



文登教育

Wendeng Education

2013

文登教育集团课堂用书

(理工类)

考研数学基础 核心讲义

网络增值版

本书使用说明:

- ◆ 本书所提供的网络增值服务**全部免费**，密码无法登陆或无密码者均为盗版书籍。
- ◆ 答疑论坛说明及各复习阶段免费课件介绍详见封二、封三。
- ◆ 本书与教科书平行，又略有提高，**更适合第一轮复习**。
- ◆ 建议在使用“复习指南”之前研读本书，效果更佳！



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



文登教育

Wendeng Education

2013

文登教育集团课堂用书

(理工类)

考研数学基础 核心讲义

网络增值版

增值服务网址 www.biwendeng.com

陈文灯 主 编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前言

数学是一门建立在基本概念、基本理论基础之上的推理演绎科学。有人把学数学比喻成爬台阶,下面几级上不去,就无法再向上爬了,这很有道理。只有打好坚实的基础,才有可能掌握运算的方法和技巧。由于种种原因,有的同学还存在概念没吃透,理论没充分理解的欠缺。为此我们根据几十年的教学和考研辅导经验,编写这本与“教科书”平行,又略有提高,着重于引领同学们深入理解概念和基础理论的书。本书特点如下。

1. 文字叙述通俗易懂,深入浅出,使同学们对基本概念和基本理论理解得更深入更透彻。
2. 发掘出同学们认识和理解的死角和误区,通过例题的讲解,起到正本清源,拨乱反正的作用。
3. 为了引起同学们的注意,对有些概念、定理,还增加了注释,虽然只是寥寥数字,却有画龙点睛、开阔眼界、拓宽思路之功效。
4. 通过对精选例题的讲解做正面的引导,有时也举些反例,起到反面的警示。
5. 针对线性代数、概率与统计公式比较多,难记忆的特点,采用表格法,使之一目了然。

本书对考研学生打基础很有参考价值,对在读本科生、大专生也是良师诤友,本书中有些处理不当的地方请同仁批评指正。

编者

2012年1月

目 录

第 1 篇 高等数学		2.2 各种函数的导数的解法	42
第 1 章 函数、极限和连续	1	一、幂指函数的导数	42
1.1 函数	1	二、函数表达式为若干因子连乘积或商形式的函数的导数或微分的求法	43
一、函数的基本概念	1	三、分段函数的导数	43
二、函数的基本性质	4	2.3 重要结论	44
三、反函数、隐函数和复合函数	7	习题二	45
四、分段函数	11	第 3 章 微分中值定理和导数的应用	47
五、初等函数	11	3.1 微分中值定理	47
1.2 极限	13	一、罗尔定理	47
一、数列的极限	13	二、拉格朗日中值定理和柯西中值定理	50
二、函数的极限	16	三、泰勒定理	53
三、无穷小、无穷大和无穷小量阶的比较	22	3.2 洛必达法则	54
1.3 函数的连续性与间断点	25	一、 $\frac{0}{0}$ 未定式	54
一、函数的连续性	25	二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	55
二、间断点	27	三、其他未定式 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ 的计算	57
三、闭区间上连续函数的性质	28	3.3 导数的应用	58
习题一	30	一、过定点的曲线的切线和法线方程	58
第 2 章 导数与微分	33	二、函数单调性的判别	59
2.1 导数与微分	33	三、函数的极值和最值	60
一、基本概念、性质和定理	33	四、曲线的凹凸性和拐点	62
二、导数公式和运算法则	36	五、曲线的渐近线	63
三、反函数、复合函数和隐函数的求导法则	37	六、函数作图及函数图形与其导函数图形的关系	64
四、微分	38	七、曲率	65
五、高阶导数	39		
六、参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数的导数	41		

习题三	67	一、微元法	105
第4章 不定积分	70	二、平面图形的面积	106
4.1 不定积分的基本概念和性质	70	三、旋转体的体积	107
一、原函数和不定积分的概念	70	四、旋转体的侧面积	108
二、基本积分公式	72	五、已知截面面积的立体的体积	109
三、不定积分的基本运算法则	73	六、平面曲线的弧长	109
4.2 不定积分的计算方法	74	七、一元积分在物理上的应用	110
一、不定积分的换元积分法	74	习题五	111
二、不定积分的分部积分法	78	第6章 向量代数与空间解析几何	114
4.3 各种函数的不定积分	80	6.1 向量代数	114
一、有理函数的不定积分	80	一、向量概念及坐标表示	114
二、三角函数有理式 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的		二、向量的运算	115
不定积分	81	三、两个向量的关系	117
三、含无理式的不定积分	84	6.2 空间平面方程和空间直线方程	
四、分段函数的不定积分	86		118
五、复合函数的不定积分	87	一、平面方程的几种形式	118
习题四	87	二、空间直线方程的几种形式	119
第5章 定积分和反常积分	90	三、平面与平面、平面与直线、直线与直	
5.1 定积分的概念和性质	90	线的关系	119
一、定积分的概念	90	四、平面方程和直线方程的计算	121
二、定积分的性质	91	6.3 曲面方程与空间曲线方程	125
5.2 定积分的计算	94	一、曲面方程基本概念	125
一、微积分基本公式	94	二、空间曲线方程	125
二、定积分的换元法和分部积分法		三、柱面	125
.....	96	四、投影曲线	127
三、定积分计算中的常用公式	98	五、旋转曲面	129
四、分段函数的定积分	100	六、二次曲面	130
五、杂例	101	习题六	132
5.3 反常积分及计算	102	第7章 多元函数微分学及应用	135
一、无穷区间上的反常积分	102	7.1 多元函数、极限和连续	135
二、无界函数的反常积分(或瑕积分)		一、多元函数的概念	135
.....	103	二、二元函数的极限和连续	136
三、计算反常积分的步骤	104	7.2 二元函数偏导数、全微分	138
5.4 定积分的应用	105	一、偏导数	138
		二、全微分	140

7.3 多元复合函数和隐函数微分法	144	一、对弧长的曲线积分	180
一、多元复合函数微分法	144	二、对坐标的曲线积分	184
二、多元隐函数微分法	148	三、两种曲线积分的关系	187
7.4 多元函数的极值、条件极值和最大值、最小值	150	四、格林公式及其应用	188
一、基本概念和定理	150	9.2 曲面积分	191
二、极值的求法	151	一、对面积的曲面积分	191
7.5 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线(数二不作要求)	154	二、对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$	193
一、空间曲线的切线和法平面	154	三、两种曲面积分的关系	196
二、曲面的切平面和法线	154	四、高斯定理及其应用	197
习题七	155	9.3 场论初步	199
第8章 重积分	158	一、方向导数	199
8.1 二重积分	158	二、梯度	199
一、二重积分的概念	158	三、散度	200
二、二重积分的基本性质	159	四、旋度	200
三、二重积分的计算	161	五、通量	200
四、分段函数的二重积分	167	习题九	201
8.2 三重积分(数二不作要求)	169	第10章 无穷级数	204
一、概念	169	10.1 数项级数	204
二、直角坐标系下三重积分的计算	169	一、级数的概念	204
三、柱坐标系下三重积分的计算	171	二、正项级数收敛性的判别	207
四、球坐标系下三重积分的计算	172	三、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n > 0)$ 与莱布尼茨定理	209
五、利用对称性或轮换对称性化简三重积分	173	四、任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \text{ 可正、可负、可 } 0)$ 的绝对收敛和条件收敛	211
8.3 重积分的应用	174	10.2 幂级数	213
一、求体积	174	一、函数项级数	213
二、求曲面面积	176	二、幂级数	214
三、求薄片或形体的质量、质心的坐标、转动惯量、引力	176	10.3 傅里叶级数	220
习题八	177	一、基本概念和定理	220
第9章 曲线积分与曲面积分	180	二、傅里叶级数的展开	220
9.1 曲线积分	180	习题十	222

第 11 章 常微分方程	225
11.1 微分方程的基本概念	225
一、微分方程	225
二、常微分方程的解	225
11.2 一阶微分方程	226
一、可分离变量的微分方程	226
二、齐次方程	226
三、一阶线性微分方程	229
四、伯努利方程(数二不作要求)	231
五、全微分方程(数二不作要求)	231
11.3 二阶线性微分方程	233
一、线性微分方程解的性质和结构定理	233
二、可降阶的微分方程	234
三、常系数齐次和非齐次线性微分方程	235
四、欧拉方程(数二不作要求)	240
习题十一	241

第 2 篇 线性代数

第 1 章 行列式	243
1.1 行列式的概念	243
一、排列与逆序	243
二、 n 阶行列式定义	244
三、特殊的行列式	244
1.2 行列式的性质和定理	245
一、行列式的性质	245
二、行列式按行(列)展开定理	246
1.3 行列式的计算	247
1.4 克莱姆法则	251
习题一	253

第 2 章 矩阵	256
2.1 矩阵的概念	256
一、矩阵的概念和运算	256
二、方阵的行列式	259

2.2 逆矩阵和伴随矩阵	259
一、逆矩阵	259
二、伴随矩阵	260
2.3 分块矩阵	261
2.4 初等变换	263
一、初等变换	263
二、初等矩阵	263
三、矩阵的秩	264
习题二	267

第 3 章 向量	271
3.1 向量	271
一、基本概念和运算法则	271
二、线性组合	272
三、线性相关和线性无关	272
四、向量组的等价	274
五、向量组相关性的重要结论	274
3.2 向量组的秩	275
一、极大线性无关组	275
二、向量组的秩	275
3.3 向量空间	276
一、向量空间的概念	276
二、正交矩阵(数二不作要求)	278
习题三	280

第 4 章 线性方程组	283
4.1 高斯消元法	283
一、基本概念	283
二、高斯消元法(用初等变换求线性方程组的解)	283
4.2 线性方程组解的结构、性质和判定	286
一、齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的基础解系	286
二、齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的解判定定理、性质和结构定理	288
三、非齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = b$ 的解的	

判定定理、性质和结构定理	289	1.3 条件概率和三个概率计算公式	329
四、两个线性方程组解之间的关系	291	一、条件概率	329
4.3 线性方程组在向量中的应用	293	二、三个概率计算公式	330
一、向量的线性相关性	293	1.4 事件的独立性和贝努里概型	332
二、向量组的线性表示的问题	294	一、事件的独立性	332
习题四	296	二、贝努里(Bernoulli) 概型	334
第5章 特征值与特征向量	299	习题一	335
5.1 特征值与特征向量	299	第2章 随机变量及其分布	338
一、基本概念	299	2.1 基本概念和性质	338
二、基本性质	299	一、随机变量和分布函数	338
三、计算特征值与特征向量	300	二、离散型随机变量	339
5.2 相似矩阵与矩阵的对角化	302	三、连续型随机变量	343
一、基本概念和性质	302	2.2 随机变量函数的分布	345
二、矩阵的相似对角化的步骤	302	一、离散型随机变量函数的分布	345
三、实对称矩阵的相似对角化	304	二、连续型随机变量函数的分布	347
习题五	305	习题二	348
第6章 二次型	309	第3章 多维随机变量及其分布	352
6.1 基本概念和性质	309	3.1 基本概念	352
一、二次型的定义	309	一、二维随机变量的分布	352
二、合同变换和合同矩阵	310	二、边缘分布	353
三、二次型的标准形与规范形	311	3.2 二维随机变量	353
四、矩阵的等价、相似和合同的结论	316	一、二维离散型随机变量	353
6.2 正定二次型	317	二、二维连续型随机变量	357
习题六	319	三、相互独立的随机变量	360
第3篇 概率论与数理统计		3.3 随机变量的函数分布 $Z = g(X, Y)$	362
第1章 随机事件与概率	322	习题三	366
1.1 基本概念与性质	322	第4章 随机变量的数字特征	372
一、基本概念	322	4.1 一维随机变量的数字特征	372
二、事件的概率和性质	324	一、数学期望和方差	372
1.2 古典概率	326	二、重要结论和公式	374
一、古典概型	326	三、由随机试验给出的随机变量的数字特征的计	375
二、几何概型	328		

4.2 二维(多维)随机变量的数字特征	376	6.2 三个常用统计量分布: χ^2 分布, t 分布和 F 分布	397
一、两个随机变量函数的数学期望	376	一、 χ^2 分布	397
二、协方差、相关系数和矩	376	二、 t 分布	397
三、二维随机变量及其函数的数字特征的计算	377	三、 F 分布	398
四、利用 $(0-1)$ 分布求多维随机变量数字特征	384	四、正态总体的抽样分布	398
习题四	385	五、统计量的数字特征	400
第5章 大数定律与中心极限定理	388	习题六	402
5.1 大数定律	388	第7章 参数估计与假设检验	404
一、切比雪夫不等式	388	7.1 参数的点估计	404
二、大数定律	389	一、基本概念	404
5.2 中心极限定理	390	二、矩估计法	404
一、列维—林德伯格定理	390	三、最大似然估计法	405
二、棣莫佛—拉普拉斯定理	391	四、估计量的性质	407
习题五	393	7.2 参数的区间估计	409
第6章 样本与抽样分布	395	一、置信区间	409
6.1 数理统计的基本概念和结论	395	二、正态总体的区间估计	409
一、总体与样本	395	7.3 假设检验	413
二、统计量	396	一、基本概念	413
三、分位数	397	二、常见正态总体的假设检验	414
		三、两类错误	418
		习题七	418

第1篇 高等数学

第1章 函数、极限和连续

基础知识与规律总结

1.1 函 数

一、函数的基本概念

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量, D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意的 $x \in D$, 变量 y 按照对应法则 f 总有一个确定的实数值与之对应, 则称 y 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, D 称为函数的定义域, 有时记为 D_f .

全体函数值的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

● ① 函数是一个变量对另一个变量的依赖关系.

如, 函数 $y = x^2, y = \sin x + 1, y = \ln x, y = \ln x^2$ 等.

② $y = c$ (c 为常数) 称为常函数.

2. 函数的定义域的求解

(1) 若函数是用解析式表示的, 则定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合;

(2) 若函数是根据实际问题建立的, 则定义域就是具有实际意义的实自变量值的集合.

常用函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \text{定义域为: } x \neq 0; y = \sqrt[n]{x} (n \in \mathbf{N}), \text{定义域为: } x \geq 0;$$

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1), \text{定义域为: } x > 0;$$

$$y = \sin x \text{ 或 } y = \cos x, \text{定义域为: } (-\infty, +\infty);$$

$$y = \tan x, \text{定义域为: } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \cot x, \text{定义域为: } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \arcsin x \text{ 或 } y = \arccos x, \text{定义域为: } [-1, 1].$$

【例 1.1】求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{x-1}(9-x^2);$$

$$(2) y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}.$$

【解】(1) 函数若要有意义, 必满足以下条件:

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}, \text{故函数的定义域为: } \{x \mid 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}.$$

(2) 函数若要有意义, 必满足以下条件:

$$\begin{cases} \arcsin x - \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{故函数的定义域为: } \left\{x \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1\right\}.$$

一般给出函数表达式时, 并不写出它的定义域, 但是隐含定义域.

如, 给出函数 $y = \frac{1}{x}$, 就隐含了 $x \neq 0$.

3. 函数的值域的求解

(1) 由多项式表达的函数, 一般用配方法或判别式法求函数的值域.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ 有实数解} \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则 $f(x)$ 无实数解.

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域.

(3) 若含三角函数, 可利用某些三角函数的有界性.

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域(1.3 节讲).

【例 1.2】求下列函数的值域:

$$(1) y = 3 - \sqrt{x^2 - 4x + 9};$$

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2};$$

$$(3) y = \frac{x+1}{x+2};$$

$$(4) y = 3 - 2\sin(3x - \frac{\pi}{4});$$

$$(5) y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}.$$

【解】(1) 应用配方法, 则 $y = 3 - \sqrt{(x-2)^2 + 5}$,

故函数的值域为 $(-\infty, 3 - \sqrt{5}]$.

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1 - \frac{4}{\sin x + 2}, \text{ 而 } -1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$\text{所以 } 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq 1,$$

$$\text{即 } -3 \leq y \leq -\frac{1}{3}, \text{ 故函数的值域为 } \left[-3, -\frac{1}{3}\right].$$

$$(3) \text{ 当 } x \neq -2 \text{ 时, 由原式可得 } x = \frac{1-2y}{y-1}, \text{ 即 } y \neq 1.$$

故函数的值域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(4) 由原式可得: $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3-y}{2} + \frac{\pi}{12}$, 因为 $\left| \frac{3-y}{2} \right| \leq 1$,

所以函数的值域为 $[1, 5]$.

(5) 变形为 $2yx^2 - 4yx + 3y - 5 = 0$, 则

$$\Delta = 16y^2 - 8y(3y - 5) \geq 0 \Rightarrow y(y - 5) \leq 0 \Rightarrow 0 < y \leq 5.$$

4. 函数概念的两个要素: 定义域和对应法则

(1) 定义域: 自变量 x 的取值范围.

$y = \arcsin(x^2 + 2)$ 不是函数, 因为 $x^2 + 2 > 1$.

(2) 对应法则: 给定 x 值, 求 y 值的方法.

① 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时, 两个函数才表示同一个函数(或称两个函数等价), 否则表示两个不同的函数.

② 函数的表示法只与定义域和对应法则有关, 而与用什么字母表示无关, 这称为函数表示的无关特性. 此法常用来求函数的表达式.

【例 1.3】 在下列各组函数中, 找出两个函数等价的一组.

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$;

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$;

(3) $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$;

(4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$.

【解】 (1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x \neq 0\}$; $y = 1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$, 故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \geq 0\}$; $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$, 故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x \neq 0\}$, 且对应法则相同, 故该组的两个函数等价.

(4) 要使 $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义, 则要求 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$, 即定义域为 $\{x \geq 3\}$; 要使 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$

有意义, 则要求 $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 即定义域为 $\{x \geq 3 \text{ 或 } x < 2\}$, 故该组的两个函数不等价.

【例 1.4】 设 $f(\tan x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$, 求 $f(x)$.

【分析】 对 $f(g(x)) = h(x)$, 一般令 $g(x) = t$, 求出 x 关于 t 的表达式, 代入 $h(x)$, 然后利用函数的表示无关特性求函数的表达式.

【解】 $f(\tan x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x$, 令 $\tan x = t$, 有 $f(t) = 1 + 2t^2$.

于是 $f(x) = 1 + 2x^2$.

【例 1.5】 设 $f(\cos^2 x) = \cos 2x - \cot^2 x$, $0 < x < 1$, 求 $f(x)$.

【解】 $f(\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 - \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$,

令 $t = \cos^2 x$, 则 $f(t) = 2t - 1 - \frac{t}{1-t}$, $\cos^2 1 < t < 1$.

$$\text{故 } f(x) = 2x - 1 - \frac{x}{1-x} = 2x - \frac{1}{1-x}, \cos^2 1 < x < 1.$$

二、函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x) \text{ (或 } f(-x) = -f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 为关于自变量 x 的偶函数(或奇函数).

① 奇、偶性是函数的整体性质, 对整个定义域而言, 奇、偶函数的定义域一定关于原点对称, 如果一个函数的定义域不关于原点对称, 则这个函数一定不是奇(或偶)函数. 所以判断函数的奇偶性, 首先是检验其定义域是否关于原点对称, 然后再严格按照奇、偶性的定义经过

化简、整理, 再与 $f(x)$ 比较得出结论. 如, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 因为其定义域关于原点不对称, 它就不具有奇偶性.

② 偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称; 奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.

③ $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 是奇函数的有效方法. 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x=0$ 处有定义, 则 $f(0) = 0$.

④ $f(x) \equiv 0$ 既是奇函数又是偶函数. $f(x) \equiv c (c \neq 0)$ 是偶函数.

(2) 奇偶函数的运算性质.

① 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或任意多个偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数之积为奇函数.

③ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

④ 非零的一个奇函数和一个偶函数的和是非奇非偶的.

常见的偶函数: 常函数 $y = c$, $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), e^{x^2} , $e^{|x|}$, $e^{\cos x}$, $\dots$.

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} (n 为正整数), $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{sgn} x$, $\dots$.

【例 1.6】 判别下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$(2) f(x) = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x > 0 \\ x(1+x), & x < 0 \end{cases}.$$

【解】 (1) $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) \text{ 令 } G(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } G(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } G(x) + G(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0.$$

所以 $G(x)$ 是奇函数, 又 $F(x)$ 是奇函数, 而偶数个奇函数的乘积是偶函数, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

$$(3) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f(-x) = -x[1 + (-x)] = -x(1 - x) = -f(x);$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(-x) = -x[1 - (-x)] = -x(1 + x) = -f(x).$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

【例 1.7】 证明: 定义在对称区间 $(-a, a)$ 内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【证】 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内有定义, 令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

$$\text{因为 } \varphi(-x) = -\varphi(x), \psi(-x) = \psi(x),$$

$$\text{所以 } \varphi(x) \text{ 是奇函数, } \psi(x) \text{ 是偶函数, 而 } f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

故命题得证.

这个结论要记住, 以后用起来方便.

2. 周期性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D , 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使得对任意 $x \in D$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. $f(x-T) = f(x)$ 也是成立的.

(2) 周期函数的运算性质.

① 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2 (T_1 \neq T_2)$ 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 一般是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的周期函数 (正弦函数与余弦函数的和或差不满足此性质, 如 $|\sin x| + |\cos x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$).

常见的周期函数: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$; $\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

【例 1.8】 求 $f(x) = x - [x]$ 的最小周期.

【解】 设 $x = n + r, m$ 为正整数, 则

$$f(x+m) = f(m+n+r) = m+n+r - [m+n+r]$$

$$= m + n + r - m - [n + r] = n + r - [n + r] = f(x),$$

故一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期, 且最小周期为 1.

周期函数并不一定有最小周期. 如对于常函数, 任意正数都是它的周期; 对于狄利克莱函数, 任意正有理数都是该函数的周期, 所以常函数和狄利克莱函数都不存在最小正周期.

【例 1.9】 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a, x = b$ 均对称 ($a < b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】 由题设, $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) \\ &= f[b + (2a-x-b)] = f[b - (2a-x-b)] \\ &= f[x + 2(b-a)]. \end{aligned}$$

故 $y = f(x)$ 是周期函数, 且周期 $T = 2(b-a)$.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义, 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界, 数 M 称为 $f(x)$ 的一个界; 若不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

若存在 M_1 , 对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界, 且 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在 M_2 , 对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界, 且 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

① 有界性是相对于某个区间而言的, 是局部概念.

如, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上是无界的, 但在 $[0.01, 2]$ 上是有界的.

② 函数在 D 上有界的充分必要条件是函数在 D 上既有上界又有下界.

六个常见的有界函数:

$$\begin{aligned} |\sin x| &\leq 1; |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty); \\ |\arcsin x| &\leq \pi/2; |\arccos x| \leq \pi, x \in [-1, 1]; \\ |\arctan x| &< \pi/2; |\operatorname{arccot} x| < \pi, x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加 (或单调减少) 的.

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加时, $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相同, 即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0.$$

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调减少时, $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相反, 即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0.$$

① 单调性也是相对于某个区间而言的,是局部概念.

② 单调函数的反函数仍单调,且单调性相同.

③ 复合函数 $f(g(x))$ 的单调性有如下结论.

若 f, g 的单调性相同,则 $f(g(x))$ 单增;若 f, g 的单调性相反,则 $f(g(x))$ 单减.

【例 1.10】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【证】 任取 $x_1, x_2 \in (-a, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$ 且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,故 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

又由于 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是奇函数,则 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

奇函数若在某区间单调增加(或减少),则在对称区间单调增加(或减少);

偶函数若在某区间单调增加(或减少),则在对称区间单调减少(或增加).

三、反函数、隐函数和复合函数

1. 反函数

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 Z_f . 若对任意 $y \in Z_f$, 有唯一确定的 $x \in D_f$ 满足 $y = f(x)$, 则称 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数, 记为

$$x = f^{-1}(y) \text{ (或 } x = \varphi(y) \text{)},$$

并称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 而 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x), x \in Z_f$.

① $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像重合; 而 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称(均在同一坐标系中).

② $y = f(x)$ 的定义域是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域.

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数. 定义域上单调的函数必有反函数. 要求函数的反函数, 只能求它的单调区间上的反函数.

④ $y = f(f^{-1}(y)), x = f^{-1}(f(x))$.

⑤ 奇函数的反函数也是奇函数.

⑥ 函数与其反函数具有相同的单调性.

(2) 计算反函数的步骤:

① 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出, 得到 $x = f^{-1}(y)$;

② 将刚才得到的表达式中的字母 x 与 y 对换, 即得所求函数的反函数 $y = f^{-1}(x)$, 要注意写出定义域.

若求分段函数的反函数, 只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

【例 1.11】 求 $y = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.

【解】当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时, 原式变形为:

$$y(\sqrt{2x+1}+1) = \sqrt{2x+1}-1, \text{ 即 } \sqrt{2x+1} = \frac{1+y}{1-y},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right)^2 - 1 \right] = \frac{2y}{(1-y)^2}, \text{ 且 } \frac{1+y}{1-y} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y < 1.$$

$$\text{故反函数为 } y = \frac{2x}{(1-x)^2}, \text{ 且 } -1 \leq x < 1.$$

【例 1.12】设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$, 求 $f^{-1}(x)$.

【解】由 $y = x, -\infty < x < 1$ 可得 $x = y, -\infty < y < 1$;

$$\text{由 } y = x^2, 1 \leq x \leq 4 \text{ 可得 } x = \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 16;$$

$$\text{由 } y = 2^x, 4 < x < +\infty \text{ 可得 } x = \log_2 y, 16 < y < +\infty;$$

将以上所得各式中的字母 x 与 y 对换, 则得到 $f(x)$ 的反函数

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}.$$

2. 隐函数

前面我们接触到的都是显函数, 即 y 等于含自变量 x 的式子, 如 $y = \ln(x+1)$ 等, 只要知道了 x 的值, 立刻就能得到 y 的值. 但有的函数方程不能这么表达, 即 y 不能用 x 的式子表示; x 也不能用 y 的式子表示. x 和 y 的对应关系由一个方程 $F(x, y) = 0$ 表示.

如果变量 x, y 满足一个方程 $F(x, y) = 0$, 在一定条件下, 当 x 取某区间的任一值时, 相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在, 则说方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

● 有的隐函数可以化成显函数, 如, $x - y^3 + 1 = 0$ 是一个隐函数, 它也可以化成显函数, 即 $x = y^3 - 1$ 或 $y = \sqrt[3]{x+1}$. 但有的隐函数不能表示成显函数的形式. 如, 隐函数 $e^x + e^y + xy = 0$.

3. 复合函数

(1) 定义.

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $Z_\varphi \subset D_f$, 则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 其中 x 为自变量, u 为中间变量, y 为因变量.

● 复合的条件: $Z_\varphi \subset D_f$, 即外层函数的定义域包含内层函数的值域.

如, $y = \arcsin u, u = x^2 + 2$ 不能复合为 x 的函数. 因为 $|u| \leq 1, x^2 + 2 \geq 2$, 所以 $y = \arcsin(x^2 + 2)$ 无意义.

(2) 求复合函数的定义域.

已知 $f(x)$ 的定义域为 D_f , 求函数 $f(g(x))$ 的定义域只需求满足 $g(x) \in D_f$ 的 x 的集合.