如果您使用过各种数学辅导资料 但成效不大
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十八年 ◆ 风靡几代人

专利产品

专利证书号1697051号

浙江大学 吕斌 审订

最新 第四版

概率论与数理统计教与学参考

主编 阎国辉

与浙江大学第四版教材配套

本书八大特色

★考点提示及大纲要求
★考研经典题剖析
★重点知识结构图
★典型错误类型及根源分析
★常考题型与范例精解
★学习效果三级测试
★疑难解答
★课后习题详解与三级测试题答案

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

如果您使用过各种数学辅导资料 但成效不大
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十八年 ◆ 风靡几代人

浙江大学 吕斌 审订

最新 第四版

概率论与数理统计教与学参考

与浙江大学第四版教材配套

主编 阎国辉

编者 张安志 阎国辉 罗炜 孙琳

时代出版 安徽教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

最新概率论与数理统计教与学参考／阎国辉主编．—4 版．— 合肥：安徽教育出版社，2011.3
ISBN 978－7－5336－5899－1

Ⅰ．①最…　Ⅱ．①阎…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 041253 号

书名：最新概率论与数理统计教与学参考　　作者：阎国辉

出　版　人：朱智润　　选题策划：王迈迈　　责任编辑：肖　婷
责任印制：王云云　　装帧设计：奚雄军

出版发行：时代出版传媒股份有限公司　http://www.press-mart.com
安徽教育出版社 http://www.ahep.com.cn
（合肥市繁华大道西路 398 号，邮编：230601）
营销部电话：(0551)3683010，3683011，3683015
时代迈迈教育出版传媒武汉公司（http://www.wmmenglish.com）
营销部电话：(027)87733739，87733959
排　　版：安徽创艺彩色制版有限责任公司
印　　刷：枝江市新华印刷有限公司　　电话：(0717)4212959
（如发现印装质量问题，影响阅读，请与印刷厂商联系调换）

开本：889×1230　1/32　　印张：16　　字数：400 千字
版次：2011 年 5 月第 1 版　　2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5336－5899－1　　定价：19.80 元

Preface 前言

浙江大学《概率论与数理统计》(第四版)是全国高等院校理工科普遍采用的《工程数学》系列教材之一。为了帮助同学们学好该书，我们根据多年的教学经验和考研辅导的深刻体会，编写了《概率论与数理统计教与学参考》一书，该书是《高等数学教与学参考》的姊妹篇。

多年来，我们在讲授《概率论与数理统计》这门课的同时，一直希望能有一本十分详尽的教学参考书，以便帮助同学们系统地掌握所学知识为进一步考研奠定坚实的基础。《最新概率论与数理统计教与学参考》就是在这种思想的指导下完成的。编者深入研究了大量的教学参考书和各类试题，精选的例题力求做到具有启发性、典型性和针对性。该书完全与教材同步。根据教与学的需要及目前考研的命题趋势，我们重点编写了前八章。对于后六章也给出了全部习题解答。重点章节基本上包括以下八方面的内容:

一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然，考点简明扼要。

二、重点知识结构图。该图提纲挈领，逻辑性强，体系完整。

三、常考题型与范例精解。题型典型灵活，解题方法富于技巧，内容覆盖全面。

四、疑难解答。抓住要害，突出重点、难点，拓宽知识面。

五、考研经典题剖析。开阔视野，“一步到位”，使读者更加明了考研的题型和难度，做到有的放矢。

六、典型错误类型及根源分析。析理透彻，一针见血。

七、学习效果测试。循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

八、习题解答与测试题答案。便于自我检测。

我们真诚希望《最新概率论与数理统计教与学参考》能够成为广大读者的得力助手。

编者

目录 CONTENTS

第一章 概率论的基本概念

一、考点提示及大纲要求

考点提示

1. 随机事件与样本空间；
2. 事件的关系运算，样本空间划分的定义；
3. 概率的定义和概率的基本性质；
4. 古典概型、条件概率；
5. 概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式；
6. 事件的独立性，独立重复试验。

大纲要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算；
2. 了解概率、条件概率的定义，掌握概率的基本性质，会计算古典概型的概率；
3. 掌握概率的加法公式，乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式；
4. 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性进行概率计算；
5. 理解独立重复试验的概率，掌握计算有关事件概率的方法。

二、重点知识结构图

- 随机事件
  - 样本空间 S
  - 事件间的关系
    - 包含 $A\subseteq B$，相等 $A=B$
    - 对立事件 $\overline{A}$，互不相容 $AB=\varnothing$
  - 事件间运算
    - 和事件 $A\cup B$
    - 积事件 AB
    - 差事件 $A-B$
- 概率
  - 古典概型
    - 随机事件 A 发生的概率：$P(A)=\frac{k}{n}$
    - 独立重复试验
  - 几何概率
    - $P=\frac{u(g)}{u(G)}$
  - 加法公式
    - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
    - $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
    - $P(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$
  - 条件概率
    - 定义 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)>0)$
    - 乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$（或 $P(B)P(A|B)$）
    - 全概率公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$
    - 贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$
  - 独立性
    - 两事件独立，$P(AB)=P(A)P(B)$
    - 多事件独立。

三、常考题型与范例精解

例1 设$A\subset B$,$P(A)=0.1$,$P(B)=0.5$,则$P(AB)=$______,$P(A\cup B)=$______,$P(\bar{A}\cup\bar{B})=$______.

解 因为$A\subset B$,

所以 $AB=A,A\cup B=B,\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{AB}$

故 $P(AB)=P(A)=0.1;P(A\cup B)=P(B)=0.5;$

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9.$

例2 设A,B为两相互独立的事件,$P(A\cup B)=0.6$,$P(A)=0.4$,则$P(B)=$______.

解 由题设A、B相互独立,因此$P(AB)=P(A)P(B)$,

由于$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

即有 $0.6=0.4+P(B)-0.4P(B)$

故 $P(B)=0.2/0.6=\dfrac{1}{3}.$

例3 设在全部产品中有2%是废品,而合格品有85%是一级品,则任抽出一个产品是一级品的概率为______.

解 设$A=$“抽出合格品”,$B=$“抽出一级品”,则

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.02=0.98$

又 $P(B\mid A)=0.85$

故所求概率

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.98\times0.85=0.83.$

例4 甲乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为0.6和0.5,现已知目标被击中,则它是甲射中的概率为______.

解 设A表示“甲射中目标”;B表示“乙射中目标”,则$A\cup B$表示“目标被击中”,由加法公式有

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.6+0.5-0.6\times0.5=0.8\end{aligned}$$

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75.$$

例5 某射手在三次射击中至少命中一次的概率为0.875,则这射手在一次射击中命中的概率为______.

解 设A表示“射手命中”且$P(A)=p$,$P\{三次射击全不命中\}=C_3^0p^0(1-p)^3=(1-p)^3$.

而 $P\{三次射击至少命中一次\}=1-P\{全不命中\}$

因此可得:

$1-(1-p)^3=0.875$

即 $(1-p)^3=0.125,1-p=0.5$

故 $P(A)=0.5.$

例6 将 C、C、E、E、I、N、S 等七个字母排成一行，那么恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率为______.

解 设想将七个字母按 1 ~ 7 编上号，则其排列方法共有 $P_7^7 = 7!$ 种，而排成 $SCIENCE$ 的基本事件有 7153624，7253614，7154623，7254613 共四种，故所求概率为

$$\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260}.$$

例7 假设1000件产品中有200件是不合格的产品，依次作不放回抽取两件产品，则第二次抽取到不合格品的概率是______.

解 设 A 表示"第一次抽取到不合格品"，B 表示"第二次抽取到不合格品"，由全概率公式得

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})$$

而由题设 $P(A) = \frac{200}{1000} = 0.2$,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.8,$$

由于是不放回的抽取，故有

$$P(B \mid A) = \frac{199}{999}, P(B \mid \bar{A}) = \frac{200}{999},$$

故 $$P(B) = 0.2 \times \frac{199}{999} + 0.8 \times \frac{200}{999} = 0.2.$$

例8 将数字1，2，3，4，5写在5张卡片上，任意取出三张排列成三位数，这个数是奇数的概率 $P(A) =$ ______.

解 试验的基本事件总数为 $P_5^{\ 3}$，对于一个固定的个位奇数，十位和百位数字有 $P_4^{\ 2}$ 种选择，而个位奇数有3种可能，因此 A 包含的基本事件数为 $3P_4^{\ 2}$，依概率的古典定义，有

$$P(A) = \frac{3P_4^{\ 2}}{P_5^{\ 3}} = 3/5.$$

例9 假设一批产品中一、二、三等品各占60%、30%、10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为______.

解 设 A_i 表示"取到的一个产品为 i 等品"，$i = 1,2,3$，显然，A_1、A_2、A_3 为互斥事件组，由题意有

$$P(\overline{A_3}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{90}{100}$$

$$P(A_1 \mid \overline{A_3}) = \frac{P(A_1 \overline{A_3})}{P(\overline{A_3})} = \frac{P[A_1(A_1 \cup A_2)]}{P(\overline{A_3})} = \frac{P(A_1 \cup A_1 A_2)}{P(\overline{A_3})}$$

$$= \frac{P(A_1)}{P(\overline{A_3})} = \frac{60\%}{90\%} = \frac{2}{3}.$$

例10 有两只口袋，甲袋中装3只白球，2只黑球，乙袋中装有2只白球，5只黑球，任选一袋，并从中任取一球，此球为白球的概率是______.

解 设 B 表示"选出甲袋"，则 $\bar{B}$ 表示"选出乙袋"，B 与 $\bar{B}$ 构成样本空间的一个划分，又设 A 表示"取出的球是白球"，由题设可知

$$P(B) = P(\bar{B}) = \frac{1}{2}, P(A \mid B) = 3/5, P(A \mid \bar{B}) = \frac{2}{7}$$

由全概率公式，得

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid \bar{B})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{31}{70}.$$

例 11 已知 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$ ______.

解 因为 $P(A-B)=P(A\bar{B})$

$=P(A)P(\bar{B}\mid A)=P(A)[1-P(B\mid A)]$

$$1-P(B\mid A)=\frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7}$$

从而 $P(B\mid A)=1-3/7=4/7.$

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)P(B\mid A)$$
$$=1-\frac{7}{10}\times\frac{4}{7}=0.6.$$

例 12 设 A、B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是(　　).

(A) $P(A\cup B)=P(A)$;　　(B) $P(AB)=P(A)$;

(C) $P(B\mid A)=P(B)$;　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

解 由于 $B\subset A$，则有 $A\cup B=A$

于是 $P(A\cup B)=P(A)$

故选(A).

例 13 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid \bar{B})=1$，则(　　).

(A) 事件 A 与 B 互不相容;　　(B) 事件 A 与 B 互相对立;

(C) 事件 A 与 B 互不独立;　　(D) 事件 A 和 B 相互独立.

解 由于 $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid \bar{B})=P(A\mid B)+1-P(A\mid \bar{B})$
$=1$,

从而 $P(A\mid B)-P(A\mid \bar{B})=0$

又 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}, P(A\mid \bar{B})=P(A\bar{B})/P(\bar{B})$

故有 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$

从而 $P(AB)[1-P(B)]=P(B)P(A\bar{B})$

$$P(AB)=P(B)[P(AB)+P(A\bar{B})]$$
$$=P(B)P[A(B\cup\bar{B})]=P(B)P(A),$$

故选(D).

例 14 设 A、B 为两个互斥事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则结论正确的是(　　).

(A) $P(B\mid A)>0$;　　(B) $P(A\mid B)=P(A)$;

(C) $P(A\mid B)=0$;　　(D) $P(AB)=P(A)P(B)$.

解 因为 A、B 互斥，即 $AB=\varnothing$，故 $P(AB)=0$,

又因 $P(A)>0, P(B)>0$,

由公式 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)=0$

即 $P(A\mid B)=0.$

故选(C).

例 15 设 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 为(　　).

(A)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”;
(B)“甲种产品带销”;
(C)“甲、乙两种产品均畅销”;
(D)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”.

解 设A_1,A_2分别表示甲、乙产品畅销,

则$A = A_1\overline{A_2}$,由德莫根定理知

$\bar{A} = \overline{A_1\overline{A_2}} = \overline{A_1} \cup A_2$

故选(A).

例16 每次试验成功率为$p(0 < p < 1)$,进行重复实验,直到第10次试验才取得4次成功的概率为( )

(A) $C_{10}^4p^4(1-p)^6$; (B) $C_9^3p^4(1-p)^6$;

(C) $C_9^4p^4(1-p)^5$; (D) $C_9^3p^3(1-p)^6$.

解 所谓直到第10次试验才取得4成功的隐含意义是前9次成功了3次,而第10次是成功的,故选(B).

例17 关于独立性,下列说法错误的是( ).

(A) 若$A_1,A_2,...,A_n$相互独立,则其中的任意多个事件$A_{i1},A_{i2},...,A_{ik}(k \leq n)$仍然相互独立;

(B) 若$A_1,A_2,...,A_n$相互独立,则它们之中的任意多个事件换成其对立事件后仍然相互独立;

(C) 若A与B相互独立,B与C相互独立,C与A相互独立,则A、B、C相互独立;

(D) 若A、B、C相互独立,则$A \cup B$与C相互独立.

解 $A_1,A_2,...,A_n$相互独立与$A_1,A_2,...,A_n$两两独立是不同的概念,前者包含后者,反之则不然,故选(C).

例18 设$P(A) = a,P(B) = b,P(A \cup B) = c$,则$P(A\bar{B})$为( ).

(A) $a(1-b)$; (B) $a-b$; (C) $c-b$; (D) $a(1-c)$.

解 利用等式$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$知

$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$,又

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

从而 $P(A\bar{B}) = P(A \cup B) - P(B) = c - b$

故选(C).

例19 设$P(A) = 0.8,P(B) = 0.7,P(A \mid B) = 0.8$,则下列结论正确的是( ).

(A) 事件A与B互不相容; (B) $A \subset B$

(C) 事件A与B互相独立; (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

解 因$P(A) = P(A \mid B) = 0.8$,从而事件A与B独立,故选(C).

例20 袋中有5个球(3个新球,2个旧球),现每次取一个,无放回地抽取两次,则第二次取到新球的概率为( ).

(A) $\frac{3}{5}$; (B) $\frac{3}{4}$; (C) $\frac{2}{4}$; (D) $\frac{3}{10}$.

解 设B表示“第一次取到新球”,则$\bar{B}$为“第一次取到旧球”,又设A为“第二次取到新球”. 由题设可知$P(B) = \frac{3}{5},P(\bar{B}) = \frac{2}{5},P(A \mid B) = \frac{2}{4},P(A \mid \bar{B}) = \frac{3}{4}$,由全概率公式得

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 3/5.$$

故选(A).

例 21 向单位圆 $x^2 + y^2 < 1$ 内随机地投下 3 点，则这 3 点恰有 2 点落在第一象限中的概率为(　　).

(A) $\frac{1}{16}$;　(B) $\frac{3}{64}$;　(C) $\frac{9}{64}$;　(D) $\frac{1}{4}$.

解 投下的每一点，可看做有两种可能的结果：A 为点落在第一象限中；$\bar{A}$ 为点不落在第一象限中，$P(A) = \frac{1}{4}$，$P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$，落下 3 点相当于三重贝努里试验，于是所求概率为 $P_3(2) = C_3^2(\frac{1}{4})^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

故选(C).

例 22 设有一批产品共 100 件，其中有 95 件合格品，5 件次品，从中任取 10 件. (1) 求样本空间所含基本事件个数 n 是多少？(2) 求事件 A_1 = "所取 10 件全是合格品"所含基本事件的个数 m_1 是多少？(3) 求 A_2 = "取出 10 件中恰有两件次品"所含基本事件个数 m_2 是多少？

解 (1) 在此随机试验中，从 100 件产品取出 10 件，每次得到的一个结果就是一个基本事件. 总共有 C_{100}^{10} 种取法. 所以 $n = C_{100}^{10}$.

(2) 要求每次取出的 10 件产品都是合格品，这只能从 95 件合格品中取，总共有 C_{95}^{10} 种取法，所以 $m_1 = C_{95}^{10}$.

(3) 要求每次取出的 10 件产品中有两件次品，只能从 5 件次品中取，共有 C_5^2 种取法；而对于已取定的两件次品，还要配上 8 件合格品，这 8 件合格品要从 95 件合格品中取出，有 C_{95}^8 种取法这样，使"取出 10 件中恰有两件次品"，总共有 $C_5^2C_{95}^8$ 种取法，所以 $m_2 = C_5^2C_{95}^8$.

例 23 在某城市中发行三种报纸 A、B、C，经调查，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 及 B 报的有 10%，同时订阅 A 及 C 报的有 8%，同时订阅 B 及 C 报的有 5%，同时订阅 A、B、C 报的有 3%. 试求下列事件的概率：

(1) 只订 A 报的；
(2) 只订 A 及 B 报的；
(3) 只订一种报纸的；
(4) 正好订两种报纸的；
(5) 至少订阅一种报纸的；
(6) 不订阅任何报纸的；
(7) 最多订阅一种报纸的；

解 (1)$P(A\bar{B}\bar{C}) = P(A - B - C) = P(A - (B \cup C))$
$= P(A - A(B \cup C)) = P(A) - P(A(B \cup C))$
$= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$
$= 0.45 - 0.10 - 0.08 + 0.03 = 0.30.$

(2)$P(AB\bar{C}) = P(AB - C) = P(AB - ABC)$
$= P(AB) - P(ABC) = 0.10 - 0.03 = 0.07.$

(3)$P(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C)$

$= P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$

$= 0.30 + P(B - B(A \cup C)) + P(C - C(A \cup B))$

$= 0.30 + P(B) - P(BA) - P(BC) + P(ABC) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$= 0.30 + 0.35 - 0.10 - 0.05 + 0.03 + 0.30 - 0.08 - 0.05 + 0.03$

$= 0.73.$

(4) $P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC)$

$= P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC))$

$= P(AB) - P(ABC) + P(AC) - P(ABC) + P(BC) - P(ABC)$

$= P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC)$

$= 0.10 + 0.08 + 0.05 - 3 \times 0.03 = 0.14.$

(5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$= 0.45 + 0.35 + 0.30 - 0.10 - 0.08 - 0.05 + 0.03 = 0.90$

(6) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - 0.09 = 0.10$

(7) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C)$

$= P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$

$= 0.10 + 0.73 = 0.83.$

例 24 设有 n 个房间，分给 n 个人，每个人都以 $\frac{1}{n}$ 的概率进入每一房间，而且每间房里的人数没有限制，试求不出现空房的概率.

解 n 个房间分给 n 个人，人数不限，即每个房间可以重复分配给不同的人，这相当于取 n 个房间给 n 个排列好的人，可以重复取，故可能的排列种数为 $N = n^n$；没有空房，即每人进一间房，这相当于 n 个房间不重复地分配给 n 个排列好的人，也就是取 n 个房间进行全排列，故 $M = n!$，

故所求的概率是 $p = \frac{n!}{n^n}$.

例 25 连续做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果，已知当第 k 次成功时，第 $k+1$ 次成功的概率为 $\frac{1}{2}$；当第 k 次失败时，第 $k+1$ 次成功的概率为 $\frac{3}{4}$. 如果第一次试验成功和失败的概率均为 $\frac{1}{2}$，求第 n 次试验成功的概率.

解 令 $A_k = \{$第 k 次试验成功$\}$

$P(A_k) = P_k, k = 1, 2, \ldots$，则

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= P(A_{k-1})P(A_k \mid A_{k-1}) + P(\bar{A}_{k-1})P(A_k \mid \bar{A}_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{3}{4}P(\bar{A}_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{3}{4}[1 - P(A_{k-1})] \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}P(A_{k-1}), k \geqslant 2
\end{aligned}
$$

即 $P_k = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}P_{k-1}, k \geqslant 2$，于是

$$P_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}P_{n-1},$$

$$(-\frac{1}{4})P_{n-1}=\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})+(-\frac{1}{4})^2P_{n-2},$$

$$(-\frac{1}{4})^2P_{n-2}=\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})^2+(-\frac{1}{4})^3P_{n-3},$$

……

$$(-\frac{1}{4})^{n-2}P_2=\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})^{n-2}+(-\frac{1}{4})^{n-1}P_1$$

两边分别相加得:

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})+\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})^2+\dots+\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})^{n-2}\\&\quad+(-\frac{1}{4})^{n-1}P_1\\&=\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{4})^k+(-\frac{1}{4})^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{5}[1-(-\frac{1}{4})^{n-1}]+\frac{1}{2}(-\frac{1}{4})^{n-1}\\&=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1},n\geqslant 1.\end{aligned}$$

例 26 某城有 N 部卡车,车牌号从 1 到 N,有一个外地人到该城去,把遇到的 n 部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号),问抄到的最大号码正好为 k 的概率 $(1\leqslant k\leqslant N)$.

解 这种抄法可以看作是对 N 个车牌号进行 n 次有放回的抽样,所有可能的抽法共有 N^n 种,这就是基本事件总数. 由于每部卡车被遇到的机会可以认为相同,因此这是一个古典概型的计算问题. 设 A 表示“抄到的最大号码正好为 k”的事件,先考虑最大车牌号不大于 k 的取法,这样取法共有 k^n 种,再考虑最大车牌号不大于 $k-1$ 的取法,其数目有 $(k-1)^n$ 种,因此 A 包含的基本事件总数为 $k^n-(k-1)^n$,故所求概率为

$$P(A)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

例 27 一袋中装有 $N-1$ 只黑球及 1 只白球,每次从袋中随机地摸出一球,并换入一只黑球,这样继续下去,问第 k 次摸球时,摸到黑球的概率是多少?

解 设 A 表示第 k 次摸到黑球这一事件,则 $\bar{A}$ 表示第 k 次摸到白球,先计算 $P(\bar{A})$.

因为袋中只有一只白球,而每次摸出白球总是换入黑球,故为了第 k 次摸到白球,则前面的 $k-1$ 次一定不能摸到白球,从而 $\bar{A}$ 等价于下列事件:在前 $k-1$ 次摸球时都摸出黑球第 k 次摸出白球,这一事件的概率为

$$P(\bar{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}$$

故所求概率为

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}.$$