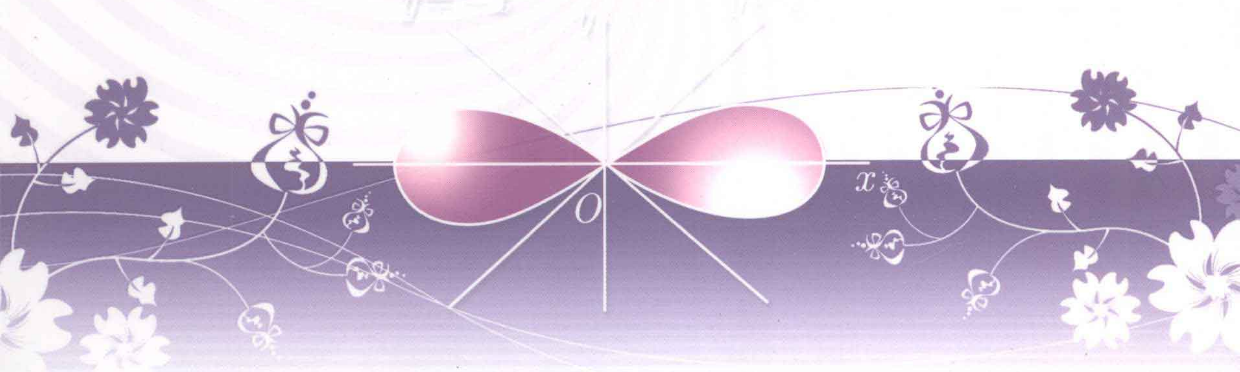
美妙数学花园

Meimiao Shuxue Huayuan



李文林 李铁安 著

从笛卡儿之梦谈起

——漫话解析几何的创立、发展及意义

科学出版社

美妙数学花园 3

从笛卡儿之梦谈起

——漫话解析几何的创立、发展及意义

李文林 李铁安 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从科学史上有名的笛卡儿之梦说起，简明而且系统地介绍了作为近代数学兴起标志之一的解析几何的诞生与发展过程，论述了解析几何在人类文明进步中的作用，揭示了笛卡儿创立解析几何的文化内涵.

本书史料翔实生动，内容深入浅出，可供广大读者阅读了解解析几何的历史、实质及意义，同时也可作为大、中学校解析几何教学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

从笛卡儿之梦谈起：漫话解析几何的创立、发展及意义/李文林，李铁安著. —北京：科学出版社，2011
(美妙数学花园)
ISBN 978-7-03-031555-7

I. ①从… II. ①李… ②李… III. ①几何学-普及读物 IV. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 113375 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：张林红
责任印制：钱玉芬／封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2011 年 6 月第一次印刷　印张：6 3/4
印数：1—5 000　字数：110 000

定价：25.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《美妙数学花园》丛书序

今天, 人类社会已经从渔猎时代、农耕时代、工业时代, 发展到信息时代. 科学技术的巨大成就, 为人类带来了丰富的物质财富和越来越美好的生活. 而信息时代高度发达的科学技术的基础, 本质上是数学科学.

自从人类社会建立了现行的学校教育体制, 语文和数学就是中小学两门最主要的课程. 如果说文学因为民族的差异各个国家之间有很大的不同, 那么数学在世界上所有的国家都是一致的, 仅有教学深浅、课本编排的不同.

我国在清末民初时期西学东渐, 逐步从私塾教育过渡到现代的学校教育, 一直十分重视数学教育. 我国从清朝与近代科技完全隔绝的情况下起步, 迅速学习了西方的科学文化. 在20个世纪前半叶短短的几十年间, 在我们自己的小学、中学、大学毕业, 然后留学欧美的学生当中, 不仅产生了一批社会科学方面的大师, 而且

产生了数学、物理学等自然科学领域对学科发展做出了重大贡献的享誉世界的科学家. 他们的成就表明, 有着五千年灿烂文化的中华民族是有能力在科学技术领域达到世界先进水平的.

在 20 世纪五六十年代, 为了选拔和培养拔尖的数学人才, 华罗庚与当时中国的许多知名数学家一道, 学习前苏联的经验, 提倡和组织了数学竞赛. 数学家们为中学生举办了专题讲座, 并且在讲座的基础上出版了一套面向中学生的《数学小丛书》. 当年爱好数学的中学生十分喜爱这套丛书. 在经历过那个时代的科学院院士和各个大学的数学教授当中, 几乎所有的人都读过这套丛书.

诚然, 我国目前的数学竞赛和数学教育由于体制的问题备遭诟病. 但是我们相信, 成长在信息时代的今天的中学生们, 会有更多的孩子热爱数学; 置身于社会转型时期的中学里, 会有更多的数学教师渴望培养出优秀的科技人才.

数学家能够为中学生和中学教师们做些什么呢? 数学本身是美好的, 就像一个美丽的花园. 这个花园很大,

我们并不能走遍她, 完全地了解她. 但是我们仍然愿意将自己心目中美好的数学, 将我们对数学的点滴领悟, 写给喜爱数学的中学生和数学老师们.

张英伯

2011 年 5 月

楔子：笛卡儿之梦

大约四百年前一个冬天的夜晚，德国乌尔姆多瑙河畔的一座军营平静安宁. 正在服兵役的 23 岁的法国青年笛卡儿 (Rene Descartes, 1596~1650)(图 0.1) 做了一串奇特的梦.

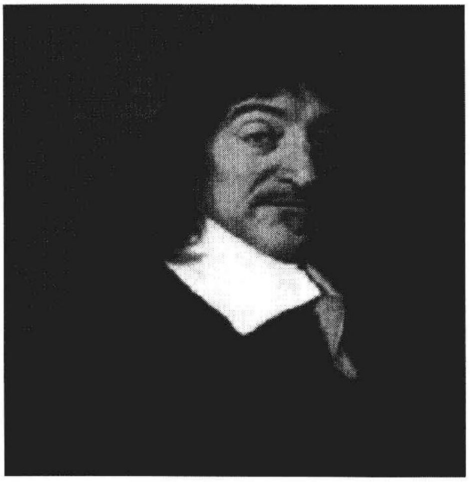


图 0.1　笛卡儿

梦之一: 笛卡儿被一阵狂风从居住的教堂 (或学院) 吹落到遥远的地方;

梦之二: 接着雷电轰鸣, 烈火熊熊, 笛卡儿发现自己正用不带迷信的科学的眼光观察着汹涌的风暴, 他注意到一旦看出风暴是怎么回事, 它就不能伤害他了;

梦之三: 狂风烈焰之后, 万籁俱静, 笛卡儿开始朗诵奥索尼厄斯 (Ausonius) 的诗句, 首句为 "我将遵循什么样的生活道路?" 与此同时, 一位陌生人向笛卡儿指点迷津. 笛卡儿从梦中醒来, 陷入了沉思……

这就是科学史上有名的笛卡儿之梦. 笛卡儿回忆说, 他在这个梦境中一直充满着 "激情", 并说, 梦境向他揭示了一把神奇的钥匙, 这把钥匙能打开自然的宝库. 这把神奇的钥匙是什么呢? 笛卡儿自己并没有明确地告诉任何人. 笛卡儿后来还说这三个梦引导了 "一门奇特的科学" 和 "一项惊人的发现". 笛卡儿所说的 "奇特的科学" 和 "惊人的发现" 究竟是什么呢? 他本人也从未进一步作过解释. 尽管如此, 这三个梦后来成为每本介绍解析几何诞生的著作必提的佳话.

目　录

第1章…………

创 立 篇

1.1 历史渊源

解析几何学是人类最重要的数学成就之一，在数学史上具有划时代的意义. 解析几何学的中心思想是"数形结合"：通过引进"坐标"的概念，使曲线、曲面等几何对象与代数方程相互对应. 于是几何问题便可归结为代数问题，反过来对代数问题的研究可以进行几何解释，引导新的几何结果.

解析几何学的建立是变量数学的第一个里程碑，它直接导致了"人类精神的最高胜利"——微积分的产生，因而与微积分一起被认为是近现代数学兴起的两大标志.

在数学史上，法国数学家笛卡儿和费马 (Pierre de Fermat, 1601~1665) 被认为是解析几何学的共同创始人. 不过，像一切重大的数学创新一样，解析几何学的诞生

也不是偶然的, 而是具有悠久的历史渊源. 在笛卡儿和费马之前, 历代学者对解析几何的要素 —— 坐标概念和数形结合思想陆续分别有所接触、探索和积累.

坐标表示的萌芽可以追溯到久远的年代. 早在公元前 2000 年, 美索不达米亚地区的古巴比伦人已经能够用数字表示一点到另一固定点、直线或物体的距离; 古埃及人也利用类似的思想测量土地.

在古希腊, 公元前 4 世纪中叶, 数学家门奈赫莫斯发现了圆锥截线; 公元前 3 世纪几何学家阿波罗尼奥斯 (Apollonius of Perga, 约公元前 262~ 前 190)(图 1.1) 则在全面论述圆锥曲线性质时采用过一种 "坐标", 以圆锥体底面的直径作为横坐标, 过顶点的垂线作为纵坐标.

图 1.1　阿波罗尼奥斯

公元前 4 世纪, 中国战国时代天文学家石申在绘制恒星方位表时利用了坐标想法, 这与稍晚的希腊天文学家希帕霍斯 (公元前 2 世纪) 绘制恒星图表时采用经纬度表示星的位置可谓不约而同. 中国汉代女学者班昭续修《汉书》, 造八表. 她在《古今人表》中, 把 1587 个传说人物和历史人物的名字, 按其自己规定的 9 个品德表现等级, 排列在矩形网格中, 实质上是用一轴代表年代, 另一轴表示人物的品德.

数与形的相互渗透也是古已有之. 毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约公元前 572～ 前 497)(图 1.2) 学派的信条是 "万物皆数". 毕达哥拉斯学派关于 "形数" 的研究, 强烈地反映了他们将数作为几何思维元素的精神. 例如, 3,6,10,15

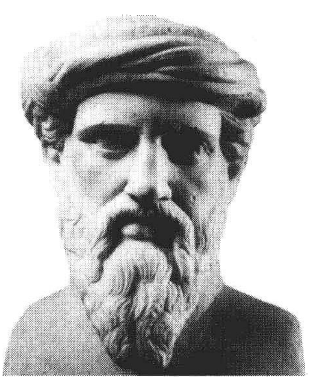


图 1.2　毕达哥拉斯

之类的数, 或一般地, 由

$$N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

给出的数称为三角形数, 它们可以用某种三角点式来表示 (图 1.3(a)); 由序列

$$N = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

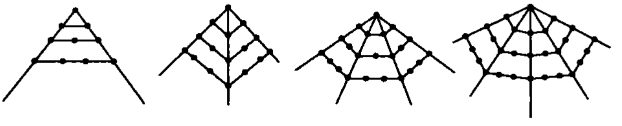
形成一系列正方形数 (图 1.3(b)); 五边形数 (图 1.3(c)) 和六边形数 (图 1.3(d)) 分别由序列

$$N = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

和

$$N = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

得到, 这是一些高阶等差序列. 用同样的方式可以定义所有的多边形数. 这一过程还可以推广到三维空间去构造多面体数. “形数” 体现了数与形的结合.



(a) (b) (c) (d)

图 1.3 形数

在希腊古典数学鼎盛的亚力山大时期，欧几里得的著作《原本》开创了几何论证的黄金时代. 在《原本》中，代数问题均以几何形式处理，被称为“几何代数”.

中世纪中国数学则是以求解方程为主线. 几何问题都归结为代数方程，然后用程式化的算法来求解. 仅举数例. 例如，李冶《测圆海镜》(1248) 卷七第二题：

“假令有圆城一所，不知周径，四面开门. 或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之，问径几里？”

李冶的做法是设圆城 (半) 径为 x(图 1.4)，根据假设条件导出方程

$$-x^4 + 8640x^2 + 652320x + 4665600 = 0,$$

并解得 x =120.

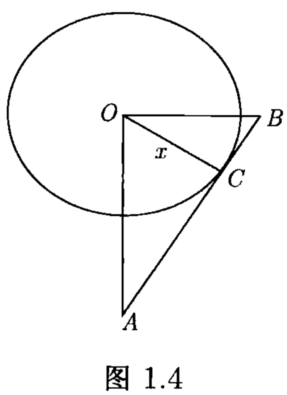


图 1.4

又如, 朱世杰《四元玉鉴》(1303)(图 1.5) 卷首 4 个示范性问题之一 "三才运元":

"今有股弦较除弦和和与直积等, 只云勾弦较除弦较和与勾同, 问弦几何?"

图 1.5 《四元玉鉴》书影

在直角三角形中, 设勾为 x, 股为 y, 弦为 z, 则题中所谓 "股弦较" 为 $z-y$, "弦和和" 为 $z+(x+y)$, "直积" 为 xy, "勾弦较" 为 $z-x$, "弦较和" 为 $z+(y-x)$. 依题意得

$$[z+(x+y)]\div(z-y)=xy$$

和

$$[z+(y-x)]\div(z-x)=x.$$

于是便导致一个三元方程组

$$\begin{cases} xyz - xy^2 - z - x - y = 0, \\ xz - x^2 - z - y + x = 0, \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

朱世杰运用消元技巧依次消去未知数 y, x, 最后得到一个只含有 z 的四次方程

$$z^4 - 6z^3 + 4z^2 + 6z - 5 = 0.$$

朱世杰解出上述方程的一个正根

$$z = 5.$$

这种将几何问题转化为代数方程求解的例子, 在宋元数学著作中比比皆是, 充分反映了中世纪中国数学几何代数化的倾向.

中世纪印度与阿拉伯数学也具有类似的几何代数化倾向. 这种倾向在文艺复兴前夕传播到欧洲, 对欧洲数学的发展产生了深刻影响. 例如, 文艺复兴酝酿时期, 欧洲数学的代表性人物斐波那契 (Leonardo Fibonacci, 约 1170~ 约 1250)(图 1.6) 的著作《几何实用》等就用代数方法去解决几何问题.