

高等学校教材

数学分析的方法 及例题选讲

(修订版)

徐利治 王兴华 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析的方法 及例题选讲

(修订版)

徐利治 王华 编

高等教育出版社·北京

内容提要

全书分四章,包括命题、例题和习题 493 例,其中绝大部分都给出了证明、解法或提示,并且在每章之末还作了一些重点注释,这些注释对于了解若干典型命题的意义与方法精神的要点是有帮助的。本次修订加入不少新颖的题材,更换了一些旧的例题和习题;略去了原书第 5 章——各种类型的极限问题。本书可作为数学类专业学生选修课的教材。

本书于 1983 年出版,恰逢高等教育出版社建社 60 周年,甲午重印,以飨读者。

图书在版编目 (C I P) 数据

数学分析的方法及例题选讲 / 徐利治, 王兴华编.
--2 版(修订本). --北京: 高等教育出版社,
2015. 12

ISBN 978-7-04-040384-8

I. ①数… II. ①徐… ②王… III. ①数学分析-高等
学校-教学参考资料 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 136185 号

策划编辑 李蕊 责任编辑 李蕊 封面设计 杨立新 版式设计 于婕
插图绘制 黄建英 责任校对 王雨 责任印制 田甜

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	固安县铭成印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
开 本	850 mm×1168 mm 1/32	版 次	1955 年 12 月第 1 版
印 张	8.25		2015 年 12 月第 2 版
字 数	210 千字	印 次	2015 年 12 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	17.80 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 40384-00

出版说明

1954年5月,高等教育出版社正式成立。60年来,在教育部领导的关怀下,在数学教育工作者的支持下,高教社出版了众多数学教材,可谓群贤毕至,精品迭出,伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因,部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》;教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》;西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》;清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》;还有项武义先生的《微积分大意》,谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》,吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版),北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材,不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累,也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶,更是各个时期数学教学改革成果的代表,它们呈现了数学教材建设的真实历史,深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早,但从数学学科的发展和教学改革趋势来看,它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁,更好地传承数学的教学思想、教学方法,促进当前数学教学改革,提高教学质量,我们遴选了60年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版,牵动各方专家的关注,凝结了很多前辈的

厚爱和支持。在联系原作著作权人的过程中，西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助，胡乃岡、徐刚编审提供了部分资料和样书，王唯老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计，使得这套教材不仅保持了原有的风貌，更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中，我们克服了重重困难，本着古建筑修复中“整旧如旧”的原则，尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了，我们仍然保留了这些部分，以求保持经典教材的原汁原味，仅做了规范方面的微小改动。重温经典，不仅让老专家、老前辈们抚今追昔，也让我们倍感自豪和使命感，我们还会进一步增加重版的品种，奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成，虽竭尽全力，疏漏之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014年4月

前 言

经典数学分析中的思想方法和技巧是丰富多彩的。对每一个年青的数学工作者来说，及早掌握这些方法和技巧将在一生的工作实践中受益无穷。正是从这个观点出发，本书前一编者早在1953—1954年就在东北人民大学（即吉林大学的前身）讲授了“分析方法”这门课程。1955年将讲稿整理出版，书名与本书同名。1958年该书曾由高等教育出版社重印一次。但两次印数总额只有7000余册，当即一销而空。二十多年来，该书早已不易找到了，只能偶尔从一些数学著作的参考书目中发现该书的名字。

近些年来，曾不时收到各地读者来信建议再版该书。可是二十余年过去了，总感到原书的题材大有刷新一番的必要。只因苦于缺乏时间，致使修订工作推迟三年之久。去年，本书后一编者在杭州大学数学系为高年级学生开设了“分析方法及例题选讲”这门课，用上述原书作教材，并在讲课过程中不断进行删改和补充。于是在这个基础上我们便合作从事原书的修订工作，修订后的书稿又在杭大讲授了一次，然后略经修改，终于最后定稿。

在这个修订本中，已经加入不少新颖的题材，更换了一些旧的例题和习题。新增的内容中，也有一部分命题是属于编者们自己的研究成果（例如关于插值余项的命题及振荡型积分的渐近展开式等）。

在内容题材的铺设上，本书尽可能对相互关联的命题、例题及习题作出适当编排，以便使读者容易产生联想，从中领悟预示

的途径去解决问题。就这个特点而言，它与波利亚与塞格的名著《数学分析中的问题与定理》多少有些类似。事实上本书还借用了该书的一些有趣题材。

波利亚曾说过：“一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口。”我们自己也有这样的经验：要想较熟练地掌握数学分析的方法和技巧，最好的办法莫过于经常动手去解题。因此在本书中，多半是示范性地给出典型命题与例题的极其简明扼要的证明或解法，类似的命题和习题则要求读者自己去解决。应该承认，本书中的个别题目确实是难度较大的，一时作不出来，既不用灰心，也不必去查阅任何现成的习题解答书籍。希望读者最好从一些相关联的题材中吸取经验和借鉴，能让自己去闯过难关，并从中享受乐趣！

这个修订本略去了原书的第五章（“各种类型的极限问题”），因为考虑到该章内容题材过分庞杂零乱，需要全面修改和增订，从而势必大大扩充篇幅。因此，我们期望将来通过出版《续编》的方式来完成上述任务。好在本书各章自成体系，且已足够表现出数学分析方法中的精彩部分。当然原书的一些特色都在这里保留下来了。

我们要感谢吉林大学和杭州大学的数学系给我们提供了完成这个修订本的工作条件。还特别感谢审稿者路见可教授的细致审阅以及本书编辑的辛勤劳动。这个修订本仓促问世，错误与缺点谅必难免，希望读者不吝指教。

徐利治 王兴华

（吉林大学）（杭州大学）

1982年4月4日

目 录

第一章 关于阿贝尔方法	1
§ 1 和差变换及其应用	2
§ 2 阿贝尔引理应用于级数收敛性问题	7
§ 3 阿贝尔的级数求和法	15
§ 4 分部积分法与积分中值定理	20
关于第一章的注释	38
第二章 幂级数在计算中的应用	41
§ 1 线性不定方程解的个数问题	42
§ 2 有关二项系数的计算	56
§ 3 差分算子 Δ 的简单应用	71
§ 4 欧拉-麦克劳林求和公式	79
§ 5 微分算子及函数方程在计算中的应用	97
关于第二章的注释	109
第三章 不等式	114
§ 1 若干简单的有穷不等式	115
§ 2 平均值与有穷不等式	129
§ 3 积分不等式、无穷不等式及函数的凸性	139
§ 4 关于不等式的补充命题及杂题	150
§ 5 关于常用函数的若干不等式	165
关于第三章的注释	175
第四章 阶的计算法及有关问题	180
§ 1 阶的估计法应用于收敛性问题	182

§ 2 若干渐近估计及切比雪夫质数定理的证法	198
§ 3 有关无穷大强度的问题	209
§ 4 若干渐近展开公式及其应用	214
§ 5 插值余项阶的估计	228
关于第四章的注释	244
中外人名译法对照	249
主要参考书	253

第一章

关于阿贝尔方法

阿贝尔(N. H. Abel, 1802—1829)的方法是一套比较古典的数学分析技巧. 它在数学分析的某些部分, 特别是在级数的收敛性理论及有关和式(或积分式)的阶的计算中常常用到.

在分析学中, 因为理论系统性的关系, 常常把这个方法分散到几处来讲. 在这里, 由于我们无须受系统性要求的限制, 并希望能将这套方法在应用上的特点表现得更显著一些, 因此就在这一章中, 采用命题、例题和习题的形式, 加以比较集中的考虑.

阿贝尔方法是从一个十分浅显的恒等式开始的. 这个恒等式可以叫做和差变换公式, 又可以叫做分部求和公式, 它相当于积分学中的分部积分法. 从这个简单的恒等式可以直接导出阿贝尔引理, 从而又可导出一系列很有价值的命题. 简单地说, 这就是下表所示的模式:



现在我们就把有关阿贝尔方法的若干命题、例题和习题分布在下列各节中.

§ 1 和差变换及其应用

1. (和差变换公式) 设 $m < n$, 则

$$\sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

[证] 将等式左端的和拆开, 然后对 A_k 进行同类项合并即得.

2. (分部求和法) 设 $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

[证] 这是于命题 1 取 $A_0 = 0, A_k = s_k (k \geq 1)$ 的结果.

3. 设 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s b_1 + (s_n - s) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} (s_n - s) (b_{k+1} - b_k).$$

[证] 这是于命题 1 取 $A_0 = -s, A_k = s_k - s (k \geq 1)$ 的结果.

4. (阿贝尔引理) 若对一切 $n = 1, 2, \cdots$ 而言,

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0, \quad m \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M,$$

则有

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

[证] 应用命题 2, 由于 $m \leq s_k \leq M, b_k - b_{k+1} \geq 0$, 我们得到

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} M (b_k - b_{k+1}) = M b_1,$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq m b_n + \sum_{k=1}^{n-1} m (b_k - b_{k+1}) = m b_1.$$

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意实数或复数, 又设

$$A = \max \{ |a_1|, |a_1 + a_2|, \cdots, |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \},$$

则

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq A \left[\sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1} - b_k| + |b_n| \right].$$

6. 设 $\varphi(n) > 0$, $\varphi(n) \uparrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 又设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) = o(\varphi(n)) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (\text{Kronecker})$$

[证] 本题可用和差变换(命题3)来证. 设 $s = \sum a_n$, 并设 $1 < m < n$, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) \\ &= s\varphi(1) + (s_n - s)\varphi(n) - \sum_{k=1}^{n-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)) \\ &= O(1) + o(\varphi(n)) - \sum_{k=1}^{m-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)) \\ &\quad - \sum_{k=m}^{n-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)). \end{aligned}$$

从而对任意固定的 m 而言, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) \right| &\leq O(1) + o(\varphi(n)) - O(1) \\ &\quad + \varepsilon_m \sum_{k=m}^{n-1} (\varphi(k+1) - \varphi(k)), \end{aligned}$$

此处 $\varepsilon_m = \max_{k \geq m} |s_k - s|$. 注意 $\varphi(n) \uparrow \infty$, 且 $\varepsilon_m \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 因此对于任意预先给定的正数 ε , 总可以取 m 充分大, 使得

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) \right| \leq o(\varphi(n)) + \varepsilon_m \varphi(n) \leq o(\varphi(n)) + \varepsilon \varphi(n).$$

由于上式左端与 ε 并无关系, 自然可令 $\varepsilon \rightarrow 0$. 故命题得证.

7. 设 $\varphi(n) \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(n)$ 为收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \varphi(n) = 0.$$

[证] 显然在本命题中, 只要将 $a_n \varphi(n)$ 看做是命题6中的

a_n , 而把 $\varphi(n)^{-1}$ 看做是命题 6 中的 $\varphi(n)$, 就立刻得到

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k \varphi(k)) \varphi(k)^{-1} = o(\varphi(n)^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

[另证] 本命题亦可利用阿贝尔引理直接证明. 任意给定 $\varepsilon > 0$, 由收敛性假设, 可选取自然数 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{\varepsilon}{2} > a_N \varphi(N) + a_{N+1} \varphi(N+1) + \cdots + a_n \varphi(n) > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

又显然

$$0 < \varphi(N)^{-1} \leq \varphi(N+1)^{-1} \leq \cdots \leq \varphi(n)^{-1}.$$

故按命题 4 (视 $\varphi(n)^{-1}, \cdots, \varphi(N)^{-1}$ 为 $b_1, \cdots, b_n$), 便得到

$$\frac{\varepsilon}{2} \varphi(n)^{-1} > a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n > -\frac{\varepsilon}{2} \varphi(n)^{-1},$$

亦即

$$|(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n) \varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而由于 $\varphi(n) \rightarrow 0$, 故又可取自然数 N' , 使 $n > N'$ 时,

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) \varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > \max\{N, N'\}$ 时,

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

命题证毕.

很明显, 命题 6 与命题 7 是可以相互推导的.

8. 设 $\sigma > 0$, 则当狄利克雷 (G. L. Dirichlet, 1805—1859) 级数

$$a_1 \cdot 1^{-\sigma} + a_2 \cdot 2^{-\sigma} + a_3 \cdot 3^{-\sigma} + \cdots + a_n \cdot n^{-\sigma} + \cdots$$

收敛时, 必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) n^{-\sigma} = 0.$$

9. 设 $\{z_n\}_1^\infty$ 为任意一个复数列而 $\sum_{n=1}^\infty |z_{n+1}^{-1} - z_n^{-1}| = \infty$, 又设

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ 为收敛, 则必有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right) \left(\sum_{n=1}^N |z_{n+1}^{-1} - z_n^{-1}| \right)^{-1} = 0.$$

[提示] 应用命题 5 并仿照命题 7 的后一证法即可证得本命题.

10. 设当 $k = 1, 2, \dots$ 时, $b_k \geq b_{k+1}$, $\frac{1}{2}(b_k + b_{k+2}) \geq b_{k+1}$ 并且

$$m \leq s_1 + s_2 + \dots + s_k \leq M,$$

其中 $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, 则有不等式

$$m(b_1 - b_2) + s_n b_n < \sum_{k=1}^n a_k b_k < M(b_1 - b_2) + s_n b_n$$

成立.

[提示] 对于 $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ 应用分部求和法并利用题设不等式即可.

11. 设 N 为一固定的大整数, $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$ 为任意两组常数. 今定义 $b_k = 0 (k > N)$ 以及

$$\Delta^m b_k = \Delta^{m-1} b_{k+1} - \Delta^{m-1} b_k, \quad \Delta b_k = b_{k+1} - b_k,$$

$$s_k^{(m)} = \sum_{v=1}^k s_v^{(m-1)}, \quad s_k^{(1)} = s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

则有恒等式

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k = (-1)^m \sum_{k=1}^N s_k^{(m)} \Delta^m b_k$$

成立.

[提示] 相继应用 m 次分部求和法即可.

12. 设 $a_k > 0, b_k > 0$, 而 $\{v_k\}$ 为单调下降的正数列. 又设

$$H = \max \left\{ \frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \dots, \frac{B_n}{A_n} \right\}, \quad h = \min \left\{ \frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \dots, \frac{B_n}{A_n} \right\},$$

$$H_m = \max \left\{ \frac{B_m}{A_m}, \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}, \dots, \frac{B_n}{A_n} \right\}, \quad h_m = \min \left\{ \frac{B_m}{A_m}, \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}, \dots, \frac{B_n}{A_n} \right\},$$

此处 $A_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k$, $B_k = b_0 + b_1 + \dots + b_k$, 则有不等式

$$\begin{aligned} h_m + (h - h_m) \frac{\sum_{k=0}^m a_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} &\leq \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \\ &\leq H_m + (H - H_m) \frac{\sum_{k=0}^m a_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \end{aligned}$$

成立.

[证] 本命题可看做阿贝尔引理的扩充, 其证明的办法亦大致相似. 首先我们注意到 $B_k \leq H A_k (k=0, 1, \dots, n)$, $B_r \leq H_m A_r (r=m, m+1, \dots, n)$, 因此

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k (v_k - v_{k+1}) + B_n v_n}{\sum_{k=0}^{n-1} A_k (v_k - v_{k+1}) + A_n v_n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=0}^{m-1} H A_k (v_k - v_{k+1}) + \sum_{k=m}^{n-1} H_m A_k (v_k - v_{k+1}) + H_m A_n v_n}{\sum_{k=0}^{n-1} A_k (v_k - v_{k+1}) + A_n v_n}, \\ \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} - H_m &\leq (H - H_m) \frac{\sum_{k=0}^{m-1} A_k (v_k - v_{k+1})}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \end{aligned}$$

$$\leq (H - H_m) \frac{\sum_{k=0}^m a_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k},$$

故命题中不等式的右段已证明. 其左段的证法与此相似.

13. 保留命题 12 的全部假设, 但将 $\{v_n\}$ 改设为单调上升的数列, 则有

$$\begin{aligned} H_m - \frac{(H_m - h_m)A_n v_n + (H - H_m)A_m v_m}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} &\leq \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \\ &\leq h_m + \frac{(H_m - h_m)A_n v_n + (h_m - h)A_m v_m}{\sum_{k=0}^n a_k v_k}. \end{aligned}$$

§ 2 阿贝尔引理应用于级数收敛性问题

14. (阿贝尔定理) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$.

[证] 容易看出 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上为一致收敛.

事实上, 对任给正数 ε , 有 N 使当 $n > N$ 时, $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$. 从而由

阿贝尔引理(命题 4)可知同时有 $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right| < x^n \varepsilon \leq \varepsilon$, 只要 $0 \leq$

$x \leq 1$. 因此由函数项级数的连续性定理即得

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = s.$$

15. (级数乘法定理) 令 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, 又设级数 $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ 都收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \quad (\text{Abel})$$

[证] 因为绝对收敛的级数可以相乘, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = s_1(x) s_2(x) \quad (0 \leq x < 1).$$

于是由阿贝尔定理(命题 14)便立刻得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} s_1(x) s_2(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} s_1(x) \lim_{x \rightarrow 1^-} s_2(x) \\ &= s_1(1) s_2(1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \end{aligned}$$

16. 试证:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \right)^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \cdots. \end{aligned}$$

[证] 于阿贝尔关于级数乘法的定理(命题 15)中, 取

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad a_0 = b_0 = 0,$$

则有

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 = (-1)^n w_n,$$

此处

$$w_n = \frac{1}{1 \cdot (n-1)} + \frac{1}{2 \cdot (n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot 1} \quad (n \geq 2).$$

显然

$$\begin{aligned} n w_n &= \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} + 1 \right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) = 2 \ln n + 2\gamma + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$