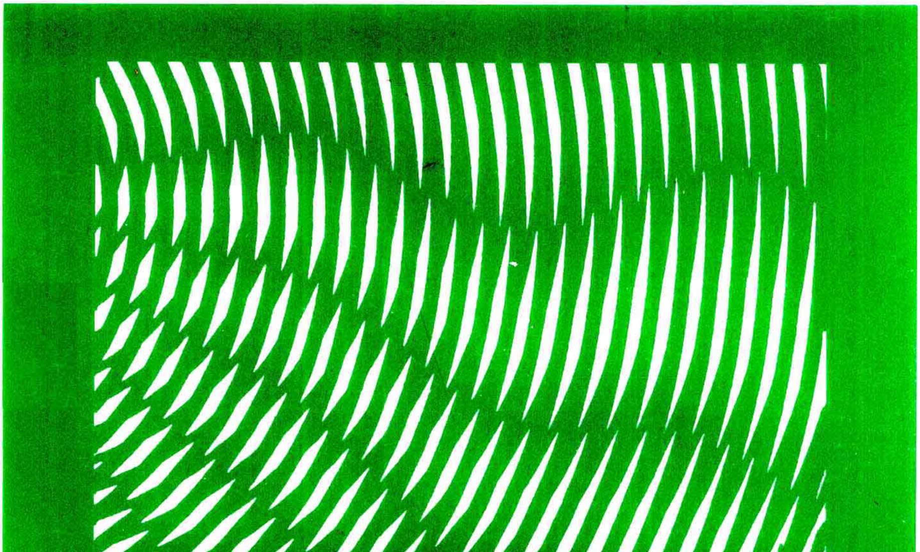
大学数学教程

第三册

韩继昌　王巧玲　等



南京大学出版社

大学数学教程

第三册

韩继昌　王巧玲　曹祥炎
罗亚平　王芳贵　范克新

南京大学出版社

书　　名　大学数学教程　第三册
编 著 者　韩继昌　王巧玲等
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话　025－3596923　025－3592317　传真 025－3303347
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子邮件　nupress1@public1.ptt.js.cn
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　丹阳兴华印刷厂
开　　本　850×1168　1/32　　印张 13　字数 338 千
版　　次　1997 年 9 月第 1 版　2002 年 1 月第 2 次印刷
印　　数　1501～3500
ISBN　7－305－03053－8/O·213
定　　价　16.50 元

序

高等数学教材琳琅满目，其中优秀教材也数量众多。但随着现代科学技术的飞速发展，大量现代数学的思想、方法、内容已渗透到各学科的理论与应用的研究之中，而且也渗透到许多基础理论(非数学)专业的本科与研究生课程中。南京大学基础学科教学强化部，作为基础性人才培养基地，为使学生有良好的科学素质和深厚的业务基础，以适应各学科之间日益渗透的发展趋势，要求在不增加太多学时的前提下，在传统高等数学中适当引进现代数学知识，为本科生后续物理课程提供深厚的数学基础。为提高学生的数学修养并使之受到现代数学思维的熏陶，我们编写了这套教材。内容有微积分、空间解析几何、线性代数、常微分方程、距离空间、算子与泛函、变分法、积分方程、群论、张量与外代数、微分流形等共 20 章，分三册出版。教材大纲在1990年由编者与强化部孙景李、卢德馨(二位物理学教授)共同制订，并经数学系黄正中教授等十位专家评审修改后确定。全套教材已在强化部、天文系使用 5 次，第1～14章为全体强化部学生的必修内容，分三学期讲授，总学时 270；第 15～20 章为物理类专业的必选课，用 90 学时讲授。

在编写时注意如下几点：

1. 选材。内容取材贯彻少而精原则。传统高等数学的内容按教委(89)教高司字101号“综合大学本科物理专业高等数学课程教学基本要求”；第14章“距离空间”则作为传统高等数学的延续和拓宽，它为学生从高等数学过渡到现代数学的学习架了一座桥。

2. 加强数学修养训练，概念叙述准确而严谨。注意加强逻辑非，“无穷小量”阶的估计，极限理论等训练。还将数直线上极限理论拓宽到距离空间的完备性、紧性。加强集合论基础知识，例如可

目 录

14. 距离空间

15. 算子与泛函

16．变分法

17．积分方程

18. 群论

19. 张量与外代数

20. 微分流形概要

14 距离空间

§14.1 集合与映射

许多数学的逻辑概念可以用集合这个概念来定义和说明．集合论已成为现代数学许多分支的基础，而集合可以通过映射加以比较和相互关联．本节介绍集合与映射的基本知识．

1. 集合

关于集合与元素的严格定义属于集合论的研究范围。这里不予涉及，按集合论的创立者康托尔(G. Cantor)的一种说法，一个集合是"在我们直觉上或思想上确定的和不同的对象的一个总体"。这就是说，集合是指在一定范围内个体事物的全体，当将它们看作是一个整体时，我们把这个整体称为一个**集合**(set)或**集**．其中每个个体事物叫做该集合的**元素**或**元**(element)．必须强调的是：

(1) 哪些事物（元素）属于给定的集合必须有明确的条件规定；

(2) 一个集合的各个元素必须是互异的。换句话说，一个集合中的元素只能出现一次，不能重复出现．

总体、组、类、族等等都是集合的同义词．

我们常用大写字母 A, B, …等表示集，用小写字母 a, b, …等表示集合的元素．

集合的表示法有两种，一种是通过列举其元素 a, b, c, …来定义，并记为

$$A=\{a, b, c, \cdots\}.$$

例如，

$$N=\{1, 2, \cdots, n\}$$

表示前 n 个自然数的集合；

$$\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots\}$$

表示全体自然数的集合，

$$A=\{2, 4, 6, \cdots\}$$

表示全体正偶数的集合。

集合的另一种表示方式是通过集合 A 的各元素必须且只须满足的条件 P 来表示，并记为

$$A=\{x \mid x \text{ 满足条件 } P\},$$

或

$$A=\{x: x \text{ 满足条件 } P\}.$$

例如，正弦的绝对值小于 1/2 的点组成的集合记为

$$A=\left\{x \,\middle|\, |\sin x|<\frac{1}{2}\right\};$$

$[a, b]$ 上实连续函数全体所成的集合记为 $C_{[a,b]}$，

$$C_{[a,b]}=\{f \mid f \text{ 是闭区间}[a, b]\text{上连续函数}\}.$$

现在引进有关集合的一些简单概念或术语。若 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记为 $a\in A$，若 a 不是集合 A 的元素，称 a 不属于 A，记为 $a \overline{\in} A$ 或 $a\notin A$。

不含任何元素的集合称为**空集**或**零集**，记为 $\varnothing$。由有限个元素组成的集合称为**有限集**，集合的元素不是有限个的非空集称为**无限集**。

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A **含于** B），或称为 B **包含** A，记为 $B\supset A$。空集约定为任何集合的子集。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$。

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneq B$。

我们常要考虑一个已知集合 X 的所有可能的子集类，这个集

合称之为 X 的**幂集**，记为 $\mathscr{P}(X)$，因此，

$$\mathscr{P}(X)=\{A|A\in X\},$$

若 X 由有限(n)个元素组成，显然 $\mathscr{P}(X)$ 由 2^n 个元素组成。由于这个原因，X 的幂集有时用 2^X 表示以代替符号 $\mathscr{P}(X)$。

注意，$\varnothing$ 和 X 总是属于 $\mathscr{P}(X)$。

例 1 若 $X=\{1,2,3\}$，则

$$\mathscr{P}(X)=\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\{\varnothing\}\}.$$

X 中有 3 个元素，$\mathscr{P}(X)$ 中有 $2^3=8$ 个元素。

下面引进集合的运算。

定义 1（并、交、差、补） 若 A，B 是两个集合，由 A 中的元以及 B 中的元的全体所成的集合称为 A，B 的**并**，记为 $A\cup B$（图 14.1），即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元素所成的集合称为 A，B 的**交**（图 14.2），记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 并且 }x\in B\}.$$

若两个集合 A 和 B 的交集是空集，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交．由属于 A 而不属于 B 的那些元素所成的集称为 A 与 B 的**差**（图 14.3），记为 $A-B$ 或 $A\backslash B$，即

$$A-B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\overline{\in} B\}.$$

当 $B\subset A$ 时，差集 $A-B$ 又称为 B 关于集 A 的**补集**，记为 $\mathscr{C}_A B$。

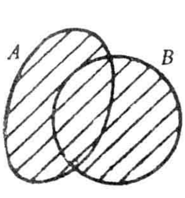


图 14.1 $A\cup B$

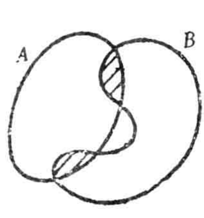


图 14.2 $A\cap B$

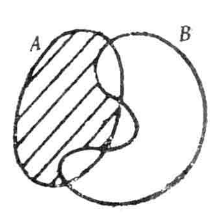


图 14.3 $A-B$

定理 1（运算法则） 设 A, B, C 为任意三个集合，则下述性质成立：

1° 交换律：$A\cup B=B\cup A$，

$A\cap B=B\cap A$.

2° 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3° 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4° 笛摩根(De Morgan)法则：

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B).$$
$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B).$$

可以类似地定义任意个集合的并与交。

定义 2（任意个集的并、交） 设$\{A_\iota|\iota\in\mathrm{I}\}$是一族集，这里I是指标集(I在多数情形下是正整数的集合，但并非必要)，ι在I中取值，则它们的并与交分别定义为：

$$\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}A_\iota=\{a|\text{有某个 }\iota\in\mathrm{I}, \text{使 }a\in A_\iota\}.$$
$$\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}A_\iota=\{a|\text{对一切 }\iota\in\mathrm{I}, \text{有 }a\in A_\iota\}.$$

定理 2（分配律） 对于集 E 与任意一族集 A_ι，$\iota\in\mathrm{I}$，恒有分配律

$$E\cap\Big(\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}A_\iota\Big)=\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}(E\cap A_\iota).$$

证明 $x\in(E\cap(\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}A_\iota))\Longleftrightarrow x\in E$且$x\in\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}A_\iota$

$\Leftrightarrow x\in E$ 且存在 $\iota\in\mathrm{I}$ 使 $x\in A_\iota$

$\Leftrightarrow$ 存在 $\iota\in\mathrm{I}$，使 $x\in(E\cap A_\iota)$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}(E\cap A_\iota)$. □

在研究一个问题时，如果所考虑的一切集合都是 X 的子集，这时称 X 为**基本集**. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集，则数直线是基本集。对于任一基本集 X，差集 $X-A$，即 A 关于

X 的补集，简称为 A 的**补集**，记为 $\mathscr{C}A$。

定理 3（笛摩根法则） 对于基本集 X 中的并集、交集的补集运算，有

1° $\mathscr{C}\left(\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\right)=\bigcap_{\iota\in I}(\mathscr{C}A_\iota)$.

2° $\mathscr{C}\left(\bigcap_{\iota\in I}A_\iota\right)=\bigcup_{\iota\in I}(\mathscr{C}A_\iota)$.

证明 1° $x\in\mathscr{C}\left(\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\right)\Leftrightarrow x\overline{\in}\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$

$\Leftrightarrow x\overline{\in}A_\iota,\ \forall\iota\in I$

$\Leftrightarrow x\in\mathscr{C}A_\iota,\ \forall\iota\in I$

$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\iota\in I}\mathscr{C}A_\iota$.

2° 由 1° 取补集，得

$$\mathscr{C}\left(\mathscr{C}\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\right)=\mathscr{C}\left(\bigcap_{\iota\in I}\mathscr{C}A_\iota\right),$$

即

$$\bigcup_{\iota\in I}A_\iota=\mathscr{C}\left(\bigcap_{\iota\in I}\mathscr{C}A_\iota\right),$$

再把 A_ι 换成 $\mathscr{C}A_\iota$ 即得 2°。 □

笛摩根法则提供一种对偶方法，能把已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去，这种对偶方法将在以后定理的证明中多次用到。

除了并和交，还有一种与前面不同但很重要的由已知集合构成新集合的方法。讨论这个方法，先介绍有序对的概念，一个**有序对**$(a,\ b)$是由写成有次序的两个对象 a 和 b 组成的偶对。有序对 $(a,\ b)$和$(a',\ b')$相等当且仅当 $a=a'$, $b=b'$（由此可得，除去 a 和 b 是相等外，都有$(a,\ b)\neq(b,\ a)$）。

定义 3（笛卡尔乘积） 设 A, B 是两个非空集合，A 和 B 的**笛卡尔**(Descartes)**乘积**$A\times B$ 定义为所有的有序对$(a,\ b)$的总体。其中第一项 a 从 A 中取出，第二项 b 从 B 中取出。因此

$$A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A \text{ 同时 } b\in B\}.$$

类似地可定义 n 个对象的有序组$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$及 n 个任意

集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 n 重**笛卡尔乘积** $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 如下：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,|\,a_1\in A_1,\ \text{同时}\,a_2\in A_2, \cdots, \text{同时}\,a_n\in A_n\}.$$

集合 A 与其自身的 n 重笛卡尔乘积 $A^n=A\times A\times\cdots\times A$. 因而实数轴 R 的二重笛卡尔乘积 R^2 表示实欧几里得 (Euclid) 平面，R 的 n 重笛卡尔乘积 R^n 表示 n 维实欧几里得空间。

复数集合也是常用的，记为 $\mathbf{C}$，在某些论述中，不想专门指明 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，就用符号 K 表示。

例 2　$A=\{0, 1\}$和 $B=\{1, 2\}$，则

$$A\times B=\{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}.$$

$$B\times A=\{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}.$$

2. 映射

映射的术语几乎出现于所有的数学分支，集合可以通过映射加以比较和相互关联。

定义 4（映射）　若 A, B 为两个非空集，如果存在一种对应法则 f，使对任何 $x\in A$，有唯一确定的 $y\in B$ 与 x 对应，则称 f 为 A 到 B 的**映射**，记为 $f: A\to B$，或 $A\xrightarrow{f}B$，且记 $f(x)=y$，y 称为 x 在 f 下的像，x 称为 y 在 f 下的原像，记为 $f^{-1}(y)$. 集合 A 称为映射 f 的**定义域**，记为 $D(f)$.

对 $A_0\subset A$，$f(A_0)=\{f(x)\,|\,x\in A_0, f(x)\in B\}$称为 A_0 **在 f 下的像**　$f(A)$称为 f 的**值域**，记为 $\mathscr{R}(f)$.

对 $B_0\subset B$，$f^{-1}(B_0)=\{x\,|\,f(x)\in B_0, x\in A\}$称为 B_0 在 f **下的原像**.

约定 $f(\varnothing)=\varnothing$，$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.

若 f 的定义域与值域均为数域（实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$）的子集，f 就是普通的**实（复）函数**

例 3　设 X 是中华人民共和国中 16 岁以上公民的集合，Y 是

每个公民的身份证的号码。中华人民共和国中16岁以上公民集与身份证号码的集之间存在一个对应的法则 f，因此，f：$X\to Y$ 是一个映射。

例 4 设 X 是任意一个集合，则映 X 中任意元素 x 到自身的映射 I：$x\mapsto x$ 称为**恒同映射**。

例 5 设 $C[0,1]$ 是区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的所有实连续函数全体所成的集合，R 是实数全体所成的集合。由于 $[0,1]$ 上的连续函数是黎曼(Riemann)可积的，因此对每一个 $x\in C[0,1]$，由

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$

对应 R 中的一个确定的数，故

$$x\mapsto\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $C[0,1]$ 到 R 内的一个映射。

例 6 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是一个已知的 $m\times n$ 矩阵，记 R^n 的点 x 为

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

R^m 的点 y 为

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则

$$T: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

是 R^n 到 R^m 中的一个映射，记为

$$y = Tx。$$

通常映射 f 的值域 $f(A)$ 是 B 的一个真子集，此时我们说 f 把 A 映入 B 内。同时，映射还允许不同的 x 映射到相同的 y 上（见图 14.4）。

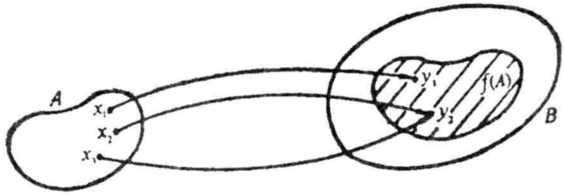


图 14.4

定义 5（满射、单射、双射） 设 $f: A \to B$ 的映射，如果 $f(A) = B$，则称 f 是**映上的**，如果 $f(A)$ 中每一个 y 恰好是一个 $x \in A$ 的像，则称映射 f 是**单一映射**，如果映射 f 既是映上的，又是单一映射，则称 f 是**一一映射**、有时写作 **1－1** 映射，也记作 $A \xrightarrow[f]{1-1} B$。这时集合 A 与集合 B 的元素是**一一对应**的。

术语"单射或内射"，"满射"和"双射"分别用来代表"单一映射"，"映上"和"一一映射"。

f 满射 $\Leftrightarrow$ 对任意 $y \in B$，必有 $x \in A$ 使 $f(x) = y$。

f 单射 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2 \in A$，$f(x_1) = f(x_2)$ 必有 $x_1 = x_2$。

$\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

定义 6（逆映射） 设 $f: A \to B$ 是一一映射，则对任意的 $y \in B$，存在唯一的 $x \in A$，使 $f(x) = y$，于是存在一个映射 $g: B \to A$，