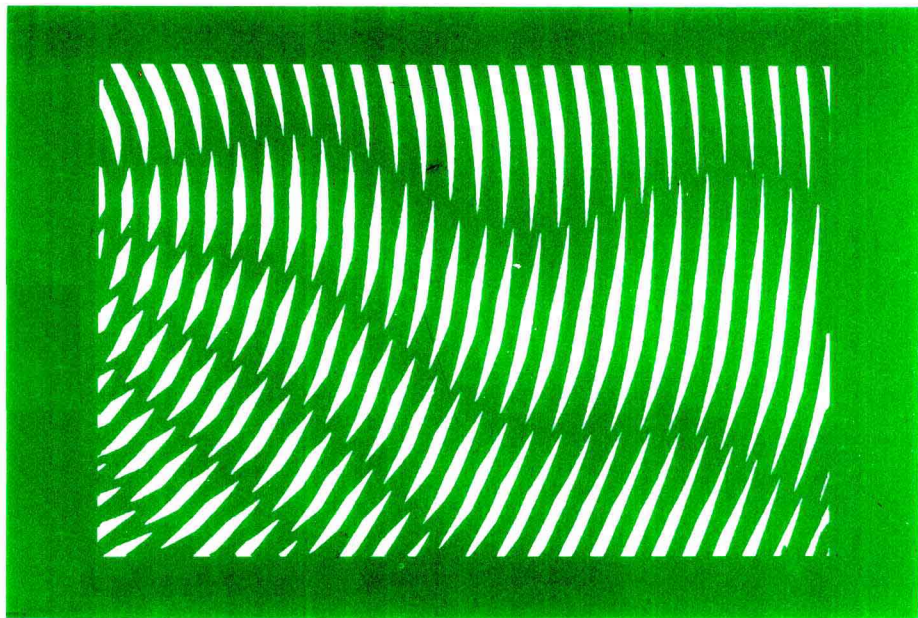

大学数学教程

第三册

韩继昌 王巧玲 等



南京大学出版社

大学数学教程

第三册

韩继昌 王巧玲 曹祥炎
罗亚平 王芳贵 范克新

南京大学出版社

书 名 大学数学教程 第三册
编 著 者 韩继昌 王巧玲等
出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
电 话 025-3596923 025-3592317 传真 025-3303347
网 址 <http://press.nju.edu.cn>
电子邮件 nupress1@public1.ptt.js.cn
经 销 全国各地新华书店
印 刷 丹阳兴华印刷厂
开 本 850 × 1168 1/32 印张 13 字数 338 千
版 次 1997 年 9 月第 1 版 2002 年 1 月第 2 次印刷
印 数 1501 ~ 3500
ISBN 7-305-03053-8/O·213
定 价 16.50 元

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

序

高等数学教材琳琅满目，其中优秀教材也数量众多。但随着现代科学技术的飞速发展，大量现代数学的思想、方法、内容已渗透到各学科的理论与应用的研究之中，而且也渗透到许多基础理论(非数学)专业的本科与研究生课程中。南京大学基础学科教学强化部，作为基础性人才培养基地，为使学生有良好的科学素质和深厚的业务基础，以适应各学科之间日益渗透的发展趋势，要求在不增加太多学时的前提下，在传统高等数学中适当引进现代数学知识，为本科生后续物理课程提供深厚的数学基础。为提高学生的数学修养并使之受到现代数学思维的熏陶，我们编写了这套教材。内容有微积分、空间解析几何、线性代数、常微分方程、距离空间、算子与泛函、变分法、积分方程、群论、张量与外代数、微分流形等共 20 章，分三册出版。教材大纲在 1990 年由编者与强化部孙景李、卢德馨(二位物理学教授)共同制订，并经数学系黄正中教授等十位专家评审修改后确定。全套教材已在强化部、天文系使用 5 次，第 1~14 章为全体强化部学生的必修内容，分三学期讲授，总学时 270；第 15~20 章为物理类专业的必修课，用 90 学时讲授。

在编写时注意以下几点：

1. 选材。内容取材贯彻少而精原则。传统高等数学的内容按教委(89)教高司字 101 号“综合大学本科物理专业高等数学课程教学基本要求”；第 14 章“距离空间”则作为传统高等数学的延续和拓宽，它为学生从高等数学过渡到现代数学的学习架了一座桥。

2. 加强数学修养训练，概念叙述准确而严谨。注意加强逻辑非，“无穷小量”阶的估计，极限理论等训练。还将数直线上极限理论拓宽到距离空间的完备性、紧性。加强集合论基础知识，例如可

目 录

14. 距离空间

- § 14.1 集合与映射1
1. 集合(1), 2. 映射(6), 3. 集的对等、可列集、基数(9),
§ 14.1 习题(17).
- § 14.2 距离空间19
1. 空间结构(19), 2. 距离空间(21), 3. 数直线 R 上的点集
(27), 4. 距离空间中的点集(32), 5. 连续映射(36), §14.2
习题(38)
- § 14.3 数直线 R 上的极限理论41
1. 引言(41), 2. 数直线 R 上的极限理论(43), 3. 闭区间上
连续函数四个性质定理的证明(49), § 14.3 习题(53)
- § 14.4 距离空间的完备性 紧集与列紧集55
1. 距离空间的可分性(55), 2. 距离空间的完备性(57),
3. 距离空间中集合的列紧与紧(62), 4. 拓扑空间的概念(68),
§ 14.4 习题(69).
- § 14.5 压缩映射原理70
§ 14.5 习题(76).

15. 算子与泛函

- § 15.1 勒贝格积分大意77
1. 引言(77), 2. 勒贝格测度与勒贝格可测函数(79), 3. 勒
贝格积分大意(93), § 15.1 习题(107).
- § 15.2 赋范线性空间110
1. 线性空间(111), 2. 赋范线性空间(113), 3. 空间 l^p 与 L^p
(116), 4. 有限维赋范线性空间(119), § 15.2 习题(123)
- § 15.3 内积空间124
1. 内积空间与希尔伯特空间(124), 2. 直交性与投影定理(128),

3. 希尔伯特空间中的傅里叶级数(131), § 15.3 习题(138)。	
§ 15.4 算子与泛函的概念	139
1. 算子与泛函的概念(139), 2. 算子与泛函的例(143), 3. 希尔伯特-施密特积分算子的全连续性(148), 4. 线性算子空间(150), § 15.4 习题(152)。	
§ 15.5 希尔伯特空间上的自伴算子	154
1. 希尔伯特空间上的自伴算子(154), 2. 希尔伯特空间上自伴全连续算子的特征展开(161), § 15.5 习题(167)。	
16. 变分法	
§ 16.1 变分的基本概念	169
§ 16.2 固定边界的变分问题	173
1. 最简泛函的欧拉方程(173), 2. 含多个函数的泛函(179), 3. 含高阶导数的泛函(181), 4. 含多元函数的泛函(184), § 16.2 习题(188)。	
§ 16.3 可动边界变分问题的自然边界条件	183
§ 16.3 习题(193)。	
§ 16.4 泛函的条件极值问题	193
1. 短程线问题(194), 2. 等周问题(199), § 16.4 习题(202)。	
§ 16.5 变分问题的直接法	203
1. 里兹法(203), 2. 坎托罗维奇法(206), § 16.5 习题(208)。	
§ 16.6 变分原理	209
§ 16.6 习题(216)。	
17. 积分方程	
§ 17.1 积分方程的基本概念	217
§ 17.1 习题(218)	
§ 17.2 迭代法	218
1. 压缩算子(218), 2. 第二种弗雷德霍姆方程(219), 3. 第二种沃尔泰拉 Volterra 方程(222), 4. 例题(224), 5. 具有弱奇性核的积分方程(225), § 17.2 习题(227)。	

§ 17.3 弗雷德霍姆理论	228
1. 有退化核的积分方程(230), 2. 连续核与 L^2 核的情形(234), § 17.3 习题(237).	
§ 17.4 弗雷德霍姆积分方程解的表达式	237
1. 退化核的情形(237), 2. 连续核的情形(238), 3. 例题(239), § 17.4 习题(243).	
§ 17.5 埃尔米特积分方程	243
§ 17.5 习题(255).	
18. 群论	
§ 18.1 群的概念	256
1. 群的定义(256), 2. 群的简单性质(258), 3. 群的例子 (260), 4. 循环群(264), 5. 置换群(265), § 18.1 习题(269).	
§ 18.2 子群与陪集	270
1. 子群(270), 2. 陪集(272), § 18.2 习题(274).	
§ 18.3 共轭类与不变子群	274
1. 共轭类(275), 2. 不变子群(277), 3. 商群(279), § 18.3 习题(280).	
§ 18.4 群的直积	280
1. 内部直积(280), 2. 外部直积(283)	
§ 18.5 同构与同态	284
1. 同构(284), 2. 同态(287), § 18.5 习题(290).	
§ 18.6 群的线性表示	291
1. 线性表示(291), 2. 诱导变换群给出的表示(293),	
§ 18.7 等价表示与可约表示	297
1. 等价表示(297), 2. 可约表示(299).	
§ 18.8 群表示的特征标	302
§ 18.9 群的正则表示	305
1. 群代数(305), 2. 正则表示(307), § 18.9 习题(308).	
§ 18.10 局部李群	309

1. 局部李群的定义(309), 2. 无穷小变换(311), 3. 结构常数(314), § 18.10 习题(315)。

19. 张量与外代数

- § 19.1 对偶向量空间 316
 1. 对偶向量空间的概念(316), 2. 逆变向量与协变向量(319), § 19.1 习题(320)。
- § 19.2 张量 321
 1. 张量的定义(321), 2. 张量的分量(322), 3. 对称张量与反对称张量(325), § 19.2 习题(327)。
- § 19.3 张量的代数运算 328
 1. 张量的线性运算(328), 2. 张量的乘积、缩短、积和(329), 3. 张量的商定律(331), 4. 指标置换、对称化、反对称化(332), § 19.3 习题(334)。
- § 19.4 欧几里得向量空间 335
 1. 欧几里得向量空间的概念(335), 2. 张量的指标下降、上升(337), § 19.4 习题(338)。
- § 19.5 外代数 338
 1. 外形式(339), 2. 外乘积、外代数(340), § 19.5 习题(342)。

20. 微分流形概要

- § 20.1 微分流形的定义 343
 § 20.1 习题(347)。
- § 20.2 切空间与余切空间 348
 1. 切空间(348), 2. 余切空间(350), 3. 向量场与张量场(351), § 20.2 习题(353)。
- § 20.3 外微分 354
 1. 外微分形式(354), 2. 外微分(354), § 20.3 习题(359)。
- § 20.4 流形上的积分 360
 1. 单位分解定理(360), 2. 流形上的积分(363), 3. 斯托克斯定理(364), § 20.4 习题(369)。

§ 20.5 黎曼流形的概念	369
1. 黎曼流形的定义(369), 2. 黎曼流形的线素(370), 3. 测地线(371), § 20.5 习题(373)。	
§ 20.6 仿射联络 协变导数	374
1. 平行移动、仿射联络(374), 2. 协变导数(377), 3. 仿射联络系数的变换规律(378), § 20.6 习题(380)。	
§ 20.7 黎曼联络	380
1. 度量仿射联络(380), 2. 黎曼联络(382), 3. 梯度、旋度与散度的表达式(385), § 20.7 习题(387)。	
§ 20.8 曲率	387
1. 曲率张量与李西恒等式(387), 2. 曲率张量的性质(389), 3. 断面曲率(392), 4. 常曲率空间(393), § 20.8 习题(394)。	

距离空间

§ 14.1 集合与映射

许多数学的逻辑概念可以用集合这个概念来定义和说明。集合论已成为现代数学许多分支的基础，而集合可以通过映射加以比较和相互关联。本节介绍集合与映射的基本知识。

1. 集合

关于集合与元素的严格定义属于集合论的研究范围。这里不予涉及，按集合论的创立者康托尔(G. Cantor)的一种说法，一个集合是“在我们直觉上或思想上确定的和不同的对象的一个总体”。这就是说，集合是指在一定范围内个体事物的全体，当将它们看作是一个整体时，我们把这个整体称为一个集合(set)或集。其中每个个体事物叫做该集合的元素或元(element)。必须强调的是：

(1) 哪些事物(元素)属于给定的集合必须有明确的条件规定；

(2) 一个集合的各个元素必须是互异的。换句话说，一个集合中的元素只能出现一次，不能重复出现。

总体、组、类、族等等都是集合的同义词。

我们常用大写字母 A, B, \dots 等表示集，用小写字母 a, b, \dots 等表示集合的元素。

集合的表示法有两种，一种是通过列举其元素 a, b, c, \dots 来定义，并记为

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

例如,

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

表示前 n 个自然数的集合;

$$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$$

表示全体自然数的集合,

$$A = \{2, 4, 6, \dots\}$$

表示全体正偶数的集合.

集合的另一种表示方式是通过集合 A 的各元素必须且只须满足的条件 P 来表示, 并记为

$$A = \{x \mid x \text{ 满足条件 } P\},$$

或

$$A = \{x; x \text{ 满足条件 } P\}.$$

例如, 正弦的绝对值小于 $1/2$ 的点组成的集合记为

$$A = \left\{x \mid \left| \sin x \right| < \frac{1}{2}\right\},$$

$[a, b]$ 上实连续函数全体所成的集合记为 $C_{[a, b]}$,

$$C_{[a, b]} = \{f \mid f \text{ 是闭区间 } [a, b] \text{ 上连续函数}\}.$$

现在引进有关集合的一些简单概念或术语. 若 a 是集合 A 的元素, 称 a 属于 A , 记为 $a \in A$, 若 a 不是集合 A 的元素, 称 a 不属于 A , 记为 $a \notin A$ 或 $a \notin A$.

不含任何元素的集合称为**空集**或**零集**, 记为 \emptyset . 由有限个元素组成的集合称为**有限集**, 集合的元素不是有限个的非空集称为**无限集**.

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ (读作 A 含于 B), 或称为 B 包含 A , 记为 $B \supset A$. 空集约定为任何集合的子集.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A \subsetneq B$.

我们常要考虑一个已知集合 X 的所有可能的子集类, 这个集

合称之为 X 的幂集, 记为 $\mathcal{P}(X)$, 因此,

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\},$$

若 X 由有限 (n) 个元素组成, 显然 $\mathcal{P}(X)$ 由 2^n 个元素组成。由于这个原因, X 的幂集有时用 2^X 表示以代替符号 $\mathcal{P}(X)$ 。

注意, \emptyset 和 X 总是属于 $\mathcal{P}(X)$ 。

例 1 若 $X = \{1, 2, 3\}$, 则

$$\mathcal{P}(X) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\emptyset\}\}.$$

X 中有 3 个元素, $\mathcal{P}(X)$ 中有 $2^3 = 8$ 个元素。

下面引进集合的运算。

定义 1 (并、交、差、补) 若 A, B 是两个集合, 由 A 中的元以及 B 中的元的全体所成的集合称为 A, B 的并, 记为 $A \cup B$ (图 14.1), 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元素所成的集合称为 A, B 的交 (图 14.2), 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}.$$

若两个集合 A 和 B 的交集是空集, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 不相交。由属于 A 而不属于 B 的那些元素所成的集称为 A 与 B 的差 (图 14.3), 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

当 $B \subset A$ 时, 差集 $A - B$ 又称为 B 关于集 A 的补集, 记为 $\complement_A B$ 。

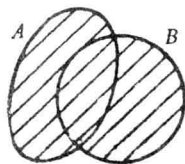


图 14.1 $A \cup B$

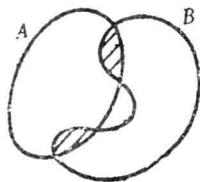


图 14.2 $A \cap B$

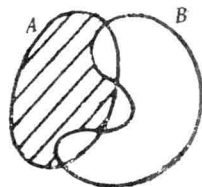


图 14.3 $A - B$

定理 1 (运算法则) 设 A, B, C 为任意三个集合, 则下述性质成立:

1° 交换律: $A \cup B = B \cup A,$

$$A \cap B = B \cap A.$$

2° 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3° 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4° 笛摩根(De Morgan)法则:

$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B).$$

$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B).$$

可以类似地定义任意个集合的并与交。

定义 2 (任意个集的并、交) 设 $\{A_i | i \in I\}$ 是一族集, 这里 I 是指标集 (I 在多数情形下是正整数的集合, 但并非必要), i 在 I 中取值, 则它们的并与交分别定义为:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a | \text{有某个 } i \in I, \text{ 使 } a \in A_i\}.$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a | \text{对一切 } i \in I, \text{ 有 } a \in A_i\}.$$

定理 2 (分配律) 对于集 E 与任意一族集 $A_i, i \in I$, 恒有分配律

$$E \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \cap A_i).$$

证明 $x \in (E \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) \iff x \in E \text{ 且 } x \in \bigcup_{i \in I} A_i$

$$\iff x \in E \text{ 且存在 } i \in I \text{ 使 } x \in A_i$$

$$\iff \text{存在 } i \in I, \text{ 使 } x \in (E \cap A_i)$$

$$\iff x \in \bigcup_{i \in I} (E \cap A_i). \quad \square$$

在研究一个问题时, 如果所考虑的一切集合都是 X 的子集, 这时称 X 为**基本集**。例如限制在数直线上研究各种不同的点集, 则数直线是基本集。对于任一基本集 X , 差集 $X - A$, 即 A 关于

X 的补集, 简称为 A 的补集, 记为 $\mathcal{C}A$.

定理 3 (笛摩根法则) 对于基本集 X 中的并集、交集的补集运算, 有

$$1^\circ \mathcal{C}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{C}A_i).$$

$$2^\circ \mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{C}A_i).$$

证明 $1^\circ x \in \mathcal{C}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$

$$\Leftrightarrow x \notin A_i, \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{C}A_i, \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}A_i.$$

2° 由 1° 取补集, 得

$$\mathcal{C}\left(\mathcal{C}\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}A_i\right),$$

即

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}A_i\right),$$

再把 A_i 换成 $\mathcal{C}A_i$ 即得 2° . □

笛摩根法则提供一种对偶方法, 能把已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去, 这种对偶方法将在以后定理的证明中多次用到.

除了并和交, 还有一种与前面不同但很重要的由已知集合构成新集合的方法. 讨论这个方法, 先介绍有序对的概念, 一个**有序对** (a, b) 是由写成有次序的两个对象 a 和 b 组成的偶对. 有序对 (a, b) 和 (a', b') 相等当且仅当 $a = a'$, $b = b'$ (由此可得, 除去 a 和 b 是相等外, 都有 $(a, b) \neq (b, a)$).

定义 3 (笛卡尔乘积) 设 A, B 是两个非空集合, A 和 B 的笛卡尔 (Descartes) 乘积 $A \times B$ 定义为所有的有序对 (a, b) 的总体. 其中第一项 a 从 A 中取出, 第二项 b 从 B 中取出. 因此

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ 同时 } b \in B\}.$$

类似地可定义 n 个对象的有序组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 及 n 个任意

集 A_1, A_2, \dots, A_n 的 n 重笛卡尔乘积 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 如下:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \\ \text{同时 } a_2 \in A_2, \dots, \text{同时 } a_n \in A_n\}.$$

集合 A 与其自身的 n 重笛卡尔乘积 $A^n = A \times A \times \dots \times A$. 因而实数轴 R 的二重笛卡尔乘积 R^2 表示实欧几里得 (Euclid) 平面, R 的 n 重笛卡尔乘积 R^n 表示 n 维实欧几里得空间.

复数集合也是常用的, 记为 C , 在某些论述中, 不想专门指明 R 或 C , 就用符号 K 表示.

例 2 $A = \{0, 1\}$ 和 $B = \{1, 2\}$, 则

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}.$$

$$B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}.$$

2. 映射

映射的术语几乎出现于所有的数学分支, 集合可以通过映射加以比较和相互关联.

定义 4 (映射) 若 A, B 为两个非空集, 如果存在一种对应法则 f , 使对任何 $x \in A$, 有唯一确定的 $y \in B$ 与 x 对应, 则称 f 为 A 到 B 的映射, 记为 $f: A \rightarrow B$, 或 $A \xrightarrow{f} B$, 且记 $f(x) = y$, y 称为 x 在 f 下的像, x 称为 y 在 f 下的原像, 记为 $f^{-1}(y)$. 集合 A 称为映射 f 的定义域, 记为 $D(f)$.

对 $A_0 \subset A$, $f(A_0) = \{f(x) \mid x \in A_0, f(x) \in B\}$ 称为 A_0 在 f 下的像 $f(A_0)$ 称为 f 的值域, 记为 $\mathcal{R}(f)$.

对 $B_0 \subset B$, $f^{-1}(B_0) = \{x \mid f(x) \in B_0, x \in A\}$ 称为 B_0 在 f 下的原像.

约定 $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

若 f 的定义域与值域均为数域 (实数域 R 或复数域 C) 的子集, f 就是普通的实(复)函数

例 3 设 X 是中华人民共和国中 16 岁以上公民的集合, Y 是

每个公民的身份证的号码。中华人民共和国中16岁以上公民集与身份证号码的集之间存在一个对应的法则 f , 因此, $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射。

例 4 设 X 是任意一个集合, 则映 X 中任意元素 x 到自身的映射 $I: x \mapsto x$ 称为**恒同映射**。

例 5 设 $C[0, 1]$ 是区间 $0 \leq t \leq 1$ 的所有实连续函数全体所成的集合, R 是实数全体所成的集合。由于 $[0, 1]$ 上的连续函数是黎曼(Riemann)可积的, 因此对每一个 $x \in C[0, 1]$, 由

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt$$

对应 R 中的一个确定的数, 故

$$x \mapsto \int_0^1 x(t) dt$$

是 $C[0, 1]$ 到 R 内的一个映射。

例 6 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是一个已知的 $m \times n$ 矩阵, 记 R^n 的点 x 为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

R^m 的点 y 为

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则

$$T: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

是 R^n 到 R^m 中的一个映射, 记为

$$y = Tx.$$

通常映射 f 的值域 $f(A)$ 是 B 的一个真子集, 此时我们说 f 把 A 映入 B 内. 同时, 映射还允许不同的 x 映射到相同的 y 上 (见图 14.4).

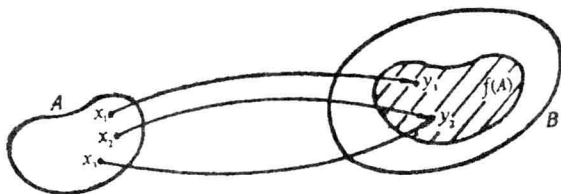


图 14.4

定义 5 (满射、单射、双射) 设 $f: A \rightarrow B$ 的映射, 如果 $f(A) = B$, 则称 f 是**映上的**, 如果 $f(A)$ 中每一个 y 恰好是一个 $x \in A$ 的像, 则称映射 f 是**单一映射**, 如果映射 f 既是映上的, 又是单一映射, 则称 f 是**一一映射**. 有时写作 1-1 映射, 也记作 $A \xrightarrow{1-1} B$.

术语“单射或内射”, “满射”和“双射”分别用来代表“单一映射”, “映上”和“一一映射”.

f 满射 \Leftrightarrow 对任意 $y \in B$, 必有 $x \in A$ 使 $f(x) = y$.

f 单射 \Leftrightarrow 对任意 $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ 必有 $x_1 = x_2$.

\Leftrightarrow 对任意 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

定义 6 (逆映射) 设 $f: A \rightarrow B$ 是一一映射, 则对任意的 $y \in B$, 存在唯一的 $x \in A$, 使 $f(x) = y$, 于是存在一个映射 $g: B \rightarrow A$,