高等学校独立学院教材

微积分解题方法与技巧

WEIJIFEN
JIETIFANGFAYU
JIQIAO

主　编　马传渔
南京大学金陵学院

南京大学出版社

等学校独立学院教材

微积分

解题方法与技巧

主　编　马传渔
南京大学金陵学院

南京大学出版社

内容提要

本书是南京大学金陵学院编著使用的经济管理类《微积分》教材的系列配套用书。内容包括函数、函数的极限、函数的连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、反常积分，以及微积分的几何应用与经济应用。

本书内容强调知识板块之间的有机联系，突出各类题型的归纳和剖释，综述解题技巧、方法的掌握和应用，有助于微积分知识的牢固掌握和解题能力的快速提升。

本书可作为大学经济管理类学生的微积分学习的教学参考书，也可作为高等学校独立学院的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分解题方法与技巧/马传渔编著. —南京：南京大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-305-09659-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①微积分—高等学校—题解 Ⅳ. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 022539 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 微积分解题方法与技巧
主　　编 马传渔
责任编辑 王振义
审读编辑 段晓韦

照　　排 南京大学印刷厂
印　　刷 南京大学印刷厂
开　　本 787×960　1/16　　印张 21.25　　字数 404千
版　　次 2012 年 3 月第 1 版　　2012 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-09659-4
定　　价 43.00元

发行热线 025—83594756
电子邮件 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

南京大学金陵学院编著使用的《微积分》(经济管理类)上、下两册自2007年由高等教育出版社出版,截止到2011年6月已进行了三次印刷,本书的实用性、指导性逐渐得到广大读者的认可。而与这两册书配套的两本使用教材《微积分解题集萃》和《微积分培优读本》自2009年由南京大学出版社出版至今,也同样受到读者的欢迎。现在,另一本《微积分》系列教材《微积分解题方法与技巧》与大家见面了。在本次编写中突出以下几点:

第一,突出传授知识,根据经济管理类本科数学基础课的要求,在与《微积分》教材同步的基础上,归纳内容、拓宽知识,有利于学生打好扎实的数学基础。

第二,突出"三基"训练,授之以渔,突出解题方法技巧的分类、理解、剖释、掌握和运用,有利于学生解题能力更臻完美。

第三,突出层次性,全书穿插引入《微积分》教材内的课本题、自编题和近十年的经济类硕士研究生的考题。由浅入深、铺垫恰当、便于自学、方法尽显。有利于学生数学素质的培养和数学解题能力的快速提升。

第四,突出实用性和应用性,针对独立学院的办学特色及教学需求。书中着重介绍微分的经济应用和积分的经济应用,有利于学生可持续发展和提高解决实际问题的能力。

第五,突出解题技巧,全书共八章,每章节开头作梳理知识,归纳解题方法,例题中出现的"注"防止错解,启迪智慧,例题的结构和内容具有举一反三的作用。

本书是南京大学金陵学院教学改革的成果。藉此机会感谢金陵学院院长王殿祥教授和副院长邵进教授的指导和厚爱,感谢基础部主任钱钟教授和教务处主任王均义教授的关心,感谢关心本书出版的所有朋友。

本书由马传渔教授主编,庄凯丽参加第六章、第七章、第八章编写;袁明霞参加第一章、第二章、第三章编写;马荣参加第四章、第五章编写。

本书可作为经济管理类本科生《微积分》解题指导的参考书,也可供各类高等学校学生阅读。

由于水平有限,不当之处在所难免,恳请专家、同行和读者不吝赐教。

马传渔

2011年11月11日

目　　录

第一章　函　　数

1. 常用的逻辑符号

(1) 符号"$\forall$"表示"对任何"之意.

(2) 符号"$\exists$"表示"存在"之意.

(3) 充分必要条件"$\Leftrightarrow$",它由必要条件"$\Rightarrow$"与充分条件"$\Leftarrow$"组成.

$P \Rightarrow Q$,表示命题 P 的必要条件是 Q,即由 P 可推出 Q.

$P \Leftarrow Q$,表示命题 P 的充分条件是 Q,即由 Q 可推出 P.

$P \Leftrightarrow Q$,表示命题 P 的充分必要条件是 Q,即命题 P 与命题 Q 是等价的.

2. 邻域与去心邻域

(1) δ 邻域.

取定 $x_0 \in \mathbf{R}$ 及实数 $\delta > 0$,则开区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\ \delta)$,即 $U(x_0,\ \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$,亦即

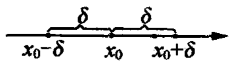

图 1-1

$$U(x_0,\ \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

称 x_0 为邻域中心,δ 为邻域半径(见图 1-1).

(2) 去心 δ 邻域.

若将邻域 $U(x_0,\ \delta)$ 的中心 x_0 去掉,就得到点 x_0 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\ \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

亦即
$$\mathring{U}(x_0,\ \delta) = \{x \mid x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \delta)\}.$$

通常,称 $(x_0 - \delta,\ x_0)$ 为点 x_0 的左 δ 邻域,$(x_0,\ x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的右 δ 邻域.

§1　函数的定义域与值域

1. 函数的定义

设 $x,\ y$ 是两个变量,D 是一个非空实数集合,$\forall x \in D$,如果按一个对应法则 f,总有唯一确定的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x),\ x \in D$. 又称 x 为自变量,x 的取值范围 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域,称 y 为因变量或函数.

常用的函数表示法有 3 种:解析法(又叫公式法)、表格法和图形法.

在 xOy 平面上建立直角坐标系,则函数 $y = f(x)$ 在 xOy 平面上的图形通常为曲线.

记 $\mathrm{graph} f = \{(x,\ y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$,称 $\mathrm{graph} f$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形或图像. 比如,$y = x^2$ 的图形是一条抛物线,即 $\mathrm{graph} x^2$ 是一条抛物线(见图 1-2).

2. **函数的定义域的求法**

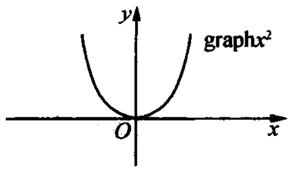

图 1-2

用解析式给出的函数，其定义域是使得解析式有意义的一切实数所组成的集合，称这样的定义域为自然定义域. 实际问题中函数的定义域是由问题的背景确定的.

常用以下几条法则求函数的自然定义域：

(1) 分式中分母不能为零；

(2) 偶次根式内的式子应大于等于零；

(3) 对数函数中，真数必须大于零；

(4) 函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 中，$x\in[-1, 1]$；

(5) 函数 $y=\tan x$ 中 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$y=\cot x$ 中 $x\neq k\pi$.（$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$）

3. 函数定义中有两个基本要素：定义域与对应法则. 因此，只有当两个函数的定义域与对应法则完全相同时，才认为它们是同一函数.

为验证对应法则相同，常在相同的定义域内任取一点，证明其函数值相同.

4. 函数在经济中的应用，产品生产的总成本由固定成本和可变成本两部分组成. 固定成本 C_0 一般为常数，可变成本是随产量 Q 的增加而增加的，应是 Q 的函数，记为 $C_1(Q)$，总成本函数

$$C(Q)=C_0+C_1(Q).$$

总成本函数 $C(Q)$ 简称为成本函数，若记

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q},$$

则 $\overline{C}(Q)$ 就是平均成本函数.

总收入是指生产经营者生产或销售 Q 个产品后所得的全部收入，即通常所称的毛收入，它是 Q 的函数，如产品的单位售价为 p，则总收入函数为

$$R(Q)=pQ.$$

$R(Q)$ 也简称为收入函数.

总利润等于总收入减去总成本，故总利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

【题 1】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-9}$； (2) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$；

(3) $y=\arcsin(x-3)$； (4) $y=\tan(x+1)$.

【解】 (1) 为使 $y=\sqrt{x^2-9}$有意义，x 需满足 $x^2-9\geqslant 0$，即 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 3$，则该函数定义域为 $D=(-\infty,\ -3]\cup[3,\ +\infty)$.

(2) 为使 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$有意义，x 需满足$[x+1]\neq 0$. 因当$-1\leqslant x<0$ 时，根据取整函数的定义有$[x+1]=0$，故其定义域为去掉$-1\leqslant x<0$ 的任意实数的集合，即$(-\infty,\ -1)\cup[0,\ +\infty)$.

(3) 为使 $y=\arcsin(x-3)$有意义，需使$-1\leqslant x-3\leqslant 1$，则该函数的定义域为 $D=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 4\}$.

(4) 为使 $y=\tan(x+1)$有意义，需使 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\ \pm 1,\ \cdots)$，则该函数定义域为 $D=\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\right\}$.

【题 2】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$； (2) $y=\arcsin[\log_2 x]$； (3) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$.

【解】 (1) 要使 y 有意义，必有 $1-x^2\neq 0$ 且 $x+1\geqslant 0$.

即$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+1\geqslant 0\end{cases}$的交集为所求定义域，解之得$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -1.\end{cases}$

故所求定义域为$(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

(2) 当$-1\leqslant\log_2 x\leqslant 1$ 时，y 有意义，解之得到$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

即所求定义域为$\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$.

(3) 为使 y 有意义，x 需满足$\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0,\\ \lg(2x-1)\neq 0,\\ 2x-1>0,\end{cases}$解之得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 1,\\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

即所求定义域为$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)\cup(1,\ 2]$.

【题 3】 设 $f(x)$的定义域为 $D=[0,\ 1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$； (2) $f(x+a)\ (a>0)$.

【解】 (1) 因 $f(x)$的定义域为 $D=[0,\ 1]$，故 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，即$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $f(x^2)$的定义域为$[-1,\ 1]$.

(2) 因 $0\leqslant x+a\leqslant 1,\ a>0$，故$-a\leqslant x\leqslant 1-a$，即 $f(x+a)$的定义域为

$$\{x\,|\,-a\leqslant x\leqslant 1-a,\ a>0\}.$$

【题 4】 求函数 $y=\ln(1-\cos 2x)$ 的值域.

【解】 **方法一** 令 $u=1-\cos 2x>0$,因 $-1\leqslant\cos 2x\leqslant 1$,故 $0<u\leqslant 2$.

则 $-\infty<\ln u\leqslant\ln 2$. 即该函数值域为 $(-\infty,\ \ln 2]$.

方法二 利用反函数去求.

易求得该函数的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}\arccos(1-e^x)$,其定义域为 $D=\{x\mid -1\leqslant 1-e^x<1\}=\{x\mid -\infty<x\leqslant\ln 2\}$. 根据反函数的定义域即为原函数的值域,得该函数值域为 $(-\infty,\ \ln 2]$.

【题 5】 求函数 $y=\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$ 的值域.

【解】 因 $y=2+\dfrac{1}{x^2+x+1}$,可先求 $u=x^2+x+1$ 的值域.

又 $u=x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$,故 $u\geqslant\dfrac{3}{4}$,则 $0<\dfrac{1}{u}\leqslant\dfrac{4}{3}$.

而 $y=2+\dfrac{1}{u}$,故 $2<y\leqslant\dfrac{10}{3}$.

即该函数值域为 $\left(2,\ \dfrac{10}{3}\right]$.

【题 6】 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$; (2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

【解】 (1) 不同. 因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$.

(2) 不同. $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,而 $f(x)=x$,两者对应法则不同.

(3) 相同. 两者定义域、对应法则均相同.

【题 7】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域.

【解】 由 $f(x)$ 的表达式知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 2]$,故 $f(2x)$ 的定义域为 $0\leqslant 2x\leqslant 2$,即 $x\in[0,\ 1]$, $f(x-2)$ 的定义域为 $0\leqslant x-2\leqslant 2$,即 $x\in[2,\ 4]$,而 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 为一个表达式,故其定义域为空集.

【题 8】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$,求 $f(x+a)+f(x-b)$ 的定义域.

【解】 因 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$,故 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-b\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ b\leqslant x\leqslant 1+b.\end{cases}$

当 $1-a<b$ 或 $1+b<-a$,即 $|a+b|>1$ 时,$[-a,\ 1-a]\cap[b,\ 1+b]=\varnothing$.

当 $-a\leqslant b\leqslant 1-a$,即 $0\leqslant a+b\leqslant 1$ 时,$[-a,\ 1-a]\cap[b,\ 1+b]=[b,\ 1-a]$.

当$-a\leqslant 1+b<1-a$，即$-1\leqslant a+b<0$时，$[-a,\ 1-a]\cap[b,\ 1+b]=[-a,\ 1+b]$.

故当$|a+b|>1$时，其定义域为$\varnothing$；当$0\leqslant a+b\leqslant 1$时，其定义域为$[b,\ 1-a]$；当$-1\leqslant a+b<0$时，其定义域为$[-a,\ 1+b]$.

【题 9】 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 0.01 元，但最低价为每台 75 元.

（1）将每台的实际售价p表示为订购量x的函数；

（2）将厂方所获的利润P表示成订购量x的函数；

（3）某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

【解】 （1）当$0\leqslant x\leqslant 100$时，$p=90$；当$100<x<1\,600$时，$p=90-0.01(x-100)$；当$x\geqslant 1\,600$时，$p=75$. 即

$$p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 90-0.01(x-100), & 100<x<1\,600,\\ 75, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$$

（2）$P=(p-60)x=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ x(31-0.01x), & 100<x<1\,600,\\ 15x, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

（3）定购 1 000 台时，$P=1\,000(31-0.01\times 1\,000)=21\,000$（元）.

【题 10】 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角$\varphi=40°$（见图 1-3）.

当过水断面$ABCD$的面积为定值S_0时，求湿周$L(L=AB+BC+CD)$与水渠h之间的函数关系式，并指出其定义域.

【解】 因水渠的断面为等腰梯形.

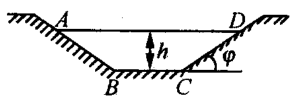

图 1-3

所以　$AB=CD=\dfrac{h}{\sin\varphi}$,

$AD=BC+2\dfrac{h}{\tan\varphi}$.

又　$S_0=\dfrac{1}{2}h\cdot\left(2BC+2\dfrac{h}{\tan\varphi}\right)$,

则　$BC=\dfrac{S_0}{h}-\dfrac{h}{\tan 40°}$.

$L=AB+BC+CD=\dfrac{2h}{\sin 40°}+\dfrac{S_0}{h}-\dfrac{h}{\tan 40°}$.

其中$\begin{cases}h>0,\\ BC>0,\end{cases}$即$0<h<\sqrt{S_0\cdot\tan 40°}$.

故定义域为$\{h \mid 0<h<\sqrt{S_0\tan 40^\circ}\}$.

§2 函数的单调性

1. 定义

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，区间$I\subseteq D$. 若$\forall x_1,x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2), \tag{$*$}$$

则称$y=f(x)$在区间I内单调增加，又称$y=f(x)$为I内的增函数.

若将(*)中不等式改成

$$f(x_1)\geqslant f(x_2), \tag{$**$}$$

则称$y=f(x)$在区间I内单调减少，又称$y=f(x)$为I内的减函数.

单调增加与单调减少函数统称为单调函数，称I为函数$f(x)$的单调区间.

若将(*)，(**)式中的"$\leqslant$""$\geqslant$"改成为"$<$"或"$>$"，则称$f(x)$为严格的单调函数.

2. 判别函数在某区间I内单调性的方法

方法一：利用单调函数的定义来判别.

方法二：利用graph$f$来判别.

如果graph$f$在I内是一条沿Ox轴正向上升（下降）的曲线，则该函数$f(x)$在I内单调增加（单调减少）.

方法三：(1) 若$f(x)$在$[-a,a]$上为奇函数，则$f(x)$在区间$(-a,0)$和$(0,a)$内的单调性保持一致.

(2) 若$f(x)$在$[-a,a]$上为偶函数，则$f(x)$在区间$(-a,0)$和$(0,a)$内的单调性恰好相反.

方法四：(1) 若$g(x)$为增函数，则复合函数$f(g(x))$与$f(x)$的单调性相同；

(2) 若$g(x)$为减函数，则复合函数$f(g(x))$与$f(x)$的单调性相反.

方法五：若$f(x)$在I内为增函数（减函数），则$-f(x)$在I内为减函数（增函数）.

方法六：（导数法）设函数$y=f(x)$在区间I内可导. 若导函数$f'(x)$在I内恒有

(1) $f'(x)>0$，则$f(x)$在区间I内单调增加；

(2) $f'(x)<0$，则$f(x)$在区间I内单调减少.

【题1】 证明下列各题.

(1) 若$f(x)$与$g(x)$在D上均单调增加，试证$f(x)+g(x)$在D上也单调增加；

(2) 试证：两个单调增加函数的复合函数是单调增加的. 又问：两个单调减少函数的复合函数的情况又是怎样呢？

【证明】 (1) $\forall x_1, x_2 \in D$,不妨设 $x_2 > x_1$,则由题设,知

$$f(x_2) \geqslant f(x_1),\ g(x_2) \geqslant g(x_1),$$

故

$$f(x_2)+g(x_2) \geqslant f(x_1)+g(x_1),$$

这表明 $f(x)+g(x)$ 在 D 上也单调增加.

(2) 设 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合成

$$y=f(g(x)),\ x \in (a,\ b).$$

由题设,知 $\forall x_1, x_2 \in (a,\ b)$, $x_1 > x_2$,恒有

$$u_1=g(x_1) \geqslant g(x_2)=u_2.$$

又由 $u_1 \geqslant u_2$,得 $y_1=f(u_1) \geqslant f(u_2)=y_2$,即:

$\forall x_1, x_2 \in (a,\ b)$, $x_1 > x_2$,恒有 $y_1 \geqslant y_2$,故复合复数 $y=f(g(x))$ 为增函数.

根据证题过程,类似可证:两个单调减少函数的复合函数为单调增加函数.

【题 2】 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $(a,\ b)$ 内的单调增加函数,对任意给定的 $x \in (a,\ b)$,用 $\max\{f(x),\ g(x)\}$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中的较大者,而 $\min\{f(x),\ g(x)\}$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中的较小者. 试证明:$h_1(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 与 $h_2(x)=\min\{f(x), g(x)\}$ 均为 (a, b) 内的单调增加函数.

【证明】 任取 $x_1, x_2 \in (a,\ b)$,且设 $x_1 < x_2$,则

$$f(x_1) \leqslant f(x_2),\ g(x_1) \leqslant g(x_2).$$

而

$$h_1(x_2)=\max\{f(x_2),\ g(x_2)\} \geqslant f(x_2) \geqslant f(x_1),$$

$$h_1(x_2)=\max\{f(x_2),\ g(x_2)\} \geqslant g(x_2) \geqslant g(x_1).$$

于是

$$h_1(x_2) \geqslant \max\{f(x_1),\ g(x_1)\}=h_1(x_1),$$

故 $h_1(x)$ 为 $(a,\ b)$ 内的单调增加函数.

类似可证 $h_2(x)$ 为 $(a,\ b)$ 内的单调增加函数.

【题 3】 设 $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ 且 $\lambda+\mu=1$. 若 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 内单调减少,证明:

$$\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x) \geqslant f(x).$$

【证明】 依题设,知 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$,因 $x \in [0,\ +\infty)$,故

$$0 \leqslant \lambda x \leqslant x,\ 0 \leqslant \mu x \leqslant x.$$

因 $f(x)$ 是 $[0,\ +\infty)$ 内的单调减少函数,故

$$f(\lambda x) \geqslant f(x),$$

$$f(\mu x) \geqslant f(x).$$

于是 $\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x) \geqslant \lambda f(x)+\mu f(x)=(\lambda+\mu)f(x)=f(x)$,证毕.

【题 4】 设 $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ 且 $\lambda+\mu=1$. 若 $\dfrac{g(x)}{x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内单调减少,证明:

$$g(\lambda x)+g(\mu x)\geqslant g(x). \qquad (*)$$

并由此证明：对任何两个正数 a, b，有下列不等式成立：

$$g(a)+g(b)\geqslant g(a+b). \qquad (**)$$

【证明】 令 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$，则 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 内的单调减少函数. 由题 3，知

$$\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)\geqslant f(x),$$

即

$$\lambda\frac{g(\lambda x)}{\lambda x}+\mu\frac{g(\mu x)}{\mu x}\geqslant\frac{g(x)}{x},$$

亦即

$$g(\lambda x)+g(\mu x)\geqslant g(x),$$

$(*)$式得证.

在$(*)$式中，取 $\lambda=\dfrac{a}{a+b}$, $\mu=\dfrac{b}{a+b}$，则 $\lambda>0$, $\mu>0$，且 $\lambda+\mu=1$.

再取 $x=a+b\in(0, +\infty)$，代入$(*)$式，得

$$g(a)+g(b)\geqslant g(a+b),$$

$(**)$式得证.

【题 5】 利用单调性证明下列不等式.

(1) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$；

(2) 当 $x\geqslant 2$ 时，$(1+x)\ln(1+x)>2x-\dfrac{1}{6}x^3$；

(3) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

【证明】 (1) 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $f(0)=0$. 若能证明当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，就表明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加，从而当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)>0(=f(0))$. 为此，只需证明 $f'(x)>0\ (x>0)$.

事实上，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).\end{aligned}$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，证毕.

(2) 作辅助函数：

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\left(2x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

则
$$f'(x)=\ln(1+x)+1-2+\frac{x^2}{2},$$
即
$$f'(x)=\ln(1+x)-1+\frac{x^2}{2},$$
$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+x.$$

当 $x\geqslant 2$ 时，$f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $[2,\ +\infty)$ 内单调递增，从而 $f'(x)\geqslant f'(2)$.

因 $f'(2)=\ln 3+1$，故
$$f'(x)\geqslant \ln 3+1>0.$$
因此，当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)$ 单调递增.

故
$$f(x)\geqslant f(2).$$
而
$$f(2)=3\ln 3-\left(4-\frac{8}{6}\right)=3\left(\ln 3-\frac{8}{9}\right)>0，故\ f(x)>0.$$
由 $f(x)>0$，知原不等式成立.

注　当 $x\geqslant 2$ 时，由 $f''(x)>0$，知 $f'(x)$ 单调递增；再由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 单调递增；再由 $f(2)>0$，得 $f(x)>0$，本题得证.

(3) 作辅助函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，且 $x\geqslant 0$，即 $f(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$.

则 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$，从而 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 内单调增加.

因 $|a+b|\leqslant |a|+|b|$，所以 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

而 $\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

于是 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$，证毕.

【题 6】　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\ a]$ 上连续，$f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $(0,\ a)$ 内存在且为增函数，又 $f''(x)$ 存在.

试证：函数 $F(x)=\dfrac{1}{x}f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 内是增函数.

【证明】　$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g(0)=-f(0)=0$.

又 $g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$.

由于 $f'(x)$ 为 $(0,\ a)$ 内的增函数，故 $f''(x)>0$，$x\in(0,\ a)$.

从而在$(0, a)$内，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$为$(0, a)$内的单调增函数.

于是，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)$，即 $g(x)>0$.

因此，$F'(x)>0$.

从而证得 $F(x)$为$(0, a)$内的增函数.

【题 7】 设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$，其中 $b\neq0$. 当 $b>\frac{1}{2}$时，判断函数 $f(x)$在定义域上的单调性.

【解】 函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$的定义域为$(-1, +\infty)$.

$$f'(x)=2x+\frac{b}{x+1}=\frac{2x^2+2x+b}{x+1}.$$

令 $g(x)=2x^2+2x+b$，则 $g'(x)=4x+2$.

由 $g'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$. 于是 $g(x)$在$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$内单调递增，在$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$内单调递减.

$$g(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+b-\frac{1}{2}，知\ g(x)_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=b-\frac{1}{2}.$$

当 $b>\frac{1}{2}$时，$g(x)_{\min}=b-\frac{1}{2}>0$.

$g(x)=2x^2+2x+b>0$ 在$(-1, +\infty)$内成立.

从而 $f'(x)>0$，即当 $b>\frac{1}{2}$时，函数 $f(x)$在定义域$(-1, +\infty)$内单调递增.

【题 8】 （Ⅰ）证明：对任意的正整数 n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立.

（Ⅱ）设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1, 2, \cdots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

【证明】 （Ⅰ）**方法一** 转化为证明函数不等式，用单调性方法.

令 $f(x)=x-\ln(1+x)\ (x\geqslant0)$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\ (x>0)$，$f(0)=0$.

故 $f(x)$在$[0, +\infty)$上单调递增，$f(x)>f(0)=0\ (x>0)$.

因此 $f\left(\frac{1}{n}\right)>0$，即$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ （$\forall n\in\mathbf{N}^*$）.

令 $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\ (x>0)$.

则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}<0\ (x>0)$.

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,故 $g(x)>0$ $(x>0)$.

因此 $g(n)>0$,即 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$ $(\forall n\in\mathbf{N}^*)$.

综上所述,对任意的正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

方法二　利用微分中值定理,将不等式改写成

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}}<1.$$

现对 $f(x)=\ln x$ 在 $\left[1,\ 1+\frac{1}{n}\right]$ 上用拉格朗日中值定理(参见第五章),得

$$\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},$$

其中 $1<\xi<1+\frac{1}{n}$.

于是 $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}<1$,即 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

(Ⅱ)证明 $\{a_n\}$ 单调有界.

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1).$$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

故 $\{a_n\}$ 单调递减.

又由(Ⅰ),知　$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$,

即　$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)=\ln 2-\ln 1<\frac{1}{1}$,

$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$,