数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

19

出版社

ISBN 7-5355-1855-9

9 787535 518552 >

ISBN 7－5355－1855－9／G・1850

定　价：2.70元

（湘）新登字005号

数学竞赛

湖南教育出版社 19

数 学 竞 赛（19）

本 社 编

责任编辑：欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷

850×1168毫米 32开 印张：4.125 字数：100000

1994年4月第1版 1994年4月第1次印刷

ISBN7—5355—1855—9／G·1850

定价：2.70元

目　录

1993年中国数学奥林匹克国家队选拔赛试题

卞质朴

第一天（1993–04–04）

1. 对素数$P\geqslant 3$，定义

$$F(P)=\sum_{k=1}^{(P-1)/2}k^{120},\ f(P)=\frac{1}{2}-\left\{\frac{F(P)}{P}\right\},$$

这里$\{x\}=x-[x]$，表示x的小数部分，求$f(P)$的值．

解　取素数P的原根g，则0，g^0，g^1，$\cdots g^{p-2}$构成模P的一个完全剩余系．

若$(P-1)\nmid 120$，则

$$F(P)\equiv\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{P-1}k^{120}\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P-1}(g^i)^{120}\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P-1}(g^{120})^i$$

$$\equiv\frac{1}{2}(g^{120})^i(1+(g^{120})+(g^{120})^2+\cdots$$

$$+(g^{120})^{P-2})$$

$$\equiv\frac{1}{2}(g^{120})\frac{g^{120(P-1)}-1}{g^{120}-1}\pmod P.$$

由于$(P-1)\nmid 120$，$g^{120}\not\equiv 1(\bmod P)$，$(g^{120}-1)\not\equiv 0(\bmod P)$，即$(g^{120}-1,P)=1$．但$g^{120(P-1)}\equiv(g^{P-1})^{120}\equiv 1(\bmod P)$，所以

$$F(P)\equiv 0(\bmod P)$$

从而$\left\{\frac{F(P)}{P}\right\}=0$，$f(P)=\frac{1}{2}$．

若$(P-1)|120$，这时$P\in\{3,5,7,11,13,31,$

41, 61}, 则 $g^{120}\equiv 1\ (\bmod P)$, 故有

$$F(P)\equiv \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{P-1}k^{120}\equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P-1}(g^{120})^{i}$$

$$\equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P-1}1\equiv \frac{P-1}{2}\ (\bmod P).$$

这时 $\left\{\dfrac{F(P)}{P}\right\}=\dfrac{P-1}{2P}$, 从而 $f(P)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{P-1}{2P}=\dfrac{1}{2P}$.

综上所述, 知

$$f(P)=\begin{cases}\dfrac{1}{2P}, & \text{若} P=3, 5, 7, 11, 13, 31, 41, 61;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{若} P \text{为其它素数}.\end{cases}$$

2. n 是给定的自然数, $n\geqslant 2$, 若 a, b, c, d 是自然数, 且满足 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}<1$ 及 $a+c\leqslant n$, 试求 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ 的最大值.

解 不妨设 $b\geqslant d$, $a+c=m\leqslant n$. 首先注意, 必有 $b\geqslant m+1$, $d\leqslant m$. 事实上,

若 $b\leqslant m$, 则 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}>\dfrac{a+c}{b}\geqslant \dfrac{m}{m}=1$, 矛盾;

若 $d\geqslant m+1$, 则 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\leqslant \dfrac{a}{m+1}+\dfrac{c}{m+1}=\dfrac{m}{m+1}=1-\dfrac{1}{m+1}$, 但这时 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ 不能取得最大值, 因为若取 $b=m+1$, $a=1$, $c=m-1$, $d=m$, 则有 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{m-1}{m}$

$=\dfrac{m(m+1)-1}{(m+1)m}=1-\dfrac{1}{m(m+1)}>1-\dfrac{1}{m+1}$ (因 $m=a+c\geqslant 2$).

因为当 $d\leqslant m$ 时, 我们有

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\leqslant\frac{ad-d+bc+b}{bd}=\frac{a-1}{b}+\frac{c+1}{d}$$

$$\leqslant\frac{a-2}{b}+\frac{c+2}{d}\leqslant\cdots$$

这意味着，在保持$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$，$a=m-c>0$的前提下，欲$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$取最大值，应使$c$尽可能接近于$d$，即应取$c=d-1$，$a=m-d+1$．由于$d\leqslant m$，总有$a\geqslant 1$．并且对于任意的$d\leqslant m$，总可选取$b$，使$\frac{n-d+1}{b}+\frac{d-1}{d}<1$，这只要取$b\geqslant d(n-d+1)+1$即可．所以，我们只要考虑

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{m-d+1}{a}+\frac{d-1}{d}=1-\frac{b-d(m-d+1)}{bd}$$

式中的$\frac{b-d(m-d+1)}{bd}$何时取最小正值，或者$f(d)=\frac{bd}{b-d(m-d+1)}$何时取最大正值即可．

因$f(d)$随b的减小而增大，但$f(d)$不能为负，故分母$b-d(m-d+1)\geqslant 1$，故b取最小值$b=d(m-d+1)+1$，这时

$$\begin{aligned}f(d)=bd&=d(d(m-d+1)+1)\\&=-d^3+(m+1)d^2+d\end{aligned}$$

为求$f(d)$的最大值M，可令

$$f'(d)=-3d^2+2(m+1)d+1=0$$

则

$$d=\frac{(m+1)+\sqrt{(m+1)^2+3}}{3}\ (\text{负根舍去!})$$

$$=\frac{2m+2+\theta}{3}\ (0<\theta<0.1)$$

由于 d 只能取整数值，故应取 d 为最接近$\dfrac{2m+2+\theta}{3}$之整数．记这个数为 $d(m)$．则不难算出

$d(m)=t+1$，当$t\leqslant\dfrac{2m}{3}<t+1$时．于是 $f(d)$ 的最大值 M 为

$$M=d(m)(d(m)(m+1-d(m)+1)$$

由于M的值随m的增大而增大，故有

$$M_{\max}=d(n)(d(n)(n+1-d(n))+1)$$

综上所述，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$的最大值为$1-\dfrac{1}{M}$.

它在 $a=n+1-d$，$b=d(n+1-d)+1$，$c=d-1$，$d=d(n)$ 时取得．

3．空间若干个点，其中任意四点不共面，某些点对间有线段相连，这样构成一个图．如果最少要用 n 种颜色给这些点染色，才能使任意两个同色点之间无线段相连，那么就称这个图是 n 色图．试证：对于任意正整数 n，都存在一个不含三角形的 n 色图．

证　对n用数学归纳法.

当$n=1$，结论显然成立.

当$n=2$，显然图  为2色图.

假定命题的结论对 $n=k\geqslant 2$ 成立，取一个符合条件的 k 色图 G_k，对 G_k 的每一个顶点 x_i，在空间取一新点 y_i，将 G_k 中 x_i 的相邻顶点（即与 x_i 有连线的顶点）都与 y_i 相连，但 y_i 不与 x_i 相连．然后再取一点 z，与所有的 y_i 相连，与所有的 x_i 都不相连，得到一个新的图 G_{k+1}.

显然 G_{K+1} 不含三角形．因为每两个 y_i，y_j 都不连线，故用 x_l，y_i，y_j 或 z，y_i，y_j 这样的 3 个顶点不能构成三角形；又 z 与 x_i 都不连线，故用 z，x_i，y_j 或 z，x_i，x_j 这样的三个

顶点也不能构成三角形．如果 G_{K+1} 中有三角形，只能由 x_i，x_j，y_l 这样的三点构成，这意味着，x_i，x_j 都与 x_l 有线相连，从而 x_i，x_j，x_l 构成一三角形，与图 G_k 的性质相矛盾．故 G_{k+1} 中无三角形．

现在将 G_K 用 k 种颜色染好，令 y_i 与 x_i 同色，z 再用第 $k+1$ 种新颜色染色，这样图 G_{k+1} 就可用 $k+1$ 种颜色染色，使得图中任一线段的两个端点都不同色．

而 $k+1$ 种颜色是必须的，若对 G_{K+1} 可用不超过 k 种颜色染色，则诸 y_i 所用的颜色不超过 $k-1$ 种，那么将图 G_k 中的 x_i 染上 y_i 的颜色，因任一与 x_i 相连的顶点 x_j 都与 y_i 相连，因而与 y_i 不同色，也与 x_i 不同色，于是 G_K 可用不超过 $k-1$ 种颜色染色，矛盾．故 G_{K+1} 是 $k+1$ 色图．

由归纳原理，命题获证.

4. 试求方程$2x^4+1=y^2$的一切整数解.

解　显然，$x=0$，$y=1$ 和 $x=0$，$y=-1$ 是方程的两个解．下证方程无其它满足 $xy\neq 0$ 的解，这又只要证明方程无满足 $xy\neq 0$ 的正整数解即可．

反设（x_0，y_0）是方程的一个正整数解，因 y_0 为奇数且 $y_0\neq 1$，故可设 $y_0=2y_1+1$（$y_1\in N$），则得

$$2x_0^4=4y_1(y_1+1)$$

故x_0为偶数，设$x_0=2x_1$（$x_1\in N$），则

$$8x_1^4=y_1(y_1+1)$$

因为$(y_1,\ y_1+1)=1$，故必

$$\begin{cases}y_1=8u^4\\ y_1+1=v^4\end{cases}\quad 或\begin{cases}y_1=u^4\\ y_1+1=8v^4\end{cases}$$

此处u，$v\in N$.

若 $y_1+1=8v^4$，则 $y\equiv -1\ (\mathrm{mod}8)$，与 $y_1=u^4$

$\equiv 0, 1 \pmod 8$ 矛盾，故必有

$$\begin{cases} y_1 = 8u^4 \\ y_1 + 1 = v^4 \end{cases} \quad (u, v \in N)$$

于是 $1 = v^4 - 8u^4$

$$(v^2 - 1)(v^2 + 1) = 8u^4$$

因 $(v^2 - 1, v^2 + 1) = 2$（因 $v^2 - 1$ 与 $v^2 + 1$ 同奇偶，且其积为偶数），故必

$$\begin{cases} v^2 - 1 = 4s^4 \\ v^2 + 1 = 2t^4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} v^2 - 1 = 2s^4 \\ v^2 + 1 = 4t^4 \end{cases} \quad (s、t \in N)$$

若$v^2 + 1 = 4t^4$，则$v^2 \equiv -1 \pmod 4$，矛盾. 故必有

$$v^2 - 1 = 4s^4 = (v - 1)(v + 1)$$

因 $(v - 1, v + 1) = 2$，故必

$$\begin{cases} v - 1 = 2l^4 \\ v + 1 = 2m^4 \end{cases} \quad (l, m \in N \text{且} m > l)$$

于是得

$$1 = m^4 - l^4 = (m^2 + l^2)(m^2 - l^2) > 1$$

这个矛盾证明了原方程无满足 $xy \neq 0$ 的整数解.

因此，原方程有二整数解 $(0, 1)$，$(0, -1)$.

5. 在坐标平面上给定点集

$S = \{(x, y) | x = 1, 2, \cdots, 1993; y = 1, 2, 3, 4.\}$ 如果 $T \in S$ 且 T 中任何 4 点都不是某个正方形的 4 个顶点，试求 $|T|$ 的最大值.

证 我们先证明下面的引理:

引理 在相邻的 4 列上最多可放置 10 个点，使它们不构成任一正方形的顶点.

事实上，假定在相邻的 4 列上放置 11 个点.

如果有某列上有 4 点，剩下 7 点分布在 3 列上，必有某列

上至少有 3 点．与 4 点列相距为 1 的列上不能有相距为 1 的 2 点，与 4 点列相距为 2 的列上不能有相距为 2 的 2 点，因此在与 4 点列相邻或相间一列的两列上都不能有 3 个点．与 4 点列相距为 3 的列上不能有相距为 3 的点，故 4 点列与 3 点列的分布只能如图 1－（*a*）所示:

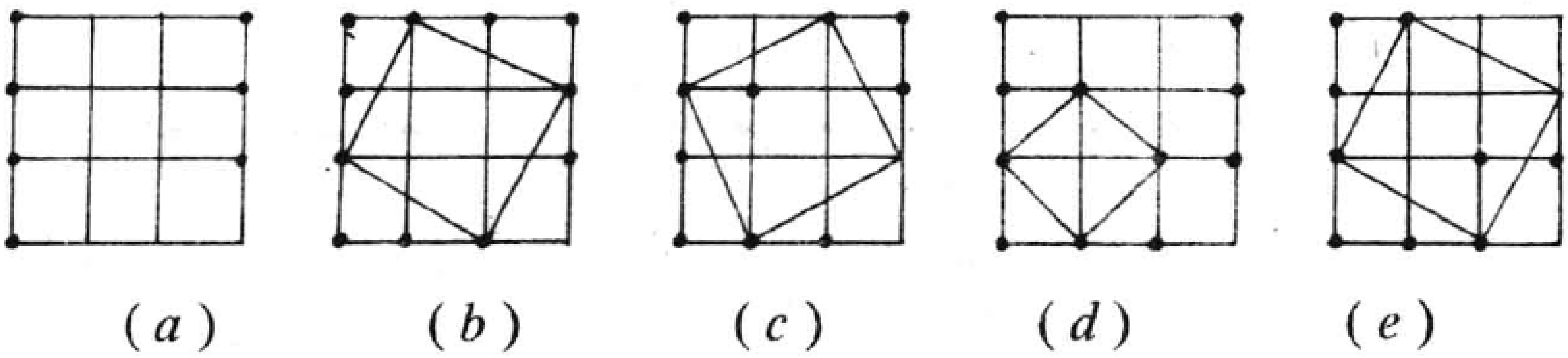


图1

中间两列上的 2 点无论如何分布都有 4 点可构成正方形的顶点．

若没有 4 点列，则恰有 3 个 3 点列，这 3 列上点的分布不构成正方形顶点的只有 4 种可能的情况（包括对称）,2 点列上的 2 点无论如何分布都必有 4 点构成正方形的顶点．以 (*a*) 为例，第 3 列上的两点不管如何分布都会有 4 点成为正方形的顶点（不

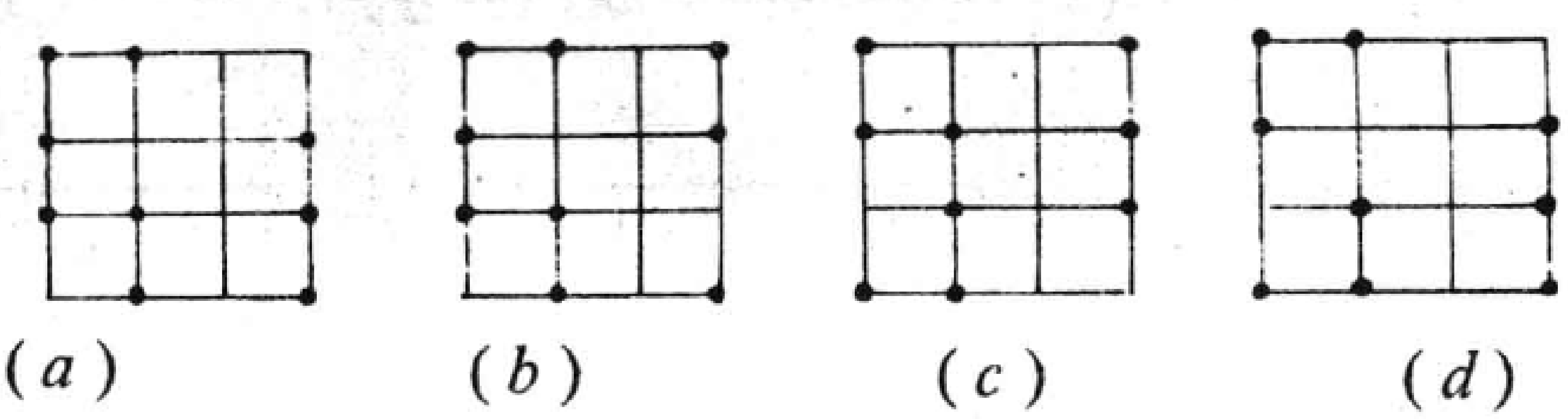


图2

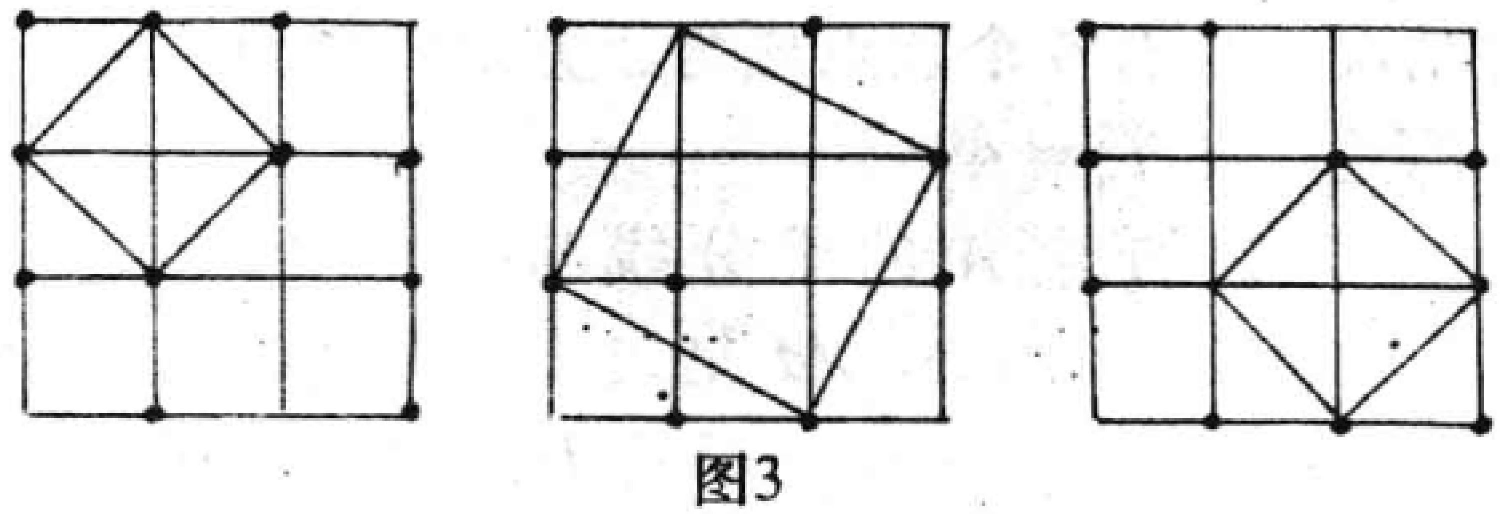


图3

列举可构成水平正方形的情况). 其它情况从略, 引理证完.

现在回到本题的解. 如图 4 所示, 至少可放下$\frac{1992}{4}\times 10+1\times 3=4983$个点, 其中任何 4 点都不构成正方形的顶点:

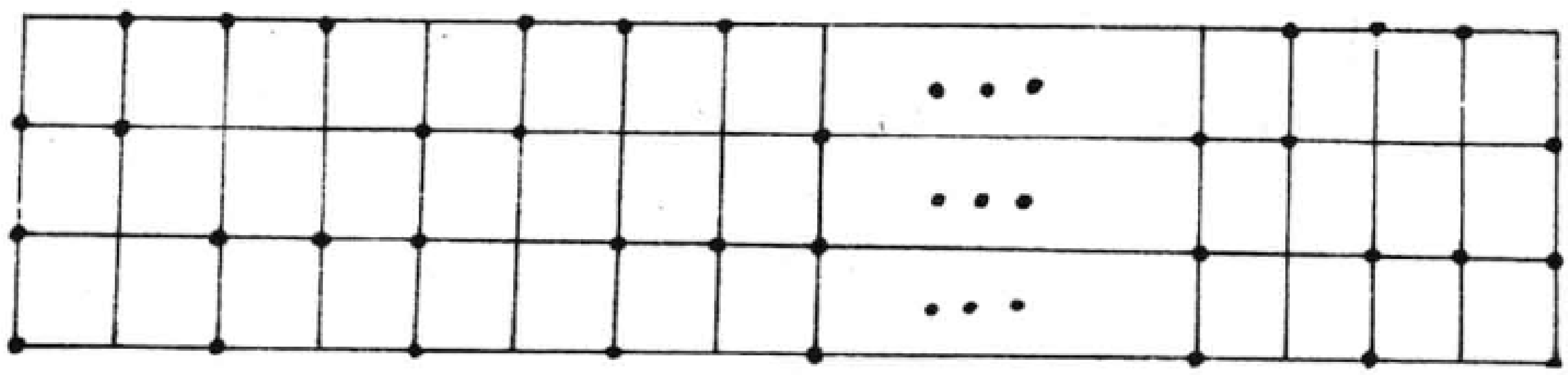


图4

另一方面, 如果放有 4984 个点, 把从 1 到 1982 列每 4 列分成一块, 由引理每块中最多能放 10 个点, 若某块有 11 个点, 就会出现 4 点构成正方形顶点的情况. 故前$\frac{1992}{4}=498$块中, 最多有 4980 个点, 所以第 1993 列上有 4 个点. 由引理的证明知, 与这一列靠近的 3 列上最多只有 6 个点. 因而在第 1989 列上就必须有 4 个点. 因此最后的 5 列只能有图 5 的三种可能情况:

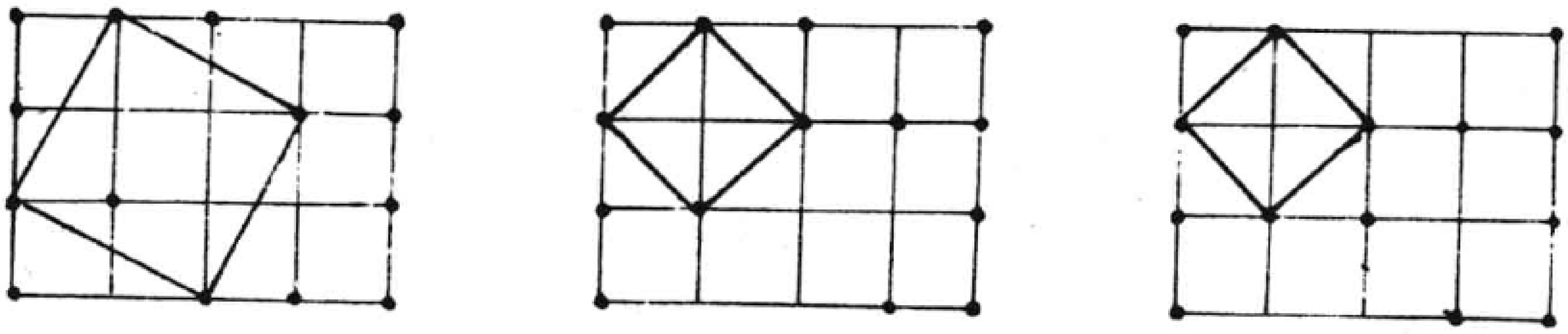


图5

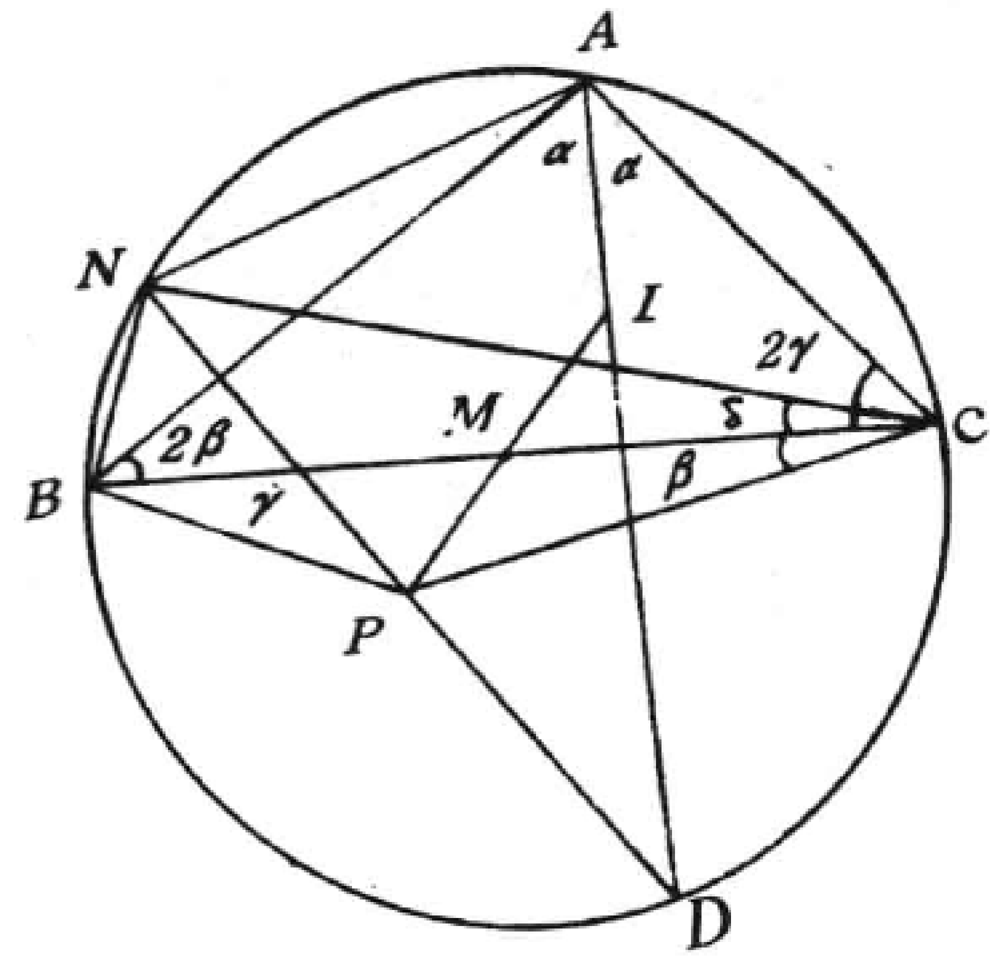
不论哪种情况, 均有 4 个顶点成为正方形的顶点.

综上所述, 知$|T|=4983$.

6. $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 D, I 是 $\triangle ABC$ 的内心, M 是边 BC 的中点, P 是 I 关于 M 的对称点 (设点 P 在圆内). 延长 DP 与外接圆相交于点 N.

试证：在 AN，BN，CN 三条线段中，必有一条线段是另两条线段之和．

证　用 a，b，c 记 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 的长，并设 $\angle A=2\alpha$，$\angle B=2\beta$，$\angle C=2\gamma$，$\angle NCB=\delta$.



因为 M 为 BC 中点，P 为 I 关于 M 的对称点，故 $BPCI$ 为一平行四边形．所以 $\angle PBC=\angle ICB=\gamma$，$\angle PCB=\angle CBI=\beta$.

在 $\triangle PNB$ 内，$\angle BNP=\alpha$，$\angle PBN=\angle PBC+\angle CBA+\angle ABN=\gamma+2\beta+\angle ACN=2\beta+3\gamma-\delta$，

所以

$$PN=\frac{PB}{\sin\alpha}\sin(2\beta+3\gamma-\delta) \tag{1}$$

又在 $\triangle PNC$ 内，$\angle PCN=\delta+\beta$，$\angle PNC=\alpha$，所以

$$PN=\frac{PC}{\sin\alpha}\sin(2\beta+3\gamma-\delta) \tag{2}$$

又设$\triangle PBC$的外接圆半径为R'，则

$$PB=2R'\sin\beta,\quad PC=2R'\sin\gamma \tag{3}$$

由 (1)、(2)、(3) 式可得

$$\sin\beta\sin(2\beta+3\gamma-\delta)=\sin\gamma\sin(\delta+\beta)$$

利用积化和差可得

$$\cos(3\beta+3\gamma-\delta)-\cos(\beta+3\gamma-\delta)$$
$$=\cos(\beta+\gamma+\delta)-\cos(\beta-\gamma+\delta)$$

移项，再利用和差化积得

$$\sin(2\beta+2\gamma)\sin(\beta+\gamma-\delta)=\sin(\beta+\gamma)\sin(2\gamma-\delta)$$

因为$2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$，所以上式可化为：

$$\sin 2\alpha\cos(\alpha+\delta)=\cos\alpha\sin(2\gamma-\delta)$$

由于$\alpha<90^\circ$，$\cos\alpha\neq 0$，两边约去$\cos\alpha$，得

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\delta)=\sin(2\gamma-\delta)$$

$$\sin(2\alpha+\delta)-\sin\delta=\sin(2\gamma-\delta)$$

$$2R\sin(2\alpha+\delta)-2R\sin\delta=2R\sin(2\gamma-\delta)$$

此处R为$\triangle ABC$外接圆的半径. 上式即

$$NC-NB=NA$$

或 $$NC=NA+NB.$$

城 市 联 赛

南京师范大学　单　墫

城市联赛(Tournament of the Towns)是一种解题的数学竞赛．1980年，首先在前苏联的三大城市莫斯科，列宁格勒(现名彼得堡)，基辅举行，以后参赛的城市不断增加，目前已有加拿大，西班牙，捷克，伊朗，新西兰，英国，津巴布韦，印度，印尼，新加坡，以色列，哥伦比亚，菲律宾等国的城市及香港参加，成为包括欧、美、亚、澳、非五大洲，影响仅次于IMO(国际数学奥林匹克)的国际数学竞赛．

城市联赛的目的之一是给更多的学生提供崭露头角的机会．每一个城市均可报名参赛，参赛人数不受限制(IMO，每国或每一地区至多派出6名队员)．评比时，以各城最佳的 n 名选手的平均分数为标准，其中

$$n=\begin{cases}5, & \text{若该城人口} \leqslant 500000,\\ \left[\dfrac{\text{该城人口}}{100000}\right] & \text{若该城人口} > 500000.\end{cases}$$

因此，小城市并不因为人口较少而处于劣势，这是十分公平的．

比赛每年举行，分为两轮，春、秋各一轮．每个城市可以参加两轮，也可以参加其中任一轮．每轮比赛分为两个年级：高年级(11或12年级)，低年级(8、9或10年级，约相当于我国初中)．每个年级又分为两种水平：O 级(较容易)与 A 级(较难)，(学生可以根据自己的实力任取一种．)这有助于提高学生的积极性，年龄较小的学生也可以取得好的成绩．

比赛地点即学生所在城市，题目邮寄，最佳的 n 名选手的

答卷邮寄给主赛单位，这样可以节省经费.

城市联赛的试题由主办单位拟定，其中有不少好题. 我们挑选几道，试题的风格可以略见一斑.

1. 求方程组

$$(x+y)^3=z,\quad (y+z)^3=x,\quad (z+x)^3=y$$

的全部实数解.

2. 11个女孩与 n 个男孩找蘑菇，共找到 n^2+9n-2 个，每个人找到的一样多，问女孩与男孩谁多?

3. 某王国有8个城市，国王想造一道路系统，使得从任一城市可沿道路走到任一其他城市，中间至多经过一个城市。并且任一城市引出的道路不多于 k 条. 对什么样的 k 是可能的?

4. 32名拳击手参加一拳击赛. 每人每天至多一场. 已知拳击手的力量各不相同，强的胜弱的. 每天的程序在上一天晚上决定. 证明可组织15天比赛决出选手的强弱.

这四题中1是低年级O级，2是高年级O级，3是低年级A级，4是高年级A级. 解答如下:

1. 设 x、y、z 中 x 最大，则

$$(y+z)^3=x\geq y=(z+x)^3$$

从而 $y+z\geq z+x$，$y\geq x$. 于是 $x=y$，同理 $x=z$，方程组成为 $8x^3=x$，有三组实数解，即

$$(x,y,z)=(0,0,0),(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),$$
$$(-\sqrt{2}/2),-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2).$$

2. $n^2+9n-2=(n+11)(n-2)+20$ 应被人数 $n+11$ 整除，所以20被 $n+11$ 整除，$n=9$，女孩人数多于男孩.

3. $k=1$，2是不可能的，因城市 A 至多能直达两个城市 B、C，B 至多能直达 A 与 D，C 至多能直达 A 与 E，故限制至多经过一个城市时从 A 只能走到 B、C、D、E 四个城市。

$k=3$ 是可能的，这一点可能出于预料，下图即符合要求: