

■ 耿维明 编著

测量误差与 不确定度评定

 中国质检出版社

测量误差与不确定度评定

耿维明 编著

中国质检出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

测量误差与不确定度评定 / 耿维明编著. —北京: 中国质检出版社, 2011. 5
ISBN 978 - 7 - 5026 - 3420 - 9

I. ①测… II. ①耿… III. ①测量误差②测量—不确定度 IV. ①P207②TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 029797 号

内 容 提 要

本书内容主要包括: 测量误差的概念及分类、概率论的基本知识、随机误差的分布与估计、系统误差的发现与消除、测量结果的数据处理、测量不确定度的概念及术语、不确定度评定的测量函数、测量不确定度的评定、误差与不确定度的应用, 另外附录给出了测量不确定度评定实例。本书中所涉及的基本概念和名词术语, 直接采用了《国际计量学词汇——通用、基本概念和相关术语》(VIM) 第 3 版。

本书是在测量误差理论的基础上, 提出了不确定度原理与评定方法, 重点解决测量误差分析与不确定度评定问题, 具有系统理论性和实践指导性, 可供从事校准、计量、检测、检验的生产、科研、教学等相关人员使用, 是从事计量、标准化、质量及实验人员的实用工具书。

中国质检出版社出版发行

北京市朝阳区和平里西街甲 2 号 (100013)

北京市西城区复外三里河北街 16 号 (100045)

网址: www.spc.net.cn

电话: (010) 64275360 68523946

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

开本 787 mm × 1092 mm 1/16 印张 12.25 字数 298 千字

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

*

定价: 40.00 元

如有印装差错 由本社发行中心调换

版权专有 侵权必究

举报电话: (010) 68510107

前 言

测量误差与测量不确定度在科学技术领域中是极为重要的基础学科，不仅是测量科学的重要分支之一，而且是现代测试技术的一个重要研究内容，也是科学技术发展中保证获取信息可靠性和提高测量准确度的重要手段，其水平很大程度上体现着一个国家的科学技术发展总体水平。

测量误差的概念有着悠久的历史，多少年来测量误差的定义就没有过大的变化，并形成了一套完整的测量误差理论体系和数据处理方法，在科学测量领域发挥了重大作用。测量不确定度在测量领域中是一个较新的概念，它的应用目前在国际上具有广泛性和普遍性。1993 年《测量不确定度表示指南》第一版已经以七个国际组织的名义由 ISO 国际标准化组织出版发行，并在全世界推广应用。该“指南”代表了当前国际上在表示测量结果不确定度时的约定做法，使全世界不同国家、不同地区、不同学科等在表述测量不确定度时具有一致的含义。

我们从测量误差公理可知：只要有测量就会有误差，测量误差自始至终地存在于一切科学实验和测量过程之中。因此，要想绝对避免测量误差是不可能的，也是没有必要的。因为生产上对测量技术的要求，就是能够给出与被测量准确度要求相适应的测量结果。所以，对测量者来讲，问题在于能否大体确定某一测量结果的不确定度。为达到这一目的，测量者应具备一定的测量误差理论基础；掌握各种测量误差产生的原因及其出现的规律；学会测量误差的定性分析和定量计算；善于采取各种措施减少测量误差的影响；能够对测量结果的不确定度进行科学的评定。

测量的目的是确定被测量的量值。因此，在报告测量结果时，必须对测量结果给出被测量的量值及相应信息，以确定测量结果的量值的可信程度。测量不确定度就是对测量结果的量值分散性的定量表征，测量结果是否准确，关键取决于其测量不确定度的大小。所以，不能给出不确定度的测量结果是毫无意义的。

需要特别指出的是，要正确理解“测量误差”和“测量不确定度”这两个术语，不能因为“真值”不可知而单纯从“测量误差”的理论定义上认识“测量误差”。因为实际上是用“约定量值”替代“真值”，用“算术平均值”替代“数学期望”，因而使测量误差及其分类具备了可操作性。测量误差由随机误差和系统误差组成，由随机误差的估计值即残差可计算实验标准偏差，由系统误差的常量作为修正值可修正测量结果。在测量不确定度的评定中，是用实验标准偏差来表征标准不确定度的。因此，没有测量误差的概念就无法计算实验标准偏差，没有实验标准偏差的概念就无法评定测量结果的不确定度。可以说，测量误差与实验标准偏差是测量不确定度评定的理论基础。

本书共分九章及一个附录：第一章为测量误差概念及分类；第二章为概率论的基本知识；第三章为随机误差的分布及估计，主要对算术平均值和实验标准偏差进行了全面介绍；第四章为系统误差的发现与消除；第五章为测量结果的数据处理，主要介绍了异常值的剔除、有效数字的处理，以及等精度、不等精度和组合测量结果的处理；第六章为测量不确定度的概念及术语；第七章全面介绍了测量不确定度评定过程的测量函数的建立及评定步骤；第八章介绍了测量不确定度的 A 类和 B 类评定，合成标准不确定度的评定，扩展不确定度的评定，测量不确定度的报告与表示；第九章介绍了最小误差准则、不确定度分配，以及如何选择最佳测量方案。附录给出了测

量不确定度的评定实例。

测量误差的理论基础是概率论及数理统计。概率论主要研究的内容是随机变量，而概率论中所研究的随机变量，一般是没有系统因素影响的随机变量。所以我们在研究测量误差时，首先假定没有系统误差，研究随机误差的分布规律及其表征参数，然后再研究随机误差和系统误差同时存在时的处理方法。本书对概率论中随机变量的数字特征数学期望和方差，测量误差理论中算术平均值和实验标准偏差，分别将其演变过程进行了详细的阐述，这对读者深入了解和有效掌握算术平均值及实验标准偏差，对测量不确定度进行科学评定是非常有帮助的。

本书是作者根据多年来在测量误差与测量不确定度领域已正式发表的论文，为各种测量误差与测量不确定度学习班编写的教材、讲义、讲稿，以及平时的读书和研究笔记整理补充的基础上撰写而成的。编写本书目的是希望帮助读者通过对测量误差理论与测量不确定度评定的系统学习，能够正确了解和掌握测量误差与测量不确定度的基本概念，以及测量误差的定性分析和定量计算方法，以便能对测量结果的不确定度进行有效的评定。

本书中所涉及的基本概念和名词术语，直接采用了《国际计量学词汇——通用、基本概念和相关术语》(VIM)第3版(最终稿2007-02-06)。其中，测量误差、随机误差、系统误差、测量不确定度、定义不确定度、仪器不确定度、零值不确定度、目标不确定度等名词术语采用了目前国际上最新定义。

赵峰同志组织江苏省计量科学研究院有关测量专家提供了测量不确定度评定实例，这些实例是在为客户提供的大量检定校准报告中的测量不确定度分析实例中精选出的，具有很强的代表性和实用性。倪炳勇同志在本书的编审过程中做了大量的工作。

在本书编写过程中，得到各方面的大力支持和帮助。对国家质量监督检验检疫总局韩毅、马纯良、刘安平、刘新民、宋伟、马肃林、王顺安、王建平、钟新民、陈红，中国计量科学研究院施昌彦，江苏省质量技术监督局靳道强、张前，江苏省计量科学研究院毛朔南、赵峰，以及滕远清、倪炳勇等同志的关心、支持和帮助，在此一并表示感谢。

由于作者的水平所限，书中难免存在不妥之处，敬请批评指正。

耿维明

2010年10月10日于南京

目 录

第一章 测量误差的概念及分类	(1)
第一节 测量误差的概念	(1)
一、测量误差定义	(1)
二、测量误差的相关术语	(2)
第二节 测量误差的分类	(4)
一、随机误差	(5)
二、系统误差	(6)
三、随机误差与系统误差的区别	(8)
四、测量误差的实际意义	(8)
第三节 测量误差的来源	(10)
一、测量仪器误差	(10)
二、环境条件误差	(11)
第二章 概率论的基本知识	(13)
第一节 随机事件与概率	(13)
一、随机事件	(13)
二、概率定义	(13)
三、概率性质	(14)
四、概率定理	(15)
第二节 随机变量及其概率分布	(15)
一、随机变量	(15)
二、分布函数	(16)
三、分布密度	(17)
四、概率分布	(18)
五、置信概率	(22)
第三节 随机变量的数字特征	(23)
一、数学期望	(23)
二、方差	(24)
第四节 大数定律与中心极限定理	(27)
一、大数定律	(27)
二、中心极限定理	(28)

第三章 随机误差的分布与估计	(29)
第一节 随机误差的分布规律	(29)
一、正态分布	(29)
二、其他分布	(30)
第二节 算术平均值原理	(30)
一、算术平均值	(30)
二、算术平均值的性质	(33)
第三节 实验标准偏差	(34)
一、实验标准偏差的估计	(34)
二、实验标准偏差的其他估计	(36)
三、自由度	(38)
第四章 系统误差的发现与消除	(40)
第一节 系统误差的来源及特点	(40)
一、系统误差的来源	(40)
二、系统误差的特点	(41)
第二节 系统误差的影响	(41)
一、确定性系统误差的影响	(41)
二、规律性系统误差的影响	(42)
第三节 系统误差的发现	(42)
一、确定性系统误差的估计	(42)
二、规律性系统误差的发现	(43)
第四节 系统误差的减小和修正	(46)
一、减小系统误差的方法	(46)
二、修正系统误差的方法	(47)
第五章 测量结果的数据处理	(49)
第一节 异常值的剔除方法	(49)
一、莱以特准则	(49)
二、肖维勒准则	(51)
三、格拉布斯准则	(51)
第二节 有效数字的处理准则	(52)
一、有效数字	(52)
二、数字修约规则	(52)
三、不确定度的有效位数	(53)
第三节 等精度测量结果的处理	(53)
一、直接测量结果的处理	(54)
二、间接测量结果的处理	(56)
三、相关量的实验标准偏差估计	(61)

第四节 不等精度测量结果的处理	(64)
一、“权”的确定方法	(64)
二、加权算术平均值与标准偏差	(66)
第五节 组合测量结果的处理	(68)
一、最小二乘法原理	(68)
二、被测量最佳估计值的确定	(69)
三、被测量估计值的实验标准偏差	(71)
第六章 测量不确定度的概念及术语	(73)
第一节 测量不确定度的概念与分类	(73)
一、测量不确定度的概念	(73)
二、测量不确定度的分类	(74)
第二节 测量不确定度的相关术语	(75)
一、不确定度术语	(75)
二、定义不确定度	(76)
三、目标不确定度	(76)
四、仪器不确定度	(77)
五、最大允许误差	(78)
六、测量准确度、正确度、精密度	(79)
第三节 测量误差与不确定度的关系	(80)
一、测量误差与不确定度的区别	(80)
二、测量误差与不确定度的关系	(80)
三、测量仪器最大允许误差与仪器不确定度的关系	(81)
第七章 不确定度评定的测量函数	(83)
第一节 不确定度评定的测量函数	(83)
一、被测量的测量函数	(83)
二、被测量估计值不确定度的测量函数	(84)
三、建立测量函数的方法	(87)
第二节 不确定度评定的说明	(89)
一、不确定度评定内容	(89)
二、不确定度来源分析	(91)
第八章 测量不确定度的评定	(93)
第一节 测量不确定度 A 类评定	(93)
一、基本方法	(93)
二、其他方法	(95)
第二节 测量不确定度 B 类评定	(96)
一、直接计算法	(97)
二、正态分布法	(97)

三、 t 分布法	(98)
四、其他分布法	(98)
五、假设分布法	(99)
六、B 类评定不确定度的自由度	(99)
第三节 合成标准不确定度评定	(100)
一、输入量不相关时合成标准不确定度	(100)
二、输入量相关时合成标准不确定度	(101)
三、合成标准不确定度的自由度	(102)
第四节 扩展不确定度评定	(102)
一、扩展不确定度的含义	(103)
二、包含因子的选择	(103)
第五节 测量不确定度报告与表示	(104)
一、测量不确定度报告	(104)
二、合成标准不确定度的报告形式	(104)
三、扩展不确定度的报告形式	(105)

第九章 误差与不确定度的应用

第一节 微小误差与微小不确定度	(109)
一、微小确定性系统误差准则	(109)
二、微小不确定度准则	(110)
三、微小误差准则	(110)
第二节 不确定度分配	(111)
一、等作用原理	(111)
二、不确定度分配步骤	(113)
第三节 如何选择最佳测量方案	(113)
一、测量仪器的选择	(113)
二、测量次数的选择	(114)
三、计算公式的选择	(114)

附录 测量不确定度评定实例

实例 1 砝码折算质量测量不确定度评定	(117)
实例 2 压电加速度计测量不确定度评定	(122)
实例 3 精密露点仪测量不确定度评定	(124)
实例 4 螺纹塞规中径测量不确定度评定	(128)
实例 5 三等金属线纹尺测量不确定度评定	(131)
实例 6 黏度测量不确定度评定	(135)
实例 7 气导听力零级测量不确定度评定	(138)
实例 8 塞尺厚度测量不确定度评定	(142)
实例 9 角度块测量不确定度评定	(144)
实例 10 液相色谱仪泵流量测量不确定度评定	(147)

实例 11 信号发生器频率测量不确定度评定 (152)

实例 12 照度计测量不确定度评定 (154)

实例 13 数字指示秤测量不确定度评定 (158)

实例 14 称重传感器测量不确定度评定 (161)

实例 15 示波器校准仪测量不确定度评定 (164)

实例 16 高精密玻璃水银温度计测量不确定度评定 (171)

实例 17 三相交流有功电能表测量的不确定度评定 (175)

实例 18 比较法三针直径测量不确定度评定 (178)

实例 19 光面环规直径测量不确定度评定 (180)

第一章 测量误差的概念及分类

测量的目的不仅要给出测量结果的量值，还要给出测量结果的不确定度。在实际测量过程中，不论测量工作如何仔细、测量仪器如何准确、测量方法如何可靠，测量误差总是存在的，测量结果的量值分散性也是存在的。我们知道测量误差的数据处理方法是传统方法，而测量不确定度的处理方法是由传统的误差处理方法演变过来的。可以说，测量误差是测量不确定度评定的理论基础。因此，为全面掌握和正确运用测量误差的结果处理和测量不确定度评定方法，应首先系统学习和实际掌握测量误差理论。

第一节 测量误差的概念

一、测量误差定义

根据《国际计量学词汇——通用、基本概念和相关术语》(VIM)第3版(最终稿2007-02-06)，对测量误差的定义为：“测得量值减参考量值。”(VIM第3版2.17)

其数学表达式为

$$\delta = x - \mu \quad (1-1)$$

式中： δ ——测量误差；

x ——测得量值；

μ ——参考量值。

即

$$\text{测量误差} = \text{测得量值} - \text{参考量值}$$

其中，测得量值也可称为测得值，是表示测量结果的量值。参考量值也可称为参考值，可以是被测量的真值；可以是给定的一个约定量值（即约定真值）；可以是具有可忽略测量不确定度的测量标准赋予的量值（简称标准量值）。因此，根据测量误差定义中参考量值的含义。测量误差也可分别表示为

$$\text{测量误差} = \text{测得量值} - \text{量的真值}$$

$$\text{测量误差} = \text{测得量值} - \text{约定量值}$$

$$\text{测量误差} = \text{测得量值} - \text{标准量值}$$

可以看出，在测量误差的新定义中，巧妙地使用了“参考量值”这个词，并准确合理地为其定义及解释。定义中不仅保留了理论上的“真值”含义，还增加了可忽略测量不确定度的测量标准赋予的量值的含义。也就是说，测量误差的新定义既体现出理论和数学概念上的完整性，又体现出实际处理过程中的可操作性，为测量误差的正确使用奠定了理论基础。

VIM第2版对测量误差的定义为：“测量结果减去被测量的真值”。在描述测量的误差处理

方法中,认为真值是惟一的,实际上是不可知的,因而人们对传统的测量误差定义的可操作性存在不同程度的疑问。

而 VIM 第 3 版对测量结果的定义是赋予被测量的一组量值以及其他适用的相关信息。可以理解为测量结果通常表示为单个被测量量值和测量不确定度。因此,用测量结果减去被测量的真值去定义测量误差显然不合适了。

我们知道,在任何测量中,不存在完善的条件,也找不到没有缺陷的测量仪器和测量方法,也不可能创造理想的环境条件、理想的操作人员。因此,量的真值是理想的概念,是客观存在的,人们可以逐步测得接近它的量值,但只能是被测量的量值的近似或估计。真值是量的定义的完整体现,本质上真值是不能确定的,实际用的是约定真值。因此,只能将传统的误差定义理解为理想的概念。实际上,VIM 第 3 版和 VIM 第 2 版对测量误差的定义是一致的,只是 VIM 第 3 版描述的更加合理准确,不会由于真值不可知而否定测量误差的可操作性。

“约定真值”在 VIM 第 3 版中已被“约定量值”所替代,约定量值是真值的估计值,约定量值替代真值有一个条件,即“充分接近于真值”。“充分”是相对的,随给定的目的而定,表示两者的差值对测量结果的影响可忽略不计,或控制在某个范围之内。如在测量误差计算中,常常用多次重复测量并经修正后的算术平均值来作为被测量的约定量值。

根据测量误差定义,可以得出以下结论:

(1) 相同的测得量值,不论其测量方法是否相同,其测量误差必然相同。

(2) 根据测量误差定义所得的误差,应该是大小已知、方向确定的一个具体的数值,即测量误差恒有一个符号。换句话说,测得量值大于参考量值时,测量误差为正值,测得量值小于参考量值时,测量误差为负值。因此测量误差不会是以“正负号”(±)的形式表示。

(3) 测量误差往往是由若干个分量构成的,这些分量也都各有其误差值(带有正或负的符号),它们的代数和构成了测量误差。

(4) 测量误差的分量,按其出现在测得量值中的规律进行分类。

(5) 所有从测量误差引申出来的一些词组,例如基值误差、零值误差、仪器误差、人员误差、环境误差、调整误差、允许误差、观测误差等,其中的含义均是测量误差的引申。过去常用的“极限误差”也是源于测量误差。但有些误差是在特定条件下的人为规定,例如:最大允许误差和误差限,是指技术规范或检定规程对给定测量、测量仪器所允许的误差的极限值。需要引起注意的是,不应将测量误差与产生的错误和过失相混淆。

有时将测量误差称为“绝对测量误差”或“绝对误差”,这样可以同“相对误差”相区别。

相对误差是指测量误差除以被测量的参考量值。

根据测量误差定义: $\delta = x - \mu$,若用 δ_r 表示相对误差,则有

$$\delta_r = \frac{\delta}{\mu} = \frac{x - \mu}{\mu} \times 100\% \quad (1-2)$$

所以,相对误差表示绝对误差所占参考量值的百分比。

一般来说,当被测量的大小相近时,通常用绝对误差进行测量水平的比较。当被测量相差较大时,用相对误差才能进行有效的比较。

二、测量误差的相关术语

1. 测量结果

“赋予被测量的一组量值以及其他适用的相关信息。”(VIM 第 3 版 2.9)

通常情况下,测量包含一组量值的“相关信息”,其中有一些信息更适宜表示被测量。测量结果首先要给出被测量的量值,其次要给出与被测量有关的相关信息。相关信息主要是指被测量量值的测量不确定度,以及与不确定度有关的其他信息,如包含因子、置信概率以及有效自由度等。

一般情况下,测量结果通常表示为单个被测量量值和测量不确定度。对于某些用途而言,如果认为测量不确定度可以忽略不计,则测量结果可以只表示为单个被测量量值。在许多领域中,这两种方式是表示测量结果的通用方式。

在传统文献和 VIM 的早期版本中,测量结果定义为赋予被测量的值,并根据上下文解释说明是示值、未修正结果或已修正结果。应注意“测量结果”新定义和传统定义的区别。

2. 测得量值(测得值)

“表示测量结果的量值。”(VIM 第 3 版 2.10)

对于重复示值的测量,每个示值可用于提供一个相应的测得量值。这一组独立的测得量值可用于计算产生结果的测得量值,而且通常有较小的测量不确定度。如用标准器为参考量值对被测量进行 n 次重复测量,获得 n 个示值,则每个示值就是相应的测得量值,并用来计算一组测量列的算术平均值及实验标准偏差,只要测量次数 n 选取合适,通常可获得较小的测量不确定度。

当代表被测量的真值范围比测量不确定度小时,可以认为被测量值是概念上的单一真值的估计值,并且往往是通过重复测量获得的独立测得量值的平均值或中位值。

当代表被测量的真值范围不比测量不确定度小时,测得值往往是一组真值的平均值或中位值的估计值。

在《测量不确定度表示指南》(GUM)中,术语“测量结果”和“被测量值的估计”或“被测量的估计值”用作术语测得的量值。而“测得量值”的新定义则表示测量结果的量值,注意它们之间的区别。

3. 量的真值(真值)

“与量的定义一致的量值。”(VIM 第 3 版 2.11)

长期以来,在描述测量的误差处理方法中,存在不同的意见:一种处理方法认为真值是惟一的,实际上是不可知的;另一种处理方法认为,由于一个量的定义细节的固有局限性,不存在单一真值,只存在与定义一致的一组真值;还有一些方法认为,完全不需要真值的概念,而是依赖测量结果的计量学兼容性概念来评价其有效性。可见,人们对真值的认识和理解还不是完全一致的。

对基本常量的特殊情况,可以认为量具有单一真值。

在被测量的定义不确定度与测量不确定度的其他分量相比可忽略时,可以认为被测量具有“概念上惟一”的量值。

真值可以是理论真值:如平面三角形内角和恒为 180° ,同一量值自身之差为零而自身之比为一,此外还有理论设计值或理论公式表达值等。

4. 参考量值(参考值)

“用作同种量的值比对基础的,通常具有适当小的测量不确定度而被接受的量值。”(VIM 第 3 版 5.18)

参考量值可以是被测量的真值,可以是给定的一个约定量值,或具有可忽略测量不确定度的测量标准赋予的量值。

与不确定度相关联的参考量值通常涉及:物质,例如有证参考物质;装置,例如稳态激光

器；参考测量程序；测量标准的比对。

量值必须是可计量溯源的。

具有可忽略测量不确定度的测量标准赋予的量值是指：在某个测量机构内设置的最高计量标准所复现的量值，可以视为该量值的约定量值；一等计量标准所复现的量值，对于被检定的二等标准器而言，就是后者的约定量值。因此，有了参考量值的概念，可充分地接近于真值，进而替代真值，测量误差定义才有了理论和实际应用的意义。

5. 约定量值（约定值）

“为某种用途通过协议赋予某量的量值。”（VIM 第3版 2.12）

术语“约定真值”有时用于此概念，为便于对新定义的理解，可以这样去联想，但不提倡使用。约定量值仅是真值的估计值。

例如：标准自由落体加速度（重力加速度）的约定量值为 $g_n = 9.806\,65\text{ms}^{-2}$ ；约瑟夫逊常量的约定量值为 $K_{J-90} = 483\,597.9\text{GHzV}^{-2}$ ；某质量标准的约定量值为 $m = 100.003\,47\text{kg}$ 。

如计量学约定量值（约定真值）有：根据国际计量大会决议，SI 基本单位的定义为：

（长度单位）米：等于光在真空中（ $1/299\,792\,458$ ）s 时间间隔内所经路径的长度。

（质量单位）千克：等于国际千克原器的质量。

（时间单位）秒：等于铯 - 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 $9\,192\,631\,770$ 个周期的持续时间。

（电流单位）安 [培]：等于在真空中，截面积可忽略的两根相距 1m 的无限长平行圆直导线内通以等量恒定电流时，若导线间相互作用力在每米长度上为 $2 \times 10^{-7}\text{N}$ 时的导线中的电流。

（热力学温度单位）开 [尔文]：等于水的三相点热力学温度的 $1/273.16$ 。

（物质的量单位）摩 [尔]：是一系统的物质的量，该系统中所包含的基本单元数与 0.012kg 碳 - 12 的原子数目相等。

（发光强度单位）坎 [德拉]：等于一光源在给定方向上的发光强度，该光源发出频率为 $540 \times 10^{12}\text{Hz}$ 的单色辐射，且在此方向上的辐射强度为 $(1/683)\text{W/sr}$ 。

第二节 测量误差的分类

测量误差可以按其在测得量值中的规律分为若干分量。

根据测量误差定义有

$$\delta = x - \mu$$

将上式改写成

$$\delta = x - \mu = [x - E(x)] + [E(x) - \mu] \quad (1-3)$$

式中： $E(x)$ ——为测得量值 x 的数学期望（又称为期望值）。

令

$$x - E(x) = \eta \quad (1-4)$$

$$E(x) - \mu = \varepsilon \quad (1-5)$$

则有

$$\delta = \eta + \varepsilon \quad (1-6)$$

可以看出测量误差是由两个分量组成的，即随机误差 η 和系统误差 ε 。

一、随机误差

式 (1-4) 称为测得量值与其数学期望的偏离值，一般称为随机误差。VIM 第 3 版 2.20 对随机误差的定义为：“在重复测量时按不可预见的方式变化的测量误差的分量。”其特点是，当测量次数 n 趋于无穷大时，随机误差的数学期望趋于零。即

$$E(\eta) = E[x - E(x)] = E(x) - E(x) = 0$$

说明：

1) 随机误差的参考量值应确保是同一个被测量无穷多次重复测量的平均值。因此，随机误差可理解为测得量值减去同一个被测量无穷多次重复测量的平均值。而同一个被测量无穷多次重复测量的平均值就是数学期望值。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = E(x) \quad (1-7)$$

所以，随机误差等于测得量值减去数学期望。其中，算术平均值是以频率定义的，数学期望是以概率定义的。当测量次数 n 无穷大时，频率即为概率，此时算术平均值和数学期望是一回事。

2) 因为测量次数不可能作为无穷多次，因此只能确定随机误差的估计值。

3) 随机误差等于测量误差减去系统误差。即

$$\eta = \delta - \varepsilon \quad (1-8)$$

4) 过去沿用的“偶然误差”概念不再必要。

在相同的测量条件下多次测量同一量时，误差的绝对值和符号变化时大时小、时正时负，没有确定的规律，那么就称这种误差为随机误差。

随机误差是大量的随机因素综合影响而产生的误差，它在数值上相对于测量值来说是很小的。从数学的观点上看，它是一个连续型随机变量。

随机误差就单个而言是没有什么规律的，但其从总体来说是服从某一概率统计规律的。因此，可用概率论和数理统计的方法对它进行研究，以便掌握无规律随机误差的某些规律，确定随机误差对测量结果的影响，并通过对测量数据的适当处理，尽可能消除随机误差对测量结果的影响。

换一个角度来说，随机误差实际上是一种不确定性误差，而不确定性误差是以不确定度表征的误差。

通过随机误差的数学表达式可以看出，这是一个数学定义，或者说是一个理想概念。在实际工作中，测量次数不可能做到无穷大，因而数学期望也无法得到。一般在测量次数有限的情况下，可以用算术平均值作为数学期望的最佳估计值，以测量列的一个测得值与其算术平均值之差来表示随机误差。不过在测量次数有限时，数学期望和算术平均值是有区别的。因此，我们将“测量列中的一个测得值与该测量列算术平均值之差”称为残差。即

$$\eta = x_i - E(x) \approx x_i - \bar{x} = v_i \quad (1-9)$$

式中 $\bar{x}$ 称为测量列的算术平均值。此时，随机误差的最佳估计值就是残差 v 。残差又称为残

余误差或剩余误差,是指测量列中的一个测得值与该测量列算术平均值之差。记以 v , 即

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad (1-10)$$

残差是计算实验标准偏差和测量不确定度的必不可少的参数。残差有两个特性:

(1) 测量列中 n 个残差的代数和等于零。即

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (1-11)$$

(2) 测量列中 n 个残差的平方和为最小。即

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min \quad (1-12)$$

因而,实际应用中一般都是用测得值减去算术平均值所得值作为随机误差的最佳估计值。

随机误差又称为随机测量误差、测量的随机误差。

二、系统误差

式(1-5)称为数学期望与参考量值的偏离值,一般称为系统误差。VIM 第3版2.18对其定义为:“在重复测量时保持恒定不变或按可预见的方式变化的测量误差分量。”其特点是,测量误差的数学期望即为系统误差。即

$$\begin{aligned} \delta &= x - \mu \\ E(\delta) &= E[x - \mu] = E(x) - \mu = \varepsilon \end{aligned} \quad (1-13)$$

说明:

1) 系统误差的参考量值可以是被测量的真值,或是给定的约定量值,或是测量不确定度可忽略不计的测量标准赋予的量值。因此,系统误差可理解为同一个被测量无穷多次测量的平均值减去被测量的参考量值。同一个被测量无穷多次测量的平均值就是数学期望。所以,系统误差等于数学期望减去参考量值。

2) 系统误差等于测量误差减去随机误差。即

$$\varepsilon = \delta - \eta \quad (1-14)$$

3) 与量的真值一样,系统误差及其原因不能完全知道。

通过系统误差的数学表达式 $\varepsilon = E(x) - \mu$ 可以看出,这是一个数学定义,或者说是一个理想概念。在实际工作中测量次数 n 不可能无穷大,因而数学期望不能真正得到,而参考量值是指约定量值或标准量值。所以,我们只能确定系统误差的估计值。

如果用算术平均值作为数学期望的最佳估计值,根据测量误差定义有

$$\delta = x - \mu = [x - E(x)] + [E(x) - \mu] \approx [x - \bar{x}] + [\bar{x} - \mu] \quad (1-15)$$

因此系统误差的最佳估计值可表示为

$$\varepsilon = E(x) - \mu \approx \bar{x} - \mu \quad (1-16)$$

此时系统误差的最佳估计值为算术平均值与参考量值之差。根据式(1-16)可以看出,当测量次数 n 有限时,算术平均值是一个服从正态分布的随机变量。而系统误差表达式中的参考量

值 μ 为一常数,因而系统误差的估计值 ε 的取值具有一定的随机性。当测量次数 n 确定后,算术平均值 $\bar{x}$ 也就随之确定,此时系统误差 ε 也应是一个定值。也就是说,通过适当增加测量次数可以减小随机因素对系统误差的影响。当参考量值的不确定度高到可忽略不计时,有时也会忽略随机误差的影响,通过单次测量即可获得系统误差的估计值。即

$$\varepsilon = x - \mu = \delta \quad (1-17)$$

此时,由于随机误差已忽略不计,因此测量误差就是系统误差。在实际测量中,这种通过单次直接测量获取系统误差的方法已得到普遍应用。根据测量误差定义可知,当测量次数 n 为1时,测得量值只有一个,因此算术平均值不存在,残差也不存在,测量误差即为系统误差。前提条件是参考量值的测量不确定度高到可忽略不计,而且测量条件符合要求。

综上所述,系统误差的估计值可表示为以下两种形式。即

在多次测量中,系统误差的估计值为算术平均值减参考量值。即

$$\varepsilon = \bar{x} - \mu \quad (1-18)$$

在单次测量中,系统误差的估计值为单次测得量值减参考量值。即

$$\varepsilon = x - \mu \quad (1-19)$$

其中,式(1-18)是已考虑随机误差影响的系统误差估计值的表达式;式(1-19)是没有考虑随机误差影响的系统误差估计值的表达式。

系统误差是测量误差的分量,在同一个被测量的多次测量过程中,它保持恒定或以可预知的方式变化,因而有时也称为规律性误差或确定性误差。

系统误差又称为系统测量误差、测量的系统误差。

通过系统误差可以引出“修正”的概念。

VIM第3版2.53对“修正”的定义为:“对系统效应的补偿。”修正可以采用不同形式,诸如附加一个值或乘一个因子,或由图表给出。其中,“值”是指“修正值”,“因子”是指“修正因子”。

修正值是指:以代数法相加于未修正测得量值,以补偿系统误差的值。

说明:

- 1) 修正值等于负的系统误差。
- 2) 由于系统误差不能完全知道,因此这种补偿不完全。

因此,如果用 b 表示修正值,则修正值可表示为

$$b = -\varepsilon \quad (1-20)$$

修正因子是指:为补偿系统误差而对未修正测得量值相乘的数字因子。

修正后的测量结果中,由系统效应引起的系统误差的数学期望为零。

含有误差的测得量值,加上修正值后就可以补偿或减少误差的影响。这也就是说,加上某个修正值,就像扣掉某个测量误差的效果是一样的。

参考量值 = 测得量值 + 修正值 = 测得量值 - 测量误差

在准确的测量和量值传递中,常常采用这种加修正值的直观的办法。用高一个等级的计量标准来检定计量器具,其主要目的之一就是要获得准确的修正值。

通过修正值进行修正后的测量结果,即使仍然存在着不确定度,但还是十分接近被测量的真