

高等学校教材試用本

场 论

薛琴訪編著

只限学校内部使用



中国工业出版社

高等学校教材試用本



场 论

薛琴訪編著

中国工业出版社

“場論”研究的对象是引力場理論（包括勢論基础）和电磁場理論（宏观电动力学）两部分的基本原理及其运用。全书共分四章，并有例題和习题。具体内容有：引力場、重力場、靜电場、电流場、稳定电流磁場、“磁荷”磁場、似穩場和迟变电磁場，从基本原理到具体运用和計算方法都有論述。

本书可供地球物理专业作为“場論”課程的教材，也可以供高等学校相近专业选用和有关工程技术人員及大学生参考。

場 論

薛琴訪編著

*

地质部地质书刊編輯部編輯（北京西四羊市大街地质部院内）

中国工业出版社出版（北京修睦路丙10号）

（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ · 印張 $117/16$ · 字数 302,000

1964年4月北京第一版·1964年4月北京第一次印刷

印数 0,001—1,690 · 定价(科五) 1.70元

*

統一书号: K15165 · 2527(地质-247)

序 言

“場論”研究的对象是引力場理論（包括勢論基础）和电磁場理論（宏观电动力学）两部分的基本原理及其应用，它是勘探地球物理学必需的数理基础之一，是地球物理专业的一門理論基础課。

本书是在对北京地质学院勘探地球物理专业学生讲授此課程的讲义基础上歷經修編而成的。此讲义1961年的修改版也曾为长春地质学院和成都地质学院所采用。这次修編时，也採納了他們所提出的宝貴意見。

本书符合勘探地球物理专业“場論”教学大綱要求，貫徹少而精的原則，內容簡明扼要，推理力求严格。书中有大量例題說明原理的运用，书后附有习题及答案。

在学时較少情况下使用此书时，可以只讲授其中最基本的内容，酌量刪去一部分較深的节段及一些較难的証明和复杂的例題。

本书在編写过程中，曾广泛征求过許多同志的意見，得到他們的鼓励和帮助，吸取了他們的宝貴建議，还有施国良、張培义、肖敬涌、傅良魁等同志帮助审閱，特此表示謝忱。

本书的編写，限于作者的水平，难免有不妥善、甚至錯誤之处，取材和編排也还存在問題，誠懇地希望讀者和专家們多提宝貴意見，以資修訂。

注意，本书用黑体字表示矢量，而在图中則用帶有箭头的符号表示矢量。

薛琴訪

1963年1月10日

目 录

序 言

绪 论	1
§ 0.1 场论研究的对象和任务	1
§ 0.2 场的物理本质	2
§ 0.3 场的数学研究方法	7
第一章 引力场	13
§ 1.1 场强度	13
§ 1.2 引力场的第一基本定律 (场强度的通量和散度)	22
§ 1.3 引力场的第二基本定律 (场强度的环流和旋度)	28
§ 1.4 引力场的势及其梯度	31
§ 1.5 具有面质量分布的场 场强通过面分布的连续性	36
§ 1.6 泊松方程和拉普拉斯方程 引力场的典型问题	41
§ 1.7 泊松方程的积分 格林函数 狄义赫利问题和诺依曼问题	49
§ 1.8 平面场和对数势	57
§ 1.9 重力场	64
第二章 稳定电场	81
§ 2.1 真空中的静电场	81
§ 2.2 偶极子场	86
§ 2.3 电介质中的静电场	91
§ 2.4 电介质场中的边界条件和典型问题	96
§ 2.5 静电场的能量	100
§ 2.6 导体中的稳定电场——电流场	103
§ 2.7 电流场中的边界条件和典型问题	108
§ 2.8 电流场的能源 外来电动势	113
§ 2.9 势场问题的解法及其解的唯一性	115
§ 2.10 格林互换定理	119
§ 2.11 电象法	121
§ 2.12 解电流场的静电类比法	133
§ 2.13 用球谐函数求解势场问题	139
§ 2.14 用柱谐函数求解势场问题	153

§ 2.15 用共軛函數求解二度體問題	171
第三章 穩定磁場	184
§ 3.1 穩定電流磁場的實驗定律	184
§ 3.2 磁場的矢勢	190
§ 3.3 穩定電流磁場的基本定律	196
§ 3.4 元電流的磁場	198
§ 3.5 磁介質中的穩定電流磁場	204
§ 3.6 磁場的邊界條件和完整方程式組	208
§ 3.7 磁場的標勢 磁荷的概念	212
§ 3.8 電流和磁殼的等效性	214
§ 3.9 引力勢與磁勢的關係 泊松公式	217
§ 3.10 鐵磁介質存在時的磁場	221
§ 3.11 磁場問題的例解	225
第四章 可變電磁場	239
§ 4.1 電磁感應定律	239
§ 4.2 位移電流	242
§ 4.3 電磁場方程組——麥克斯韋方程	246
§ 4.4 電磁場的能量守恒及伍莫夫·坡印亭矢量	251
§ 4.5 似穩場	256
§ 4.6 電磁波方程	264
§ 4.7 無限均勻理想電介質中的平面波	266
§ 4.8 波在無限均勻導電媒質中的傳播	273
§ 4.9 電磁場的勢(一)	281
§ 4.10 達朗貝爾方程的解 推遲勢	284
§ 4.11 電磁場的勢(二)	297
§ 4.12 赫姆霍茲方程在圓柱坐標中的解 矢勢的邊界條件	304
附 錄	328
附錄一 矢量分析中最重要的公式	328
附錄二 直角坐標、圓柱坐標與球坐標的場量運算公式表	331
附錄三 場論基本公式匯編	332
附錄四 證明 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$	346
習題及其答案	347

緒 論

§ 0.1 場論研究的对象和任务

在場論這門課程中，我們將要研究引力場、穩定電場（包括靜電場和電流場）、穩定磁場（包括穩定電流磁場和「磁荷」磁場）和可變電磁場（包括似穩場和迅變場）四個部分。這裡只涉及到古典場論內研究的範圍。

這些場的存在常以某種確定的關係與場中存在的實物的某種性質密切聯繫着。比如，引力場的存在就和空間內存在的實物的引力質量的分布有密切聯繫，靜電場的存在和實物所帶電荷的電量有密切聯繫，電流磁場的存在和實物中的電流分布有密切聯繫。因此，我們常常地把具有這些性質（質量、電荷、電流）的實物當作場源看待。引力質量^①可以視為引力場的場源，靜止電荷可以視為靜電場的場源，電流可以視為磁場的場源。當然從場的物質性觀點看來，場和場源（實物）之間並沒有主從之分，而是並存於空間內，且有密切聯繫的兩種不同形態的物質。

場和場源之間的關係是場論中研究的主要課題。人們根據大量實驗的結果對場和場源間的關係已總結出若干基本定律，比如在1687年，牛頓首先對所有物體質量間的吸引力總結出萬有引力定律，1785年庫倫對靜止電荷間的相互作用力總結出庫倫定律，1825年安培對電流間的相互作用總結出安培定律，1831年法拉第對變化磁場激發電場總結出電磁感應定律。場的理論就是在這些基本（實驗）定律的基礎上，更進一步深入研究的性質和場源間的關係。十九世紀末葉，麥克斯韋研究了電磁現象的規律的內在統一性，把它們歸結為麥克斯韋方程，並由此發現了電磁波，建立了光的電磁理論，至此宏觀電磁場論已發展到十分完善

① 這裡把實物的特性來代表場源物體。

的地步，在各門科学上和各種技術上有廣闊的應用。

在勘探地球物理学中，幾種常用的勘探方法如重力勘探、磁力勘探和電法勘探就是利用自然的和人工的物理場的分布和變化來研究地殼的地质構造和尋找有用礦床的。這些物理場就是引力場、磁場、電場和電磁場，也就是我們在場論中所研究的幾種場。因此我們可以說，場論是勘探地球物理学的物理基礎。勘探地球物理学中最主要的物理原理都要在場論中詳細討論。如重力和磁力勘探中要用到的正演問題和反演問題，解的唯一性問題；磁力勘探中要用到的均勻磁化球的磁場分布問題，用引力勢表示磁勢問題；電法勘探中用到的三度空間電流理論，電象法原理，勢場問題的解法，交變偶極子場的分布問題等等，所有這一些問題涉及到的原理都要在場論中詳細討論。此外，勘探地球物理儀器的設計和勘探方法的原理也都要用到場論的理論。因此場論的任務就是為勘探地球物理学打下鞏固的理論基礎，不僅為目前學習重力、磁法和電法勘探課程打基礎，而且還要為這些勘探方法進一步發展提高打基礎。一方面要教給學生場論知識，另一方面還要教給學生掌握解場論問題的一般方法和培養學生獨立思考能力。我們只有掌握了基本原理並獲得了獨立工作能力，我們才能靈活運用場論知識去解決實際問題。

§ 0.2 場的物理本質

在客觀世界所進行的各種物理過程中，我們總可以指出客觀存在的某種物質客體的，這些客體是客觀的實在，不依賴於人們的意識而存在，但為人們的意識所反映。這些客體可能是實物，如物體、分子、原子、核子、電子等。這樣的客體一般說來容易感覺其存在。除實物外，還有另一種客體——場的存在。這種客體不容易直接覺察到。最初只認識它的某些作用，如引力場有對實物施一機械力的作用，電磁場有對電荷或電流施一機械力的作用，這些作用是場這種客體對實物的接觸作用。隨着近代物理學的發展，我們認識了場除對實物作用外，還有許多其它物理性質，

如場具有质量、能量和动量，这些物理性质是場这种客体的运动屬性。因此場这种客体就逐渐为我们所熟知了，場是物质的一种形态也成为大家所共同承认的事实。现在为了深刻認識場是物质的一种形态，我们将这两种客体（場和实物）的共同特征和差异作一比較分析。

場与实物的共同特征

(1) 場和实物的形式、結構和屬性是多种多样的，具有无限多样性。实物包括有物体、分子、原子、电子及其它基本粒子。場也具有各种不同形式的場如引力場、电磁場和核力場等。

(2) 場和实物一样，具有一定的质量、能量和动量。实物具有这些物质屬性比較明显，但場具有这些物质屬性还需要作一些簡明的描述。

从麦克斯韦电磁場理論可知，可变电磁場当以电磁波的形式（光）傳播时，会給实物以压力。俄国物理学家 П. Н. 列別捷夫克服了所有实验上的困难，在实验室中証明了光（电磁波）对固体施以压力（1900），也对液体施以压力（1910）。

根据古典力学原理可知，压力应该等于施压力的客体（光）的动量改变。設光綫射到完全吸收面（绝对黑体表面）上时，光的速度就由 c 变到零。因此光的动量改变就等于光的质量 m 和速度 c 之积，即

$$p = mc$$

又从古典电磁理論知道，光压力 p 的大小决定于下列公式：

$$p = \frac{w}{c},$$

式中 w 表示单位時間射到完全吸收表面上的光通量的能量， c 表示光的速度。现在将光的动量改变等于 mc 这一实验事实和光压从理論計算的值加以比較，即得

$$\frac{w}{c} = mc$$

由此可知

$$m = \frac{w}{c^2}, \quad w = mc^2$$

从列別捷夫所确定的光压事实可以得出下面的結論：电磁場和实物一样，具有确定的质量 m 、动量 mc 和能量 mc^2 。

直接由列別捷夫的實驗得出的关系式 $w = mc^2$ 确定了电磁場的能量 w 与质量 m 之間的关系，后来相对論証明了这个公式对能量和质量的任何形态都是正确的。这就是能量和质量相互联系的普遍定律。

(3) 場和实物的基本粒子一样，具有微粒性和波动性。

光（电磁場）的波动性特別明显的表現在繞射干涉諸現象中。后来在物理学中又发现了电子、中子及中性原子也有繞射現象（1927），这就証明了不仅电磁場有波动性，而且实物粒子也有波动性。

另一方面，实物的粒子性特別明显，古代人就已經提出了实物由原子組成的概念。現在我們知道組成实物的基本粒子已有数十种之多，而且还在繼續发现，不可穷尽地发展着。同时，自量子論发现以后（1900），近代物理学发现了电磁場和实物粒子一样也有微粒性。电磁場的基本粒子叫做光子。

設以頻率 ν 和波长 λ 表示波的特性，以能量 ε 、动量 p 和质量 m 表示粒子特性。我們可以用微粒观点也可以用波动观点来描述場和实物粒子的运动状态，二者之間的数量关系为

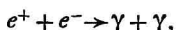
$$\varepsilon = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

波动性和微粒性是实物粒子所固有的，也是場所固有的。在古典物理学中，这两个屬性是不相容的，但在量子力学中，这两个矛盾对立的屬性能够統一起来。这种对立統一只有在辯証唯物主义的基础上才能理解。

(4) 場和实物一样只能由一种形态轉換成另一形态，不会无中生有，也不会无影无踪的消失。一切客體（場与实物的基本粒子）之間有相互轉換性，而且在轉換过程中須服从下列守恒及

轉換定律：(a) 质量守恒及轉換定律；(b) 能量守恒及轉換定律；(c) 质量和能量相互联系定律；(d) 动量和动量矩守恒及轉換定律。

实物粒子在一定条件下可以結合而产生电磁場，如正电子和負电子（实物）結合可以产生 γ 射綫（場）：



这时电子所失去的能量、质量和动量完全按守恒定律轉換为 γ 射綫的能量、质量和动量。同时我們知道，在一定条件下 γ 射綫亦可以轉換为一对电子。由此可知，实物粒子可以轉換为場，而場也可以轉換为实物粒子。因此場和实物应看作物质的两种形态。

在一定条件下，电场和磁场間可以发生相互轉換。例如在电容器及电感的振蕩回路中，时而电容器中的电场轉換成电感中的磁场，时而作相反的交换。这时电容和电感遵循守恒定律而相互交换能量。又如在电磁波傳播的过程中，不断由电场轉換产生磁场和由磁场轉換产生电场。两种場在这种情况下时时遵循守恒定律而相互交换能量：
$$\frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}。$$

場与实物之間的差异

(1) 任何实物接触时都会产生机械作用，但不同的場接触时并不产生机械作用。而且不同的場有不同的特征性质，仅对不同实物粒子产生机械作用。例如引力場仅对引力质量作用一机械力，电场仅对电荷作用一机械力，磁场仅对运动电荷或电流作用一机械力，电磁場仅对吸收电磁場的表面作用一机械力。

(2) 一切实物所具有的空間，不能同时又是另一实物所具有的空間。与此相反，同一空間內可以同时存在着許多不同的場，而未发现其相互影响。对于不同来源的电磁波也是如此。在同一空間內可以存在任意数量的不同来源的光子而彼此互不影响。

不但如此，場和实物也可以相互滲透，二者可以具有同一空間，这时場可以改变实物的状态，而实物也影响場的分布。例

如，当一电介质放在电场中，电场将引起介质极化，同时极化介质也改变电场的分布。

(3) 一切实物可以在外力作用下作加速或减速运动。速度的大小在任何时候都不能达到光速。但对于自由传播的电磁场而言，变速运动是不存在的，在真空中，电磁场的基本粒子(光子)只能以光速运动，否则就根本不存在。

实物由于作变速运动，因而有静止质量存在，光子由于等速运动($v = c$)，因而没有静止质量存在。

(4) 实物具有比场大得无比的质量密度和能量密度。一般场内的质量密度极其微小，只有在核反应时场的质量才具有可以量度的大小。虽然不可能量度场的质量，但我们都容易发现场的能量，因为后者比前者大 c^2 倍。

从以上对场和实物的比较分析，知道场这种客体的存在是很明显的，场是物质的一种形态也是不容怀疑的。但是在历史上我们对场的认识是有一段过程的。现在我们来简单地回忆一下这个历史过程。

场这个概念是人们开始研究引力质量相互作用(引力场)，或者电荷相互作用(静电场)的时候就已经产生了。但对场的本质的描述，最初是很不正确的。因为当时有不少的科学家认为这些质量或电荷的相互作用是一种超距性质的作用，不需要借助中介空间的任何反应。因而在这种场合下，场的概念仅起着单纯的辅助性质的作用，只是一种计算超距作用的方法和手段，这是一种否认场的客观存在的说法，显然是不正确的，物体会超空间而相互作用也是不可思议的。

除超距作用外，人们也认识到场的某些作用，如场对实物的作用。除了这些作用之外，人们长时期不能认识这种客体任何其它性质。因而有把场这种客体与它的作用分开的企图。把场看成[力的表现场所]，或[力起作用的空间]。这就等于说某种东西不存在，而其作用(属性)可以脱离客体而独立存在。又例如有人把场看成[空间的特殊状态]或空间内进行的[特殊物理过程]，这

就等于說某种客体不存在，而其存在形式（空間）具有特殊状态或进行特殊物理过程。同时把「空間」看成脱离客体本身而存在的東西。这些說法，一方面将物质屬性和物质本身混淆不清，另一方面把形式（空間）和內容（物质客体）分离，从而忽視了場这种物质客体的存在，因而是不正确的。

此外还有一种把場与它的作用分离的企图，就是把場想象为以太的一种形态。据說以太是一种充滿宇宙的媒质，整体不动的，絕對靜止的，永远不变的。以太类似彈性介质，可以处于彈性形变的特殊状态中，傳播电磁波，并在其中进行某种特殊的物理过程。从唯物論的观点来看，以太假說是有一定进步意义的，因为它有把場看成客体的企图。但在 19 世紀末和 20 世紀初，在物理学的发展过程中，发现了宇宙媒质（以太）这一概念和物理事实矛盾。实验証明（迈克逊、摩勒实验），关于某种絕對不动的宇宙媒质的任何假說都与物理事实不符，因而物理学根本放弃了这种以太假說，这也印証了辯証唯物主义关于物质运动的学說。随着以太假說的被否定，把場当做「以太的特殊状态」来研究，也就毫无根据了。

随着近代物理的发展，我們認識了場除对实物作用外，还有许多其它物理性质，如場具有一定的质量、能量和动量。这些都是运动物质的屬性。质量表示物质运动的慣性及引力屬性。能量和动量表示物质运动状态的量度。此外还发现場具微粒性和波动性，場与基本粒子可以互相轉換等。所有这些都是运动物质的屬性。所以我們唯一正确的結論就是：場不是別的而是客体，是物质的一种形态。它与物质的另一形态——实物同时存在着，密切相互联系着。它們不仅相互决定着它們的运动形态和屬性，而且在一定条件下还能相互轉換。

§ 0.3 場的数学研究方法

研究場論和研究物理学其它部分一样，都是不能离开数学工具的。當我們研究場的客觀規律时，我們总离不开要研究它的数

量关系，这些数量关系必須要用数学公式来表示。一定的客觀規律，必須用一定的数学形式才能表示出来。下面列举这些数学表达形式就是为了表示場論中各种客觀物理規律而引入的。

(1) 場的函数表示法 在一个物理場中，在任何一点 $P(x, y, z)$ 上，我們总可以找到一物理量来描述該点的物理性质。如果所找到的物理量是一个标量，那么这个場就是一个标量場，如果所找到的是一个矢量，那么这个場就是一个矢量場。在不同点上，一般說来，物理量具有不同的值，而且是連續变化的，这就是說，无限靠近两点，物理量之值无限接近。因此在一个标量場中，物理量是位置坐标的函数，所以用一个标量函数 $U(x, y, z)$ 来表示。同样，在一矢量場中，物理量是位置坐标的矢量函数，所以用一个矢量函数 $F(x, y, z)$ 来表示。例如靜電場的势就是一个用标量函数表示的标量場，靜電場的电場强度就是一个用矢量函数表示的矢量場。一般說来，无论标量函数 $U(x, y, z)$ 或矢量函数 $F(x, y, z)$ 都是連續而有限的。

除位置坐标外，标量函数和矢量函数也可以是時間的函数，如 $U(x, y, z, t)$ 和 $F(x, y, z, t)$ 。相当于这样函数描述的場叫做可變場或非穩定場（如可變电磁場），而不随時間而变化的場則叫做穩定場。

(2) 場的图形表示法 除用点函数来描述場的物理性质外，为了形象地表示場的分布，我們常在場中按一定規則繪出曲面或曲綫来表示場中物理量的分布。

例如在标量場中，我們常常将标量函数值相等的諸点連接起来，构成一个或几个分离曲面，这些面称为等值面（如等势面）。每間格一定的函数值，繪出某一些等值面，結果得到一系列的等值面。这些等值面的稀密程度，就表示标量函数的分布状态。显然等值面密集之处，标量函数的空間变化快；反之，等值面稀疏之处，标量函数的空間变化慢。这种分布情况，从图中是一目了然的。

又如在矢量場中，我們常常作这样的曲綫，使曲綫上每一点的

矢量指向这曲线的切线方向，这种曲线叫做矢量线（如电力线）。矢量线的稀密度是这样规划的，使在每一点上通过单位横截面积内的线数等于该点的矢量函数，这叫做矢量线的通量。这样绘出的矢量线，既表示矢量函数的方向，又表示它的数值。这种形象化的场的分布，从图中也是一目了然的。

场的图示法的实际运用是很广的。例如在勘探地球物理学中，我们常将重力测量的结果绘成等重力线，由等重力线的形状和分布可以确定矿体的形状和位置。又如我们常将测得的重力变化值绘出平面矢量图。这就是说，在每一测点上画一小箭头，其方向和重力增加方向相同，其大小和重力变化率成正比例。因为我们知道愈接近密度大的矿体，重力异常值愈大，所以表示重力变化率的箭头指向密度较大的矿体，从而可以由平面矢量图来确定矿体的位置。

（3）场的空间变化 无论用标量函数或矢量函数来描述场中每一点的性质，或者用等值面或矢量线来形象化地描述场的分布，都只是做到了从一静的观点来表示场的分布的，因为我们仅对场中每一点给出某一确定的标量或矢量来描述该点的物理性质。为了深刻了解场的性质，我们还须从一动的观点或变的观点去研究场的空间变化，这就是说，我们要研究每一点与其邻近各点之间的空间变化关系。这里有两方面空间变化关系：空间微分变化与空间积分变化。对于空间微分变化方面，我们将研究一标量的梯度变化和二次微商变化，以及一矢量场的散度变化（标量空间微商）和旋度变化（矢量空间微商）。对于空间积分关系方面，我们将研究一矢量场的环流（线积分）和通量（面积分）。

梯度 在一物理场中，某一标量函数 U 在任意 P 点的梯度，等于 U 在该点的最大空间变化率（方向导数），即

$$\text{grad } U = \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{n},$$

式中 $\mathbf{n}$ 为沿最大方向导数方向的单位矢量。每一点的梯度都是一矢量，因此组成一矢量场。

散度 散度是一矢量場的場矢量 F 的一种空間导微运算, 即

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

这里我們取場矢量的 x 分量 F_x 对 x 的偏导数, 場矢量的 y 分量 F_y 对 y 的偏导数, 場矢量的 z 分量 F_z 对 z 的偏导数, 因此我們可以說散度是矢量 F 在沿矢量分量方向上的空間变化率。

旋度 旋度是一矢量場的場矢量 F 的另一种空間导微运算, 即

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F = & i \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \\ & + k \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

这里我們取場矢量的 x 分量 F_x 对 y 和 z 的偏导数, 場矢量的 y 分量 F_y 对 z 和 x 的偏导数, 場矢量的 z 分量 F_z 对 x 和 y 的偏导数。因此我們可以說, 旋度是矢量 F 在垂直于矢量分量方向上的空間变化率。

由此可見, 梯度、散度和旋度都是場量的空間变化率。从这些空間变化率我們可以了解場量的空間分布状态及其特征性质, 从而發現場的客觀規律。我們知道場論的許多規律都是用这些空間变化率表示出来的。例如靜电場的两个基本定律, 一个就是电場强度的旋度等于零, 另一个就是某点电場强度的散度等于 4π 倍于該点的电荷密度。如果不研究旋度和散度这两个空間变化率, 这样两个定律是很难表示出来的。

拉普拉斯运算 除了研究上述三个‘度’表示的場量的一阶偏导数外, 我們还要研究場量的二阶偏导数, 即場量的空間变化率的变化率。在物理学中最常用的一个二阶偏导数就是一标量場的散度梯度:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

式中 ∇^2 称为拉普拉斯算符。这个二阶偏导数之所以重要, 就是因为它表示了许多物理問題的客觀規律。如在引力場和靜电場中, 最后总结出的基本定律就是用这个二阶偏导数表示出来的泊松方

程式和拉普拉斯方程。通常 $\nabla^2 U$ 并不等于零（泊松方程），可是在許多物理問題里， $\nabla^2 U$ 常因物理条件而等于零（拉普拉斯方程）。例如在靜电学中，在任何不包含电荷的空間內，电势的拉普拉斯运算就等于零。

除一标量場的拉氏运算外，还有一矢量場的拉氏运算也很有用。一矢量 F 的拉氏运算写成 $\nabla^2 A$ ，它的意思是

$$\nabla^2 A = \nabla^2 (iA_x + jA_y + kA_z).$$

所以一个矢量場的拉氏运算是这个矢量場的三个无向分量的拉氏运算的矢量和。我們通常知道一个矢量場的拉氏运算并不等于零，除非 A_x 、 A_y 、 A_z 三个分量的拉氏运算各别独立的等于零时，它才等于零。

通量 除上述空間微分变化外，我們还要研究場量的空間积分关系。首先来研究通量关系。場矢量 F 通过某一 S 面的通量 N 的定义为

$$N = \int_S F \cdot n ds,$$

式中 n 表示沿正法綫方向的单位矢量。这个量之所以重要，一方面由于它本身常有明确的物理意义，如在电流場中，电流密度的通量就是单位時間內通过 S 面的电量；另一方面由于对于任意閉合面 S 和体积 v 我們有下列定理（奧斯特洛格拉得斯基·高斯定理）存在：

$$\oint_S F \cdot n ds = \int_v \text{div } F dv.$$

这个定理說明場中任意区域內的表里联系关系，即将場中任何閉合面 S 上的場矢量的通量（面积分）与此面內部場矢量的散度的体积分关联起来。

环流 其次，我們来研究环流关系。場矢量 F 沿一閉合曲綫 L 的环流的定义为

$$\Omega = \oint_L F \cdot dl.$$