高等数学（一）

微积分内容与方法

谢鸣　袁宝玉　编

贵州科技出版社

高等数学(一)
微积分内容与方法

谢 鸣　袁宝玉　编

贵州科技出版社

黔新登(90)03

责任编辑　张相匀
封面设计　石俊生
技术设计　春　秋

高等数学(一)

微积分内容与方法

谢鸣　袁宝玉　编

贵州科技出版社出版发行
(贵阳市中华北路289号　邮政编码550001)

贵阳市宇田微机影印厂印刷　　贵州省新华书店经销
787×1092毫米　32开本　11.375印张　250千字
1996年3月第1版　1996年3月第1次印刷
印数1——5000

ISBN7－80584－545－X/O·019　　定价:14.80元

前　言

本书是为了帮助读者在较短时间内学好微积分而编写的，其内容简明扼要，重点突出.

本书概述了微积分这门课程应掌握的基本概念、主要定义、定理、公式. 特别指出在理解基本概念时应注意的问题，并辅以典型例题，归纳解题方法，介绍解题步骤，帮助读者正确掌握概念，掌握基础知识内在关系，掌握解题思路，提高解题能力，熟练地使用合适的解题方法.

通过学习本书，读者能全面、系统地掌握微积分的基本内容，熟悉这门课的考试题型，了解考试的难度及题量，提高理解、判断和综合分析的解题能力. 书末附录有 1991～1995 年历年全国自学考试试题(10 套)，并附详细的解答及近两年来试题题型及各章内容得分的分布表，帮助读者在较短的时间内全面复习好微积分，提高复习效率.

限于水平，加上编写时间仓促，书中错误及不当之处，恳请读者指正.

编者

1995 年 12 月

目　　录

第一章　函　　数

一、集合及其运算

1. 集合的概念是数学中最原始的概念之一，我们不能给出它的精确定义，只能对它进行描述性说明. 集合是指具有某种属性的对象的全体，组成集合的对象叫做这个集合的元素，常用大写字母 A、B、C……表示集合，小写字母 a、b、c……表示集合的元素，而用 U 表示全集，$\varnothing$ 表示空集.

一个集合具有以下 3 个特征：

(1) 确定性：对任何一个对象，都能确定它是不是该集合的元素，即给定一个具体对象，它或是该集合的元素，或不是该集合的元素，两者必居其一，不能模棱两可.

(2) 互异性：一个集合所包含的元素，指属于这个集合的互不相同的对象，因此，在同一个集合里就不能重复出现同一个元素.

(3) 无序性：集合元素的顺序可以任意放置.

2. 集合的表示法有：列举法与描述法.

3. 集合与集合的关系：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，那末集合 A 就叫做集合 B 的子集，记作 $A\subset B$. 如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

4. 集合的运算

并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$

交集 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$

差集 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$

补集 $\overline{A}=\{x|x\in U$ 且 $x\in\overline{A},A\subset U\}$

5. 集合的性质

$A\cup A=A \quad A\cup U=U \quad A\cup\varnothing=A$

$A\subset A\cup B \qquad B\subset A\cup B$

$A\cap A=A \quad A\cap U=A \quad A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cap B\subset A \quad A\cap B\subset B \quad A\cup\overline{A}=U \quad A\cap\overline{A}=\varnothing$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \quad \overline{\overline{A}}=A$

例 1 指出 0、$\{0\}$、$\varnothing$的联系与区别.

解:0 表示数 0,$\{0\}$表示仅有一个元素 0 的集合,$\varnothing$是空集 $0\in\{0\}$,$\varnothing\subset\{0\}$.

例 2 如果$M=\{x|x=a^2+1,a\in N\}$,

$P=\{y|y=b^2-4b+5,b\in N\}$ 那么( ).

(A)$M\supset P$ (B)$M=P$ (C)$M\subset P$ (D)M、P 无包含关系

解:因为 M 和 P 的元素都是平方数加 1,但由 P 中 $y=(b-2)^2+1$ 可知,$b=2$ 时,$y=1\in P$,而 $1\overline{\in} M$,故选 C.

例 3 (1)设 $U=R,A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\},B=\{x|2\leqslant x\leqslant 6\}$,求 $A\cup B,A\cap B,A-B,B-A,\overline{A}\cap\overline{B}$.

(2)已知$A=\{(x,y)|x+2y=5\}$

$B=\{(x,y)|2x-y=3\}$

求 $A\cap B$.

解:(1)$A\cup B=\{x|1\leqslant x\leqslant 6\} \quad A\cap B=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$

$A-B=\{x|1\leqslant x<2\} \quad B-A=\{x|5<x\leqslant 6\}$

$\overline{A}=\{x|x<1$ 或 $x>5\} \quad \overline{B}=\{x|x<2$ 或 $x>6\}$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x|x<1$ 或 $x>6\}$

$$(2) A\cap B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x+2y=5\\2x-y=3\end{cases}\right.\right\}=\left\{\left(\frac{11}{5},\frac{7}{5}\right)\right\}$$

即 $A\cap B$ 表示直线 $x+2y=5$ 与直线 $2x-y=3$ 的交点.

二、实数与数轴

1. 实数:实数是有理数和无理数的总称. 有理数是形如 p/q 这一类的数,其中 p 和 q 为互质的整数,$q\neq 0$,有理数又可分为正、负整数,零以及正分数和负分数. 无理数分为正无理数和负无理数.

2. 数轴是具有方向、原点和单位长度的有向直线. 任何一个实数均可由数轴上的一个点来表示. 反过来,数轴上任何一点都表示一个实数,因此数轴上的点与全体实数建立了一一对应关系.

例 1 若 $A=\{$有理数$\}$,$B=\{$实数$\}$,则下式错误的是(　　).

(A)$A\in B$　(B)$A\subset B$　(C)$A\cup B=B$　(D)$A\cap B=A$

答:因为 A、B 表示两个集合,故不能用 $A\in B$ 表示. 而 $A\subset B$,$A\cup B=B$,$A\cap B$ 三式皆成立,所以应选(A).

三、绝对值与区间

1. 绝对值的几何意义:$|x|$表示数轴上的点 x 与原点之间的距离.

2. 运用绝对值不等式与区间表示实数集及其子集的两个基本公式.

(1)$\{x\mid |x|<a\}=\{x\mid -a<x<a\}$

(2)$\{x\mid |x|\geqslant b\}=\{x\mid x<-b\}\cup\{x\mid x>b\}(b>0)$

3. 常见的区间有下列几种：

(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$，$(-\infty,+\infty)$

$(a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$

4. 邻域：

(1) $\{x \mid |x-x_0|<\delta, \delta>0\}$，它表示在数轴上是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

(2) $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$，这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0，即集合 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$.

例 1 用区间表示下列点集.

(1) $\{x \mid |x+3|>2\}$　　(2) $\{x \mid 1<|x-2|<3\}$

解：(1) $\{x \mid |x+3|<2\}=\{x \mid -5<x<-1\}=(-5,-1)$

(2) $\{x \mid 1<|x-2|<3\}=\{x \mid |x-2|$ 且 $|x-2|<3\}$

$=\{x \mid -1<x<1$ 或 $3<x<5\}$

$=(-1,1)\cup(3,5)$

例 2 解不等式　$0<(x-2)^2<4$

解：$\because (x-2)^2=|x-2|^2$　　$\therefore 0<|x-2|^2<4$

$0<|x-2|<2$，$-2<x-2<2$，且 $x-2\neq 0$，

于是 $0<x<4$，且 $x\neq 2$.

故 $\{x \mid 0<(x-2)^2<4\}=(0,2)\cup(2,4)$.

例 3 若　$|x^2-3|<2$，则(　　).

(A) $1<x<\sqrt{5}$

(B) $-\sqrt{5}<x<-1$　和　$1<x<\sqrt{5}$

(C) $-1<x<1$

(D) $-1<x<\sqrt{5}$

解：因为 $|x^2-3|<2$，$1<x^2<5$，

由 $x^2<5$ 得 $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$.

由 $x^2>1$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$

即$-\sqrt{5}<x<-1$和$1<x<\sqrt{5}$.所以应选(B).

例 4　设函数 $f(x)=9|1+x|+\dfrac{9(x-1)}{|2x-5|}$　则 $f(-2)=($　　$)$.

(A)4　(B)8　(C)-2　(D)-4

解:因为　$f(-2)=9|1+(-2)|+\dfrac{9((-2)-1)}{|2\times(-2)-5|}$

$$=\frac{9+9\times(-3)}{9}=-2$$　所以应选(C).

四、函　　数

1.映射:映射是指两个集合之间的一种对应关系.详细地说,从集合 X 到集合 Y 的一个映射 f,是指在集合 X 与集合 Y 之间建立了这样一种对应关系:

1)对于第一个集合 X 的每一个元素都能按某种规则同第二个集合 Y 中的某个元素相对应;

2)对于第一个集合 X 的每一个元素,第二个集合 Y 中与它对应的元素只有一个,从 X 到 Y 的映射 f 记为 $f:X\rightarrow Y$.

2.函数:利用映射概念,我们很容易将函数定义为两个数集之间的映射,习惯上记函数 f 为:

$$y=f(x)\qquad x\in D(f)$$

其实 函数也可以用别的符号比如 $y=g(x)$、$y=\varphi(x)$等表示.

1)函数的记号 $y=f(x)$应理解为变量 y 通过对应规则 f 与变量 x 对应.

2)函数定义的两要素

(1)定义域 $D(f)$.　　　(2)对应规则 f.

如果两个函数的定义域和对应规则都相同,那么它们是相同的函数.

3)函数定义域的求法：由解析式给出的函数 $y=f(x)$，如果没有指明自变量与因变量的具体意义或其它说明，则它的定义域就是使得解析式有意义的因变量的一切实数值. 在确定初等函数的定义域时，应非常熟悉基本初等函数的定义域，并注意运用下述结论：

(1)偶次根式的定义域是使根号下的式子取非负实数的那些 x 的值.

(2)分式的定义域是使分母不为零的实数的全体.

(3)多项式的定义域是全体实数.

(4)对数函数的定义域是使真数表达式大于零的实数的全体.

(5)三角函数和反三角函数.

$y=\mathrm{tg}x$　$y=\mathrm{ctg}x$　$y=\sec x$　$y=\csc x$　$y=\arcsin x$

$y=\arccos x$ 不是处处有定义，而仅仅是使它们有意义的自变量 x 的值.

反三角函数	定义域	值域
$y=\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
$y=\mathrm{arctg}x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
$y=\mathrm{arcctg}x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$

(6)若函数的解析式由几个数学式子的和、差、积、商组成，则这个函数的定义域是使这几个数学式子有意义的公共部分.

例 1　判断下列各对函数是否为同一函数.

(1)$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$

(2)$f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$

(3) $f(x)=\operatorname{arctg}x$ 与 $g(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

解：(1) $f(x)=|x|$ 的定义域是实数集 R，$g(x)=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是 $\{x|x\geqslant 0\}$ ∴ $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数，只是在 $\{x|x\geqslant 0\}$ 上它们是相同的.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$ 的定义域相同，同是 $(-\infty,+\infty)$，但当 $x<0$ 时，两者的对应规则不同，前者取 $-x$，后者取 x，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数. 在区间 $(0,+\infty)$ 内它们是同一函数.

(3) $f(x)=\operatorname{arctg}x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，除了 $x=\pm 1$ 外，两者的对应法则也不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2 求函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域.

解：当 $x-1\leqslant 0$ 时，$\lg(x-1)$ 无意义，因此 $\lg(x-1)$ 的定义域是 $x-1>0$，即 $x>1$；又当 $x+1<0$ 时，$\sqrt{x+1}$ 无意义且 $\sqrt{x+1}$ 在分母上，不能为 0，故 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域是 $x+1>0$，即 $x>-1$.

综合二者，取它们的公共部分，所以：

$\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域 $D(f)=(1,+\infty)$，

即是 $D(f)=\{x|1<x<+\infty\}$.

例 3 求 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解：$\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域是 $x^2-x-6\geqslant 0$，即 $x\geqslant 3$，$x\leqslant -2$.

而 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，

即 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，$-3\leqslant x\leqslant 4$.

∴ $D(f)=\{x|-3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$.

例 4 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0 \\ x & 0<x<1 \\ 1 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域.

解:原函数为分段函数,所以这个函数的定义域就是各段区间的并集$(-\infty,0)\cup(0,2]$.

五、复 合 函 数

1. 设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,如果函数 u 的值域 $z(\varphi)$与函数 y 的定义域 $D(f)$有:$z(\varphi)\cap D(f)$非空,则 y成为x的函数,记为$y=f[\varphi(x)]$.这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,u 叫做中间变量.

2. $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$复合形成一个复合函数是有条件的,即"$z(\varphi)\cap D(f)$"非空.因此,并不是任何两个函数都可以复合而成复合函数:例如:$y=f(u)$,$y=\arcsin u$,$u=\varphi(x)=2+x^2$ 就不能复合而成复合函数,因为函数 $u=2+x^2$ 的值域是 $z(\varphi)=[2,+\infty)$,而函数 $y=\arcsin x$ 定义域 $D(f)=[-1,1]$,$z(\varphi)\cap D(f)$为空集,从而 $y=\arcsin(2+x^2)$没有意义.而 $y=\sqrt{2-u^2}$,$u=\sin x$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{2-\sin^2 x}$.因为 $u=\sin x$ 的值域$[-1,1]$.
$y=\sqrt{2-u^2}$的定义域$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$满足 $z(\varphi)\cap D(f)$非空集.

3. 复合函数不但可以由两个函数,而且还可以由有限多个函数构成.例如:$y=\ln u$,$u=1+v$,$v=\sqrt{w}$,$w=1+x^2$ 复合而成的复合函数为 $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$.

4. 把一个复合函数分解成若干个较简单的函数,一般应遵循的原则是:使分解后所成的每一个函数都是基本初等函数.

例 1 指出下列函数是怎样复合而成的.

(1) $y=(1+x)^{20}$　　(2) $y=2^{\sin^2 x}$

(3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$　　(4) $y=\log_a \sin e^x$

解：(1)由 $y=u^{20}, u=1+x$ 复合而成.

(2)由 $y=2^u, u=v^2, v=\sin x$ 复合而成.

(3)由 $y=\operatorname{arctg} u$　$u=\sqrt{v}$　$v=x-1$ 复合而成.

(4)由 $y=\log_a u, u=\sin v, v=e^x$ 复合而成.

例 2　设 $y=f(x)=e^{(x-a)^2}$　$\varphi(x)=a+\cos x$，求 $f[\varphi(x)]$.

解：$f[\varphi(x)]=e^{(a+\cos x-a)^2}=e^{\cos^2 x}$

例 3　设 $f(x)=\ln x, g(x)=x+3$，求 $f[g(x)]$的定义域.

解：因为 $g(x)=x+3$ 的值域只能取使得函数 $\ln x$ 有意义的那一部分，所以 $x>-3$，即 $f[g(x)]$的定义域为 $(-3,+\infty)$.

例 4　设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

解：$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}.$$

例 5　已知 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，试求：

(1) $f(x^2)$　(2) $f(\sin x)$　(3) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$的定义域.

解：(1) $f(x^2)$应有 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，则 $f(x^2)$的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$

(2) $f(\sin x)$应有 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，则 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，故 $y=f(\sin x)$的定义域是
$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

(3) $f(x+a)+f(x-a)$应有 $0\leqslant x+a\leqslant 1, 0\leqslant x-a\leqslant 1$；即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a, a\leqslant x\leqslant 1+a$，故 $y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域应是两函数定义域的公共部分. 由 $1-a$ 与 a 的大小而定：

若 $1-a<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，函数 y 无定义.

若 $1-a=a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，函数 y 的定义域是 $x=\dfrac{1}{2}$.

若 $1-a>a$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，函数 y 的定义域是 $a\leqslant x\leqslant 1-a$.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ -\sqrt{1-x} & x\leqslant 1\end{cases}$

问 $f(x)$ 与 $g(x)$ 能否构成复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$. 若能，写出它们的解析式.

解：$D(f)=(-\infty,+\infty)$ $z(f)=[-1,+\infty)$

$D(g)=(-\infty,+\infty)$ $z(x)=(-\infty,0]$

$\because z(g)\cap D(f)$ 和 $z(f)\cap D(g)$ 非空集，

$\therefore$ 可构成复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

根据 $g(x)$ 的对应法则有：

$$g[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)>1\\ -\sqrt{1-f(x)} & f(x)\leqslant 1\end{cases}$$

再根据 $f(x)$ 的对应法则当 $x<-1$ 时，$f(x)>1$

当 $x\geqslant -1$ 时，$f(x)\leqslant 1$，从而

$$g[f(x)]=\begin{cases}0 & x<-1\\ -\sqrt{1-f(x)} & x\geqslant -1\end{cases}$$

又因在区间 $[-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内函数 $f(x)$ 的对应法则不同，故

$$g[f(x)]=\begin{cases}0 & x<-1\\ -\sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x<0\\ -\sqrt{1-\sin x} & x\geqslant 0\end{cases}$$

同理可得 $f[g(x)]=\begin{cases}0 & x\geqslant 1\\ 1-x & x<1\end{cases}$

六、函数值的求法

给定函数 $y=f(x)$，当 x 在定义域内取一值 x_0 时，其对应的

函数值记为：$y|_{x=x_0}=f(x_0)$，它是在 $f(x)$ 的表达式中，凡是有 x 的地方，都用 x_0 代替所得到的数值．假如 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的交集非空，那么，在 $f(x)$ 的表达式中，凡是有 x 的地方，都用 $\varphi(x)$ 代替，便得到 $f[\varphi(x)]$ 的表达式．

例 1 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|+\dfrac{|x-1|}{x+1} & x\neq -1\\ 0 & x=-1\end{cases}$，求 $f(-2)$．

解：$f(-2)=|2\times(-2)+1|+\dfrac{|-2-1|}{-2+1}=3+\dfrac{3}{-1}=0$

例 2 若 $f(0)=-2$，$f(3)=5$，则 $f(x)=ax+b$ 的表达式为何？

解：由 $\begin{cases}f(0)=-2\\ f(3)=5\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=-2\\ a=\dfrac{7}{3}\end{cases}$

得 $f(x)=\dfrac{7}{3}x-2$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1} & x\geqslant 2\\ \dfrac{2-x}{x+1} & x<2 \text{ 且 } x\neq -1\end{cases}$

计算 $f(0)$，$f(1)$，$f(3)$，$f(a)$．

解：这是一个分段函数，x 在不同区间上 $f(x)$ 的表达式不同，求分段函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值要把 $x=x_0$ 代入到 x_0 所在区间相对应的数学式子中去，所以

$f(0)=\dfrac{2-0}{0+1}=2$，$f(1)=\dfrac{2-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，$f(3)=\dfrac{3+2}{3+1}=\dfrac{5}{4}$

计算 $f(a)$ 时要分两种情况

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(a)=\dfrac{a+2}{a+1}$

当 $a<2$ 时，$f(a)=\dfrac{2-a}{a+1}(a\neq -1)$

七、反　函　数

1. 函数具有反函数的充分条件是：原来函数 $y=f(x)$ 必须是严格单调函数，或者在讨论反函数存在的区间内 $y=f(x)$ 是单调的.

2. 求反函数的步骤是：

$$y=f(x)\to x=f^{-1}(y)\xrightarrow{x\text{和}y\text{对调}}y=f^{-1}(x)$$

其中：因 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(y)$ 的对应规律及函数的定义域都相同，故它们表示同一函数而 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，因而，$y=f^{-1}(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数.

注意："f^{-1}"是反函数的符号，不是"f"的"-1"次方.

3. $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 为同一图形，$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的增减性是一致的.

4. $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，$y=f(x)$ 的值域是 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

例 1　求 $y=\sqrt{1+x}$ 的反函数，并比较反函数与原来函数的定义域和值域.

解：由函数 $y=\sqrt{1+x}$ 的反对应关系而得到以 y 为自变量的反函数 $x=y^2-1$，再把 x 与 y 互换便得到反函数 $y=x^2-1$（以 x 为自变量）.

$y=\sqrt{1+x}$ 的定义域为 $[-1,+\infty)$，值域为 $y\in[0,+\infty)$ 反函数 $y=x^2-1$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $y\in[-1,+\infty)$. 说明反函数与原来函数的定义域和值域互换.

例 2　求分段函数 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x & 16<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.