复数的算术运算

令 $A=a+b\mathrm{i}$, $B=c+d\mathrm{i}$, 这里 a, b, c 和 d 为实数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. A 与 B 的和记为 $A+B$, 它们的定义为

$$A+B=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}. \tag{1.1}$$

这样定义的加法满足**交换律**和**结合律**, 即假若 A, B 和 C 为复数, 那么 $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$. 类似地, 两个复数的减法定义为

$$A-B=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}. \tag{1.2}$$

两个复数 A 与 B 的乘法定义为

$$AB=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}. \tag{1.3}$$

显然这样定义乘法满足**交换律**、**结合律**与**分配律**, 即

$$AB=BA, \quad (AB)C=A(BC), \quad A(B+C)=AB+AC.$$

如果 $A \neq 0$, 我们定义 B 除以 A 的商为

$$\frac{B}{A}=\frac{c+d\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=\frac{ac+bd+(ad-bc)\mathrm{i}}{a^2+b^2}. \tag{1.4}$$

1.3　共轭复数　复数的模

设 $A=a+b\mathrm{i}$, 我们定义 A 的**共轭复数**为 $a-b\mathrm{i}$, 记为 $\overline{A}=a-b\mathrm{i}$, 显然 $\overline{A}$ 的共轭复数为 A, 即 $A=\overline{\overline{A}}$. 另外 $A=\overline{A}$ 的充分必要条件为 A 为实数. 设 $A=a+b\mathrm{i}$, $B=c+d\mathrm{i}$, 则

$$\overline{A+B}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}=a-b\mathrm{i}+c-d\mathrm{i}=\overline{A}+\overline{B}, \tag{1.5}$$

$$\overline{AB}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=\overline{A}\,\overline{B}. \tag{1.6}$$

设 $A \neq 0, AC=B$, 则 $\overline{A}\,\overline{C}=\overline{B}$, 使得

$$\overline{\left(\frac{B}{A}\right)}=\frac{\overline{B}}{\overline{A}}. \tag{1.7}$$

从 (1.5)~(1.7) 式不难推出若 $R(A,B,C,\cdots)$ 表示对复数 $A,B,C,\cdots$ 的四则运算的结果, 则

$$\overline{R(A,B,C,\cdots)}=R(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\cdots).$$

例如, 若 ξ 是复系数多项式

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=p(z) \tag{1.8}$$

的零点, 即 $p(\xi)$=0, 那么 $\overline{\xi}$ 是多项式

$$\overline{a_0}+\overline{a_1}z+\overline{a_2}z^2+\cdots+\overline{a_n}z^n=\overline{p}(z)$$

的零点, 即 $\overline{p}(\overline{\xi})=0$. 特别地, 假使 (1.8) 式中的系数 $a_j(j=0,1,2,\cdots,n)$ 为实数, 则 ξ 与 $\overline{\xi}$ 都是 $p(z)$ 的零点, 即实系数多项式的复数零点必共轭出现.

容易看出, 若 $A=a+b\mathrm{i}$, 则 $A\overline{A}=a^2+b^2$, 我们定义复数 A 的**模**为

$$|A|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

从而

$$A\overline{A}=|A|^2. \tag{1.9}$$

从 (1.9) 式得

$$|AB|^2=(AB)(\overline{AB})=(A\overline{A})(B\overline{B})=|A|^2\,|B|^2. \tag{1.10}$$

从而

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

设 $A \neq 0, AC = B, C = \dfrac{B}{A}$, 从 (1.10) 式可得

$$|A|\,|C| = |B|, \quad |C| = \left|\frac{B}{A}\right|,$$

从而

$$\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{|B|}{|A|}.$$

设 A, B 为两个复数, 则

$$\begin{aligned} |A+B|^2 &= (A+B)(\overline{A}+\overline{B}) = A\overline{A} + B\overline{B} + A\overline{B} + B\overline{A} \\ &= |A|^2 + |B|^2 + 2\mathrm{Re}(A\overline{B}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

同样,

$$|A-B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2\mathrm{Re}(A\overline{B}). \tag{1.12}$$

(1.11) 与 (1.12) 相加得如下**平行四边形法则**:

$$|A+B|^2 + |A-B|^2 = 2(|A|^2 + |B|^2). \tag{1.13}$$

设 A, B 为两个复数, 我们只能判断它们是否相等, 却无法比较大小, 也就是说, 复数的全体所形成的集合中, 对大小关系来说是**无序的**, 但它们的模是可以比较大小的. 因之, 模的概念在复分析中起着重要的作用.

由模的定义知

$$\begin{aligned} -|A| \leqslant \mathrm{Re}(A) \leqslant |A|, \\ -|A| \leqslant \mathrm{Im}(A) \leqslant |A|, \end{aligned} \tag{1.14}$$

将 (1.14) 式代入 (1.11) 式得

$$|A+B|^2 \leqslant |A|^2 + |B|^2 + 2|A| \cdot |B|,$$

即

$$|A+B|^2 \leqslant (|A| + |B|)^2,$$

或

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|. \tag{1.15}$$

使用 (1.15) 式 (称为**三角不等式**) 得

$$|A| = |(A-B)+B| \leqslant |A-B| + |B|.$$

即得

$$|A| - |B| \leqslant |A - B|.$$

同理

$$|B| - |A| \leqslant |A - B|.$$

由上面两式推出

$$||A| - |B|| \leqslant |A - B|.$$

综合上面关于模的结果有, 令 $\mathbb{C}$ 表示复数全体, 则

(i) $|A| \geqslant 0, |A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

(ii) $|\alpha A| = |\alpha| \cdot |A|$;

(iii) $|A + B| \leqslant |A| + |B|$.

对任意的 $A, B, \alpha \in \mathbb{C}$ 成立, 从而 $\mathbb{C}$ 成为一个**赋范空间**.

1.4 复数的几何表示

为了直观起见, 在平面上建立一个直角坐标系, 它以 O 为原点, Ox 为横坐标轴, Oy 为纵坐标轴 (图 1.1). 这样一来, 任意一个复数 $A = a + b\mathrm{i}$, 我们在直角坐标系 xOy 中能找到一点 A, 它以 a 为横坐标, b 为纵坐标. 相反, 坐标系中的任意一点 $B(c, d)$, 必存在唯一的复数 $B = c + d\mathrm{i}$ 与之对应. 这样的坐标平面称为**复平面**, Ox 轴为复平面的**实轴**, 而 Oy 为复平面的**虚轴**. 显然, 复数集合 $\mathbb{C}$ 将与复平面上的点一一对应. 复平面给我们带来了许多方便, 下面将会看到两个复数的加、减、乘、除都能在复平面上作出相应的结果, 复数 A 的共轭 $\overline{A}$, A 的模 $|A|$ 也能在复平面上清楚地表示出来. 下面将引入**辐角**的概念.

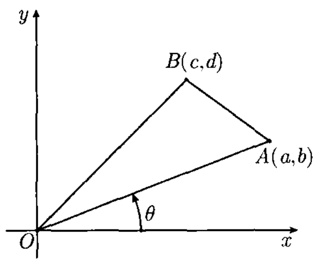

图 1.1

设 $A = a + b\mathrm{i}$ 是一个复数, 它在复平面上对应一点 $A(a, b)$, 连接原点 O 与 A 形成一个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴的夹角 θ 定义为复数 A 的辐角. 这样一来

$$a = |A| \cos\theta,$$

$$b = |A| \sin\theta.$$

于是

$$\tan\theta = \frac{b}{a},$$

$$\theta = \arctan\frac{b}{a}.$$

复数 A 的辐角记为 $\arg A$, 即

$$\theta=\arg A.$$

值得注意的是, 上面的定义中已假设了 $A\neq 0$, 如果 $A=0$, 那么其辐角没有定义. 即使 $A\neq 0$, 满足方程 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ 的 θ 有无穷多个, 即 $\theta+2n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 那么, 当 $A\neq 0$, $\arg A$ 有无穷多个值. 为了方便, 有时需要一个确定的辐角 $\arg A$. 如果

$$-\pi<\arg A\leqslant\pi,$$

我们称为 A 的**辐角主值**.

设 $|A_1|=r_1,\arg A_1=\theta_1,|A_2|=r_2,\arg A_2=\theta_2$, 则

$$A_1=r_1\left(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1\right),\quad A_2=r_2\left(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2\right).$$

利用平面三角的知识得

$$\begin{aligned}A_1A_2&=r_1\left(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1\right)r_2\left(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2\right)\\&=r_1r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\right)+\mathrm{i}\left(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right]\\&=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right].\end{aligned}\tag{1.16}$$

从而

$$\arg(A_1A_2)=\arg A_1+\arg A_2.$$

这里 $\arg A_1$ 及 $\arg A_2$ 指的是 A_1 及 A_2 的辐角主值, 但是 $\arg(A_1A_2)$ 不能保证落入 A_1A_2 的辐角主值范围.

类似地, 若 $A_1,A_2\neq 0$, 则

$$\arg\left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\arg A_1-\arg A_2.$$

下面我们给出复数 A 与 B 的算术运算结果的几何表示. 设 $A=a+b\mathrm{i}$, $B=c+d\mathrm{i}$. 在复平面上作出分别代表复数 A、B 的两点, 仍以 A、B 记之 (图 1.2). 从 B 出发作 OA 的平行线段, 得 P 点, 那么 P 点在复平面上就代表复数 $A+B$ 的几何表示, 从 O 点出发作 BA 的平行线段, 得 Q 点, 那么 Q 点就代表复数 $A-B$ 的几何表示. 上面作图方法的原理基于复数的加法与减法运算法则, 即 $A+B=a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$, 而向量

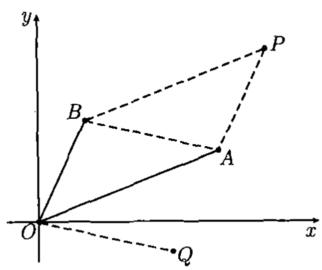

图 1.2

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a,b)^{\mathrm{T}}+(c,d)^{\mathrm{T}}=(a+c,b+d)^{\mathrm{T}},$$

P 点的坐标是 $(a+c, b+d)$, 这说明复数加法的作图法则是正确的. 类似可以说明 $A-B$ 的作图方法也是合理的.

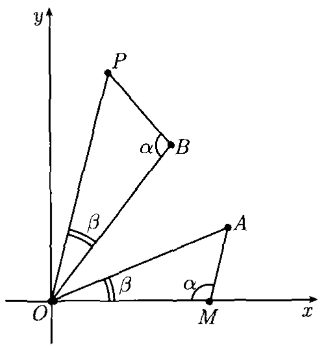

图 1.3

要在复平面上作出两个复数的积 AB 和它们的商 $\dfrac{B}{A}(A \neq 0)$ 是复杂的. 先在复平面上作出复数 $A = a+b\mathrm{i}$, $B = c+d\mathrm{i}$, 仍以 A, B 记之 (图 1.3), 然后在 Ox 轴上作一点 M, 它的坐标为 $(1, 0)$, 设 $\triangle OMA$, 然后以 OB 为一边作 $\triangle OMA$ 的相似 $\triangle OBP$, 那么 P 点代表复数 AB. 事实上 $\arg P = \arg A + \arg B$, 再由于 $\triangle OMA \sim \triangle OBP, \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OB}{OP}$, 即 $\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{|B|}{|P|}$, 从而 $|P| = |A| \cdot |B|$. 除法的作图是类似的, 则是令 $\triangle OMA \sim \triangle OQB$, 从而 Q 便代表复数 $\dfrac{B}{A}$ 在复平面上的点.

1.5 复数的幂与方根

设 $A \neq 0$ 为任一复数

$$A = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

这里 $r = |A|, \theta = \arg A$. 由 (1.16) 式不难推出

$$A^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta), \tag{1.17}$$

(1.17) 式对于任意正整数成立, 当 $n = 0$ 时也成立. 令 $A^{-1} = \dfrac{1}{A}$, 则

$$A^{-1} = r^{-1}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = r^{-1}(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)).$$

从而可推出 (1.17) 式当 n 为负整数时也成立. 当 $r = 1$ 时 (1.17) 式成为有名的棣莫弗 (de Moivre) 公式:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

设 $A \neq 0$, 考虑如下方程的根:

$$Z^n - A = 0, \tag{1.18}$$

令 $Z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $Z^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$, 方程 (1.18) 化为

$$\rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta),$$

由上式可得

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta,$$

或

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n}.$$

由于我们假定 θ 为 A 的辐角的主值, 那么 A 的任意辐角可表示为

$$\arg A = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

从而方程 (1.18) 的 n 个根为

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

容易验证仅当 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 时, 上式才得到真正不同的 n 个根.

如 $A = 1$, 令 $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, 那么 1 的 n 个根为

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \cdots, \quad \omega^{n-1}.$$

上列 n 个复数恰好是复平面上以原点为圆心的单位圆 Σ 的内接正 n 边形的顶点.

1.6 无穷远点及 Riemann 球面

我们曾指明用 $\mathbb{C}$ 表示复数全体所成之集合, 在微积分学中以 $\mathbb{R}$ 表示全体实数所成之集合. 设 $A, B \in \mathbb{C}$, 在定义 $A+B$, $A-B$ 及 AB 时, 对 A, B 不作任何限制, 而一旦涉及 $\dfrac{B}{A}$ 时, 总假定 $A \neq 0$. 为四则运算的普遍性及其他重要的目的, 我们必须引入一个新的复数 ∞, 称为**无穷大或无穷**, 似乎以无穷更为贴切, 因为在 $\mathbb{C}$ 中的数是无大小之关系. 在较初等的数学中 ∞ 不作为一个数, 而表示一个数的变化过程. 例如, 设 $x_n \in \mathbb{R}$ 当 $x_n \to +\infty$ 是指数列当 n 变大时, x_n 无穷变大. 但在复分析中, 我们把 ∞ 当作一个特殊的数, 规定其运算法则如下: 设 $A \in \mathbb{C}$, 则

$$A + \infty = \infty = \infty + A,$$

$$\frac{A}{\infty} = 0.$$

若 $B \in \mathbb{C}, B \neq 0$, 则

$$B\infty = \infty B = \infty, \quad \frac{B}{0} = \infty.$$

但

$$\infty \pm \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

不作规定.

与复数集合 $\mathbb{C}$ 所对应的复平面称为**开平面**, 而 $C \cup \{\infty\}$ 所对应的复平面称为**闭平面**. 显然开平面与闭平面是严格地不等同的, 但是在直角坐标系中, 我们无法看到闭平面中 ∞ 的位置在哪里.

为直观性, Riemann 创造了复数的球面表示法, 这种表示法使得 ∞ 一目了然, ∞ 不再有任何特殊性, 但也有缺点, 即四则运算不再像在直角坐标上那么简单. 但一旦你要观察复变量在 ∞ 附近的变动时, Riemann 球面将会使问题一目了然.

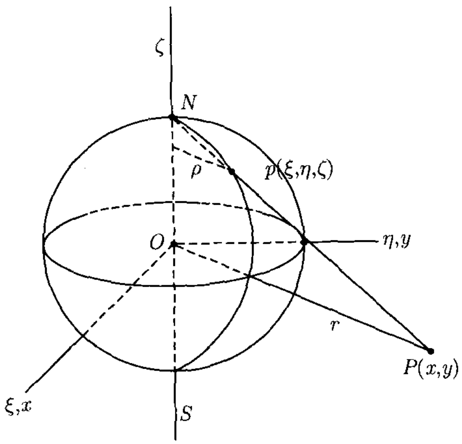

图 1.4

我们作出一个三维直角坐标系 O-$\xi\eta\zeta$, 以原点 O 为球心作一单位球面 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, 此坐标系中 $O\xi$ 轴与复平面中的 Ox 轴重合, $O\eta$ 轴与 Oy 轴重合 (图 1.4). 我们连接单位球面 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ 上的北极点 N 与复平面上的 P 点, P 点代表复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 此连线与单位球面交于 p 点, 它的坐标为 (ξ,η,ζ), 这样使得球面上的点与复平面上的点产生 1-1 对应的关系, 而 ∞ 点将与 N 对应. 由图 1.4 看出

$$\frac{\rho}{r}=\frac{1-\zeta}{1},\quad \frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{r}{\rho}=\frac{1}{1-\zeta}.$$

故

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta},\quad z=x+\mathrm{i}y=\frac{\xi+\mathrm{i}\eta}{1-\zeta}. \tag{1.19}$$

以及

$$z\overline{z}=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

$$z\overline{z}-1=\frac{2\zeta}{1-\zeta},\quad z\overline{z}+1=\frac{2}{1-\zeta}.$$

从而可得

$$\xi=\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}},\quad \eta=\frac{\mathrm{i}\,(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}},\quad \zeta=\frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}. \tag{1.20}$$

由 (1.19) 式及 (1.20) 式可以看出, 球面上任意一点 (ξ,η,ζ) 对应着复平面上一点 $z=x+\mathrm{i}y$, 以及复平面上任意一点 $z=x+\mathrm{i}y$, 对应着球面上一点 (ξ,η,ζ), 特别地北极点 N 与复平面上的 ∞ 对应. 由几何直观或分析, 可得如下结果:

(i) 复平面上过原点的直线对应为 Riemann 球面上过两极 N 与 S 的一个大圆.