MATHEMATICAL ANALYSIS

数学分析

3

郭 林 王学武 刘柏枫 编

清华大学出版社

MATHEMATICAL ANALYSIS

数学分析 3

郭 林 王学武 刘柏枫 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是为满足通识教育的要求而编写的数学分析教材，共分3册．本册为第3册，包括实数理论和实数连续性，内容为：戴德金分割、实数连续性定理、覆盖和一致连续、上下极限等；曲线积分与曲面积分，包括两类曲线积分及两类曲面积分、格林公式、高斯公式等；再论积分，进一步讨论了黎曼可积的条件，并给出了重积分变量代换的证明；二元函数中值定理和泰勒公式，包括隐函数的存在性、二元函数中值定理、二元函数的泰勒公式（极值定理证明）；反常积分与含参变量积分、无穷级数的进一步知识与无穷乘积等．

本书的读者对象：全日制本（专）科数学系各专业学生，对高等数学要求较高的其他理工各专业，学过数学分析的数学系高年级学生等．

版权所有，侵权必究．侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（3）/郭林，王学武，刘柏枫编．--北京：清华大学出版社，2012.4

ISBN 978-7-302-28268-6

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①郭…　②王…　③刘…　Ⅲ．①数学分析—高等学校—教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 040413 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　**印　　张**：12.25　**字　　数**：265千字
版　　次：2012年4月第1版　**印　　次**：2012年4月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：24.00元

产品编号：038902-01

前言

FOREWORD

自从数学家欧拉编写了第一本微积分教科书以来，就有人说："后来的数学分析教科书，或者是抄袭欧拉的，或者是抄袭抄袭欧拉的．"但因为有不同风格的数学分析教师，也有不同需要的学生，所以估计中国有多少所重点大学，就有多少套数学分析教材．目前数学分析的教材已经很多了，其中有些教材已经成了经典教材．本书是众多数学分析教材中又多出来的一套，但它也并不是可有可无．

本书是在高等教育由精英教育逐渐演化为大众教育的背景下，考虑到山东工商学院数学系正在进行的围绕通识教育为核心的教学改革之需要，由函数论教研室的几位数学分析任课教师共同编写而成的．

数学分析课程是数学系的核心基础课程，对于培养严谨的思维习惯和专业素养有着决定性的作用，它的重要性是毋庸置疑的．传统大学开设数学分析的时间达到连续4个学期，目前国内一些高校虽缩短了课时，但也至少是3个学期．各高校数学系都十分重视数学分析课程的教学和研究，各大学也都对此给予了大力的支持．按照通识教育的要求，数学系入学第一年讲授的数学知识是一般性的基本知识，到了二年级再进行专业分流，这就引出了一个无法回避的问题：数学分析课程应该怎样设置？如果按照传统方式先连续开设两个学期，那么大多数专业分流以后，不选择数学专业的学生不再学习数学分析，而两个学期的数学分析又根本涵盖不了高等数学的基本内容，也达不到基本的要求．如果前两个学期选择开设公共高等数学，那么选修数学专业的学生第三学期再学数学分析，感觉是"接不上头"，教师也不知道该怎么讲才能前后内容贯通．数学课程不同于其他课程的根本在于知识结构的逻辑性，逻辑性不完善会影响学习效果．为此我们试图编写一套适合通识教育背景下的数学分析教材，共分3册，要求内容翔实、难度适中，适合我校和同类院校的学生使用．其知识体系完整，各部分内容既相对独立又有紧密联系．这就不能照搬以往的数学分析

或者高等数学教材．其中第 1 册、第 2 册既适合数学系学生，又适合对数学程度要求较高的理工科专业的学生使用．

本书不同于以往常见的数学分析教科书之处在于：它并不是按照知识体系中的先后逻辑次序来编写内容，而是按照学生的接受能力和专业选择来安排知识的排列次序．本书的第 1 册与第 2 册可满足经济类各专业的学生学习微积分基本知识的要求，加上第 3 册的第 14 章，就能够满足理工科非数学专业对微积分（高等数学）知识的要求．全书包括了传统数学分析的主要内容，考虑到目前大学生课业繁重，因此没有安排涉猎过多的专题内容和应用问题，也没有配备大量的课后习题．全书适合各类大学尤其教学型大学的数学系学生使用．

由于平时教学科研任务繁重，用在编写教材上的精力有限，有道是“书不尽言言不尽意”，加之时间仓促，所以认知上的失误不敢保证没有，出错亦在所难免，恳请各位同行及读者批评指正．

全套书由王学武、郭林主笔，王利珍、孙喜东、刘柏枫参与了部分章节的编写和部分课后习题的解答工作．全书由郭林进行统稿整理．

编　者

2011 年 6 月于山东烟台

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

CONTENTS

第 13 章

实 数 理 论

本章讨论数学分析的基础理论问题，即实数理论和实数的连续性问题．为了保证微积分在逻辑上的严密性，由柯西、魏尔斯特拉斯、戴德金、康托等数学家从不同的角度对实数集进行认识，从而完成了微积分的严格化．对于实数理论的阐述，根据数学工作者个人的偏好，可以分为逻辑主义、形式主义和直觉主义等不同的描述倾向．在本书里，我们不打算过于形式化地从自然数构造谈起，也不打算过于注重逻辑上的严密性而忽视了直觉的感受，主要是为了使读者了解实数集是一个具有什么样构造的集合．我们假定读者对于自然数和有理数的概念都是十分清楚的．

13.1 实数

在中学中，我们对于实数基于这样的直观感性认识：全体实数刚好能够不多不少地摆在一条"直线上"，从左到右依次增大而且没有一个多余的、也没有一个空隙．这种直观上的认识形成了绝大多数人的空间观．这种空间观根深蒂固地存在于人们的头脑中，以至于有时不加怀疑地认为真实的空间本来就是这个样子的．不过古代希腊人并不是这样认为的：比如当时的人们认为一切数都能写成两个整数相除的形式．因此在发现无理数之前人们认为直线是由一切有理数不多不少刚好排列在其上形成的．因此，同样都称为直线，其实是有区别的．从数学分析角度来看，我们认为由全体有理数组成的直线是有空隙的，由全体实数组成的直线是没有空隙的．这就是实数连续性的直观描述．

13.1.1 戴德金分划

首先我们给出有理数分划的定义．直观上来说，就是把有理数集分成左右两段．

定义 如果全体有理数分成了两个非空集合$\mathbb{Q}=A\cup A'$，且满足下面两个条件：

(1) $A\cap A'=\varnothing$，

(2) $\forall x\in A, x'\in A'$，都有 $x<x'$，

那么就称为有理数的一个**分划**，记作分划$(A|A')$．A 叫做此分划的**下组**，A'叫做此分划的**上组**．

注 从上述分划定义可以看出：

(1) 如果某数 x 属于下组，那么当 $y<x$ 时，y 也属于下组；如果某数 x' 属于上组，那么当 $z>x'$ 时，z 也属于上组.

(2) 每个有理数必须而且只能属于上面两个集合中的一个.

(3) 根据分划的定义，知道下组或者上组之中的一个，分划便已经确定.

例 1 $A=\{x\mid x\in\mathbb{Q},x\leqslant 1\}$，$A'=\{x\mid x\in\mathbb{Q},x>1\}$，则 $(A\mid A')$ 是有理数的一个分划. 显然下组 A 中有最大的数 1，A' 中无最小的数. 我们把 1 称为此分划的**界数**.

例 2 把一切满足不等式 $x^2<4$ 的正有理数及全体非正有理数归入下组 A，把一切满足不等式 $x^2\geqslant 4$ 的正有理数归入上组 A'. 则显然 $(A\mid A')$ 是有理数的一个分划. 而且下组中无最大的数，上组中有最小的数 2. 我们把 2 称为此分划的**界数**.

例 3 把一切满足 $x^2<2$ 的正有理数及全体非正有理数归入下组 A，把满足 $x^2>2$ 的全体正有理数归入上组 A'. 则 $(A\mid A')$ 是有理数的一个分划.

下面我们将说明，此分划中下组没有最大的数，上组也没有最小的数. 因此此分划没有界数. 假定正有理数 a 属于下组，即 $a^2<2$，则当 n 是足够大的正整数时，必有 $\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2$. 通过简单的演算容易得到，当 $n>\frac{2a+1}{2-a^2}$ 时即可. 因此下组中没有最大的数. 同样论证可以看出上组中没有最小的数.

通过上面的分析，我们发现对于有理数的分划，可以出现下面 3 种情形：

(1) 下组中有最大的数 a，上组中没有最小的数. 分划产生界数 a.

(2) 下组中没有最大的数，上组中有最小的数 a'. 分划产生界数 a'.

(3) 下组中没有最大的数，上组中没有最小的数. 分划没有界数.

对于有理数的任何一个分划，只能出现上述 3 种情况之一. 我们可以简单地说明不会出现下面这种情况：

(4) 下组中有最大的数 a，上组中有最小的数 a'.

如果这样，根据分划的定义，必有 $a<a'$，则有理数 $\frac{a+a'}{2}$ 不在上下任何一个组，这与分划的定义不符合.

上述的第(3)种情况表明，有理数“直线”有空隙. 分划中的上组和下组没有连接上. 戴德金的实数构造理论就是把有理数之间的空隙加入新的数——无理数，有理数和无理数组成实数.

定义 对于有理数的一个分划 $(A\mid A')$，如果下组中没有最大的数，上组中没有最小的数，即分划没有界数，则称分划产生了一个无理数 α，且无理数 α 大于下组中的任何有理数，小于上组中的任何有理数.

有理数的分划，在前两种情况下，分划产生了界数，我们也称为界数 a 是由分划产生的(有理数). 只有第(3)种情况才产生无理数. 我们把 3 种情况统称为由分划产生了实数. 如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 3 中的分划就产生了无理数$\sqrt{2}$,它大于下组中的任何有理数,同时小于上组中的任何有理数.直观上,例 3 中的分划无界数,这意味着 A 与 A'之间存在一个"缝隙",这个"缝隙"刚好由$\sqrt{2}$所填补.不过从字面上来看,说分划$(A|A')$定义了无理数,似乎并没有回答无理数究竟是什么的问题.因为人们一直认为数应该是能够很清楚表达出来的.下面我们就以例 3 中定义的无理数来说明这个问题.

例 4 计算例 3 所定义的无理数$\sqrt{2}$的近似值,精确到小数点后 5 位.

解 因为$\sqrt{2}$大于下组中的任何有理数,小于上组中的任何有理数,因此

$$1<\sqrt{2}<\frac{3}{2},$$

所以

$$0<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}.$$

从而各项平方得

$$0<3-2\sqrt{2}<\frac{1}{4},$$

继续平方得

$$0<17-12\sqrt{2}<\frac{1}{16},$$

再平方得

$$0<577-408\sqrt{2}<\frac{1}{256},$$

两边除以 408 就有

$$0<\frac{577}{408}-\sqrt{2}<\frac{1}{104\,448}.$$

这表明,用$\frac{577}{408}$代替$\sqrt{2}$,略大一些,误差小于 10^{-5}.由于

$$\frac{577}{408}\approx 1.414\,215\,68,$$

因此$\sqrt{2}\approx 1.414\,21$,且误差小于 10^{-5}.

读者可以继续算下去得到更接近$\sqrt{2}$的小数.

定义 有理数及有理数的一切分划产生的无理数统称为**实数**.记作$\mathbb{R}$ 或者$\mathbb{R}^1$.

在$\mathbb{R}$ 中定义大小(序)关系如下:

(1) 有理数之间原来的大小关系不变.

(2) 设 a 是一个有理数,b 是一个由分划$(A|A')$产生的无理数.若 $a\in A$,则规定 $a<b$;若 $a\in A'$,则规定 $b<a$.

(3) 设 a 是一个由分划$(A|A')$产生的无理数,b 是一个由分划$(B|B')$产生的无理数.

如果 $A=B$,则 $a=b$;如果 $A\subset B$(真包含),则 $a<b$;否则 $b<a$.

(4) 规定 $a>b$ 和 $b<a$ 等价.

(5) 若 $a>0$,称 a 是正实数;若 $a<0$,称 a 是负实数.

容易验证实数的序关系保留了有理数序关系的一切性质,在此不一一列举.一旦有了序关系,就有了实数集上区间的定义,这些都是读者熟知的.

13.1.2 实数的运算

由于有理数都是整数、有限小数以及无限循环小数,因此我们猜测无理数必然是无限不循环的小数.从例 4 可以看出,无理数$\sqrt{2}$能够用有理数来逼近到小于预先设定的任何值.

定理 1 对于有理数的任何分划$(A|A')$产生的无理数 β,总可以用十进制无限不循环小数来表示.

证明 设分划下组 A 中最大的整数为 a_0,则无理数 β 在 a_0 和 a_0+1 之间.假定在下组中 $a_0+0.1, a_0+0.2, \cdots, a_0+0.9$ 最大的是 $a_0+0.a_1$,再假定在下组中

$$a_0+0.a_1 1, a_0+0.a_1 2, \cdots, a_0+0.a_1 9$$

最大的数是 $a_0+0.a_1a_2$,则

$$a_0+0.a_1a_2<\beta<a_0+0.a_1a_2+10^{-2}.$$

这样对于任何正整数 n,存在小数 $a_0+0.a_1a_2\cdots a_n$,且

$$0<\beta-a_0+0.a_1a_2\cdots a_n<10^{-n}.$$

从而

$$\beta=\lim_{n\to\infty}(a_0+0.a_1a_2\cdots a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}.$$ 证毕

无理数可以用十进制无限小数来表示.由于循环小数都是有理数,因此无理数必定是无限不循环的小数.当然,有理数也可以用十进制无限小数来表示,而且是循环小数.如

$$\frac{1}{3}=0.333\,333\,3\cdots,\quad 2=2.0000\cdots=1.9999\cdots$$

从上面的定理可以看出,无理数的确是实实在在的数,而且也能用十进制来表示.一些常见的无理数如$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,π,e,人们都能说出来小数点后的一两位.无理数的定义方式不止一种,戴德金分划只是其中的一种方式,虽然看起来有点别扭,没有给出无理数"确切"的表示,但是用分划来定义无理数具有构造简单而且逻辑严密等优点,也符合现代数学流行的作法.

对于有理数间的四则运算大家都很熟悉了,下面定义实数的四则运算.我们只定义包含无理数的运算,首先讨论加减法:

定义 给定两个实数 a,b,分别用十进制小数表示为 $a=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$,$b=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$,其中 a_0,

b_0 都是整数，$n>0$ 时，$a_n, b_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，规定：

(1) $a \pm b = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n \pm b_n}{10^n}$；

(2) $a \times b$(或 $a \cdot b$) $= \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{a_m}{10^m} \times \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b_n}{10^n} = \sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \dfrac{a_m b_n}{10^{m+n}}$；

(3) 若 b 是由有理数分划 $(A|A')$ 产生的正无理数，规定它的倒数 $\dfrac{1}{b}$ 是由分划 $(B|B')$ 产生的无理数，其中 $B' = \left\{\dfrac{1}{x} \middle| x \in A'\right\}$. 若 b 是由有理数分划 $(A|A')$ 产生的负无理数，规定它的倒数 $\dfrac{1}{b}$ 是由分划 $(C|C')$ 产生的无理数，其中 $C = \left\{\dfrac{1}{x} \middle| x \in B\right\}$.

除法运算定义为 $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$，$b \neq 0$.

容易验证，实数的四则运算保留了有理数四则运算的几乎全部性质，下面罗列如下.

定理 2 实数的加减法运算满足下面规律：

(1) 结合律，$(a+b)+c = a+(b+c)$；

(2) 交换律，$a+b=b+a$；

(3) 0 的单位性，$a+0=a$；

(4) 负元的存在性，存在唯一的实数 $-a$，使得 $a+(-a)=0$；

(5) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$，$a>0 \Leftrightarrow -a<0$.

根据加法运算的定义不难证明上面结论，在此省略不加证明. 有兴趣的读者可以自己给出证明，尤其是(5)，看似简单，却具有挑战性.

定理 3 实数的乘法运算具有下面的性质：

(1) 结合律，$(ab)c=a(bc)$；

(2) 交换律，$ab=ba$；

(3) 1 的单位性，$1 \cdot a = a$；

(4) 倒数的唯一性，对于任何非零实数 a，存在唯一的倒数 $\dfrac{1}{a}$(或 a^{-1})，使得 $a \cdot a^{-1} = 1$；

(5) 乘法对加法的分配律，$a(b+c)=ab+ac$；

(6) 序性质，若 $a<b$，$c>0$，则 $ac<bc$.

这些性质想必不列举也已经早知道了，因为这些性质完全是有理数所具有的全部性质. 学习了无理数的定义，这些性质顺理成章地被继承了下来. 在此省略这些枯燥乏味的证明，有兴趣的读者可以自己尝试论证. 至于实数的其他形式运算，如指数、对数、三角函数等，我们不加详细讨论. 有兴趣的读者可以仿照定义利用级数运算来刻画.

到此为止，我们从有理数的分划角度定义了无理数，进而填补了有理数之间的空隙. 而且也定义了实数的大小关系以及四则运算. 我们要问的问题是：实数直线上还有没有空隙？

本节最后我们讨论这个问题.

定义 如果全体实数分成了两个非空集合$\mathbb{R}=A\cup A'$,且满足下面两个条件:

(1) $A\cap A'=\varnothing$;

(2) $\forall x\in A, x'\in A'$,都有 $x<x'$.

那么就称为实数集的一个**分划**,记作分划$(A|A')$. A 叫做此分划的**下组**,A'叫做此分划的**上组**.

实数的分划完全按照有理数的分划方式进行的,我们的目的是要证明实数按照这种分划不会产生空隙了. 首先先证明一个关于有理数的定理.

定理 4(有理数的稠密性) 任何区间(a,b)内都有无限多个有理数.

证明 a 可以看作是由有理数分划下组为$(-\infty,a)\cap\mathbb{Q}$所产生的,$b$ 可以看作是由有理数分划下组为$(-\infty,b)\cap\mathbb{Q}$所产生的,若$(a,b)$内没有有理数,便有$(-\infty,a)\cap\mathbb{Q}=(-\infty,b)\cap\mathbb{Q}$,因此 $a=b$,这与 $a<b$ 矛盾. 从而必有 $r\in\mathbb{Q}$,使 $a<r<b$. 再重复上面过程,在区间(a,r)与(r,b)内也存在有理数,因而(a,b)内有无限多个有理数. 证毕

定理 5(分划定理) 对于实数集的任何一个分划$(A|A')$,下面两种情况只有而且必有一种情况成立:

(1) 下组 A 中有最大的数;

(2) 上组 A'中有最小的数.

证明 对于实数集的任何一个分划,得到了有理数集的一个分划$(A\cap\mathbb{Q}\,|\,A'\cap\mathbb{Q})$,则此分划产生了实数 a,因此必然有 $a\in A$ 或者 $a\in A'$. (1) 当 $a\in A$ 时,下面证明 a 是 A 中的最大数. 如果 A 中还有实数 $a'>a$,由有理数的稠密性,则此时必有有理数 r,满足 $a<r<a'$,则 $r\in(a,a')\subset A$,因此 $r\in A\cap\mathbb{Q}$,这与分划$(A\cap\mathbb{Q}\,|\,A'\cap\mathbb{Q})$产生的实数 a 要大于下组中的每个有理数矛盾,因此 a 是 A 中的最大数. (2) 当 $a\in A'$时,则同样可以证明此 a 是 A'中的最小数. 证毕

至此,利用分划方式来定义无理数而构造的实数集,不再有空隙.

习 题 13-1

1. 求$\sqrt{3}$的近似值,精确到 10^{-5}.
2. 利用分划给出正实数 a 算术根$\sqrt{a}$的定义.
3. 定义$|a|=\sqrt{a^2}$,证明绝对值有下面性质:

(1) $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$;

(2) $|ab|=|a|\cdot|b|$.

4. 证明任何区间内都有无限多个无理数.
5. 证明 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$.

6. 证明：$a<b \Rightarrow a+c<b+c, a>0 \Leftrightarrow -a<0$.

7. 证明：若 $a<b, c>0$，则 $ac<bc$.

13.2 实数连续性理论(一)

13.1 节根据戴德金分划法构造了实数集，这种通过填补有理数的空隙来构造实数的方式，得到了实数直线的无间隙性. 实数的连续性有几个等价但表现方式不同的定理，这些定理中无论哪一个作为公理都可以得出数学分析的基本理论. 本节和 13.3 节将讨论这一点.

在第 1 册中，以确界定理为基本定理，证明了关于实数连续性的一些结论. 在这里，以 13.1 节定理 5 为出发点，先来证明确界定理，再由此证明其他定理. 为了结构上的完整性，有些定理虽然在第 1 册中证明过了，在这里还会重复证明. 我们将证明，这些定理之间在逻辑上是完全等价的，也就是说，在逻辑上互为因果关系，或者用佛经《阿含经》中一段话来说就是：此有故彼有，此无故彼无，此生故彼生，此灭故彼灭.

13.2.1 确界定理

先回顾确界的定义.

定义 设 E 是任何一个非空数集，如果存在一个实数 α，满足

(1) α 是 E 的一个上界，

(2) 如果 $\alpha'<\alpha$，则 α' 不是 E 的上界，

则称 α 是数集 E 的**上确界**，记作 $\alpha=\sup E$.

定义 设 E 是任何一个非空数集，如果存在一个实数 β，满足

(1) β 是 E 的一个下界，

(2) 如果 $\beta'>\beta$，则 β' 不是 E 的下界，

则称 β 是数集 E 的**下确界**，记作 $\beta=\inf E$.

简而言之，上确界是最小的上界，下确界是最大的下界.

定理 1(确界定理) 任何非空且有上界的实数集必有上确界，且是唯一的.

证明 用 E 表示非空有上界的数集，现在构造实数的一个分划：A 表示不是 E 的上界的实数组成的集合，即 $x\in A$，当且仅当存在 E 中某实数 x'，使得 $x<x'$. A' 表示 E 的上界组成的集合，即 $x\in A'$，当且仅当对于 E 中任何实数 y，都有 $y\leqslant x$. 显然 A 中的任何数都小于 A' 中的任何数，因此 $(A|A')$ 是实数的一个分划. 因此或者 A 中有最大数，或者 A' 中有最小数. 若 A 中有最大数 a，由于 a 不是 E 的上界，因此存在 E 中某实数 x'，使得 $a<x'$，如此容易看出，$\dfrac{a+x'}{2}<x'$，因此 $\dfrac{a+x'}{2}$ 也是 A 中的数，而且比 a 大. 因此 A 中没有最大的数，从而可知 A' 中有最小数 α，即 α 是最小下界，因此 $\alpha=\sup E$. 由于上确界是最小的上界，因此上确界唯一.

证毕

同理可证关于下确界的相关结论：**任何非空有下界的实数集必有下确界.**

13.2.2 广义实数系

在现代数学中，为了应用上的方便，有必要对实数系进行扩充，通过增加两个元素$\pm\infty$将实数扩充为广义实数集$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$，且约定对其他实数都有

$$-\infty<a<+\infty,\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

应该说明的是，$\pm\infty$和普通实数有很大的差别，不加区别的使用可能导致很多混乱，因此有许多教科书都尽量不使用它们. 但是只要运用得恰当，会给运算和一些理论的表达带来方便性和完整性，在后面讨论过程中我们将看到这一点.

对于没有上界的数集，其上确界规定为$+\infty$；对于没有下界的数集，其下确界规定为$-\infty$. 在极限情况下，在第1册已经涉及了无穷大$\pm\infty$. 今后将用**“有极限”表示极限可以是无穷大的情形，用“收敛”表示极限是普通实数的情形.**

无穷大可以参与一些运算，比如

$$\begin{aligned}&+\infty+(+\infty)=+\infty,\\&+\infty-(-\infty)=+\infty,\\&\pm\infty\pm a=\pm\infty,\\&\pm\infty\times a=\pm\infty,\quad a>0,\\&\pm\infty\times a=\mp\infty,\quad a<0.\end{aligned}$$

但$+\infty-(+\infty)$，$+\infty+(-\infty)$，$\pm\infty\times 0$等都是没有意义的.

在广义实数系下，可以得到下面的极限定理.

定理2 单调增加(单调减少)的数列以上确界(下确界)为极限；单调有界数列必收敛.

具体叙述为：如果

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots+\infty\quad(a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}\quad(\lim_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}).$$

证明 只考虑$\{a_n\}$单调增加的情形，单调减少的情形类似.

(1) 如果$\{a_n\}$没有上界，则对于任意的正数A，存在某个a_{N+1}，使得$a_{N+1}>A$. 于是根据单调性，当$n>N$时，总有$x_n>A$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty=\sup\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$.

(2) 如果$\{a_n\}$有上界，根据确界定理，存在唯一的上确界$a=\sup\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$. 由于$a$是最小的上界，因此对于任意的正数$\varepsilon$，$a-\varepsilon$不再是上界，因此必存在某一项$a_{N+1}$，使$a-\varepsilon<a_{N+1}$. 又根据上确界本身是一个上界，因此还有$a_n\leqslant a(n=1,2,\cdots)$. 于是有$a-\varepsilon<a_{N+1}\leqslant a_{N+2}\leqslant\cdots\leqslant a<a+\varepsilon$. 因此，对于任意的正数$\varepsilon$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得当$n>N$时总有$|a_n-a|<\varepsilon$. 证毕

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com