全国名牌大学附中

卢元 曾容 主编

曾容 孔庆邮 编

名师为你家教

高中毕业班 数学

Ming Shi Wei Ni Jia Jiao

Ming Shi Wei Ni Jia Jiao

Ming Shi Wei Ni Jia Jiao

Ming Shi Wei Ni Jia Jiao

Ming Shi Wei Ni Jia Jiao

北京大学附中 复旦大学附中 华东师大二附中

京师大附中 东北师大附中 南京师大附中

上海师大附中 交通大学附中 华东师大一附中 福建师大附

师大附中 湖南师大附中 辽宁师大附中

上海外国语大学附属浦东外国语学校 湖北大学附

科学出版中心

全国名牌大学附中名师为你家教

·高中毕业班数学·

卢　元　曾　容　主编

曾　容　孔庆邮　编

东 方 出 版 中 心

说　　明

经中央机构编制委员会办公室和中华人民共和国新闻出版署批准，原中国大百科全书出版社上海分社、知识出版社（沪），自1996年1月1日起，更名为东方出版中心。

全国名牌大学附中名师为你家教——高中毕业班数学　　卢　元　曾　容　主编

出版：东方出版中心
（上海仙霞路335号　邮编200336）
发行：东方出版中心
经销：新华书店上海发行所
印刷：昆山市亭林印刷总厂

开本：787×1092（毫米）1/16
印张：17
字数：390千字
版次：1999年8月第1版第1次印刷
印数：1—15,000

ISBN 7-80627-481-2/G · 142　　**定价：17.00元**

内容提要

目前，聘请富有教学经验的教师担任家教，已成为社会的普遍现象，但聘请名师出任家教毕竟不易。为此，我们推出《全国名牌大学附中名师为你家教》这套丛书，本书是其中的一种。本书依据现行教学大纲及教材，为高三学生及有关教师、家长(包括家教老师)提供高质量的家教用书，讲解高三数学的基本知识和解题技能，能使学生掌握正确、有效的学习方法，并提供复习、应考指导。全书分 100 天、100 讲，每天(讲)均设有：1.“学习要点”。极为精要地概括这一部分的学习和应考内容；2.“家教点窍”。从家教的角度，对上述内容作“点窍”性质的阐述，有知识的介绍，重点、难点的分析，学习、复习方法的指点；3.“典型例题”。选择最典型、最能体现学习、应考目标的例题作讲解和评析；4.“强化训练”。精选最典型、最能训练学习、应考能力的一批习题，题型灵活多样，既有坡度，又有一定的难度。若干天后设“阶段测试”，最后几天设“综合训练”(相当于模拟考试)，书末并附有全部习题答案、提示或简要解题过程。本书体现了名校名师的教学经验和卓有成效的训练、复习方法，利教便学，精要实用，特别便于学生、家长及教师(包括家教老师)使用。一册在手，等于请了一位名师担任家教。

全国名牌大学附中(附小)名师为你家教

编 委 会

编写说明

望子成龙，望女成凤，当前家教成风，“家教热”持续升温。据抽样调查，某校高三学生85%以上请家教，初三学生90%以上请家教。有些学生语、数、英三门学科都请家教，有些学生则连其他一些学科也请家教。学生的双休日几乎成了“家教日”，就连平时也要安排若干时间由家教老师补课。更有甚者，家教还扩展到非毕业班，如小学三、四年级，初中一、二年级，高中一、二年级，都有不少学生请家教。

面对如此火爆的家教现象，我们亦喜亦忧。喜的是：经历了“十年动乱”的中国人民，终于认识到“科教兴国”的意义，对子女的教育越来越多地倾注巨大的热情；忧的是：目前的家教存在诸多问题：1. 缺少优秀的教师。有些家教老师水平不高，缺乏经验，敷衍了事，既辜负了家长们的拳拳之心，又浪费了莘莘学子的宝贵时光；2. 缺少合适的教材。家教需要在教科书之外另找辅助教材，老师们忙于日常教务，只能匆忙应付，复印一些习题资料应急，费时费力，又难保证质量；3. 缺少科学的安排。一年或半年的家教，应当统盘考虑，全面而科学地设计每星期的复习内容，但教师们限于个人的精力，难于精心编拟教学进度，影响了家教的效率。

为了解决家教中普遍存在的“三缺少”问题，我们邀请复旦大学附中卢元、曾容两位特级教师担任主编，组织全国十余所名校的教师，编写了这套《全国名牌大学附中(附小)名师为你家教》丛书，包括13种书：高中毕业班语、数、英、理、化共5种，初中毕业班语、数、英、理、化共5种，小学毕业班语、数、英共3种。整套书有如下四个特点：

1. 目的性明确。充分体现“名师”的经验，体现了我国一大批名牌大学附中(附小)长期积累的指导毕业生复习应考的“看家本领”，使家教立足于高起点，获得高效率。编写时，力求紧扣教学大纲和考试要求，梳理应考内容，指导应考方法，训练应考能力，家教的目的性十分明确。

2. 覆盖面完整。各册书分别包括各年段、各学科毕业考试及升学考试所需的全部知识及能力，但并不平施力量，做到：内容全面，突出重点，明确难点，详略得当。

3. 系统性突出。每册书的框架，由主编会同作者精心设计，科学编排，根据各学科内在的知识结构，根据学生接受知识的客观规律，分成100天，100讲。每天(讲)之间，衔接紧密，排列恰当，由浅入深，由简至繁。若干天(讲)后，设“阶段测试”；最后几天(讲)，设“综合训练”，做到系统复习，科学训练。

4. 可操作性强。编写本书的作者，都有丰富的家教经验。各册书中，每天(讲)的内容相对完整，便于家教老师据此作两课时左右的讲解及训练。各册书对重点部分作必要反复，对难点部分作必要分解，对能力部分(如语文的写作能力，数理化的解题能力等)作交叉训练，对非重点内容点到为止。每天(讲)均设“学习要点”、“家教点窍”、“典型例题”、“强化训练”等栏目，以“强化训练”为主体。这样的编排充分体现了家教应有的程序，有很强的可操作性。

上述几条，形成了本书独特的优点：

可供教师作为方便实用的家教用书；

可供学生作为无师自通的自习用书；

可供家长作为指导子女的辅导用书。

真可谓“一书在手，家教不愁”。

最后要说明一点：目前全国小学有5年、6年两种学制，因此小学毕业班三册书中，前50天（讲）主要供5年制学生使用，后50天（讲）主要供6年制学生使用。前后两部分内容会有某些交叉，但因为知识和能力需要反复训练才能掌握，所以这样编排也有利于复习巩固。

欢迎广大读者多提宝贵意见，以使本书日臻完善。

目　录

第一阶段

第1天　集合的概念与运算

[**学习要点**]

1. 理解集合、子集、空集、全集的概念，了解属于、包含、相等关系的意义及相关术语、符号。

2. 正确使用列举法、描述法、Veen 图来表示集合，能熟练进行交、并、补的运算。

[**家教点窍**]

1. 集合中易混淆的概念有：$\in$ 与 $\subset$。前者是元素与集合的关系，后者为集合与集合的关系；$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$，前者为不含任何元素的集合，后者为以 $\varnothing$ 为元素的单元集。

2. 集合中考查的重点是：(1)子集的概念，$A \subseteq B$：若 $x \in A$，则 $x \in B$；若 $x \notin B$，则 $x \notin A$。(2)交集与并集 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$（关键词“且”），$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$（关键词“或”），$A \cap B = A$ 即 $A \subseteq B$，$A \cup B = A$ 即 $B \subseteq A$。(3)公式 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$。

3. 集合中考查的难点是：集合运算的综合应用，解题时要充分利用 Veen 图及数轴，迅速地化集合语言为相关的代数语言和几何语言。

[**典型例题**]

例1　(1) 已知集合 $M = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$，$N = \{(x, y) \mid x - y = 4\}$，则 $M \cap N$ 为（　　）

(A) $x = 3, y = -1$　　(B) $(3, -1)$

(C) $\{3, -1\}$　　(D) $\{(3, -1)\}$

解　(D)。（提示：应明确元素集合的概念。）

(2) 已知 I 为全集，集合 M、$N \in I$，若 $M \cap N = N$，则有（　　）

(A) $\overline{M} \supseteq \overline{N}$　　(B) $M \subseteq \overline{N}$　　(C) $\overline{M} \subseteq \overline{N}$　　(D) $M \supseteq \overline{N}$

解　(C)。（提示：由 $M \cap N = N$，即知 $N \subseteq M$。）

(3) 设集合 $I = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$，$M = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2} = 1\right\}$，$N = \{(x, y) \mid y \neq x + 1\}$，那么 $\overline{M \cup N}$ 为（　　）

(A) $\varnothing$　　(B) $\{(2, 3)\}$

(C) $(2, 3)$　　(D) $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$

解　(B)。（提示：$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$。）

(4) 下列结论中，不正确的是（　　）

(A) $2 + \sqrt{3} \in \{m \mid m \leqslant \sqrt{10}\}$

(B) $\{0\} \subset \{x \mid x \leqslant 0\}$

(C) $\{\varnothing\} \subset \{x \mid x < 0\}$

(D) $\left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}, k \in Z\right\} \subset \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{k\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

解 (C)。

(5) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$, $I = A \cup B$, 则 $\overline{A} =$ ____, $\overline{B} =$ ____, $\overline{A} \cap \overline{B} =$ ____, $\overline{A} \cup \overline{B} =$ ____, $\overline{A \cap B} =$ ____, $\overline{A \cup B} =$ ____

解 $\overline{A} = \{4, 6\}$, $\overline{B} = \{3, 5\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \{3, 4, 5, 6\}$, $\overline{A \cap B} = \{3, 4, 5, 6\}$, $\overline{A \cup B} = \varnothing$。(提示:用 Veen 图表示。)

例 2 (1)已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a 组成的集合 C。(2)$A = \{x \mid x = \lg(t^2 + 10), t \in R\}$, $B = \{y \mid y = k^2 - 2k - 2, k \in R\}$, 试确定 A 与 B 的关系。

解 (1)$A = \{1, 2\}$, $A \cup B = A$, 即 $B \subseteq A$, 只需 $a \times 1 - 2 = 0$, $a = 2$, 或 $a \times 2 - 2 = 0$, $a = 1$。注意 $a = 0$, $B = \varnothing \subseteq A$, 故 $C = \{0, 1, 2\}$。(2)A、B 表示函数的值域,分别为 $[1, +\infty)$、$[-3, +\infty)$, 故 $A \subset B$。

说明 ①注意$\varnothing$的特殊情形;②转化使(2)的元素明朗化。

例 3 若 $A = \{x \mid x^2 + x - 2 \leqslant 0\}$, $B = \{x \mid 2 < x + 1 \leqslant 4\}$, $C = \{x \mid x^2 + mx + n > 0\}$, 并且满足 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$, $(A \cup B) \cup C = R$, 求 m、n。

解 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \mid 1 < x \leqslant 3\}$, $A \cup B = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$, 又 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$, $(A \cup B) \cup C = R$, 由补集性质知 $C = \overline{A \cup B} = \{x \mid x < -2$ 或 $x > 3\} = \{x \mid x^2 + mx + n > 0\}$, ∴ $x^2 + mx + n = 0$ 的两根为 -2 与 3。由韦达定理得, $m = -(-2 + 3) = -1$, $n = (-2) \cdot 3 = -6$。

说明 应注意集合的运算律。

[强化训练]

一、选择题

1. 下列六个关系式:(1)$\varnothing \in \{\varnothing\}$;(2)$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$;(3)$\{0\} \supseteq \varnothing$;(4)$0 \notin \varnothing$;(5)$\varnothing \neq \{0\}$;(6)$\varnothing \neq \{\varnothing\}$,其中正确的个数是 ( )

   (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 小于 4

2. 设 $M = \{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N =$ ( )

   (A) $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$

   (C) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ (D) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

3. 同时满足 $\{1\} \subset A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ( )

   (A) 5 个 (B) 6 个 (C) 7 个 (D) 8 个

4. 设 I 是全集,集合 $P \subset Q$, 则下列结论中错误的是 ( )

   (A) $P \cup Q = Q$ (B) $\overline{P} \cup Q = I$ (C) $P \cap Q = P$ (D) $\overline{P} \cap \overline{Q} = \overline{P}$

5. 集合 A、B 满足 $A \cup B = \{a, b\}$, 试求集合 A 与 B, 则此题的答案共有 ( )

   (A) 9 种 (B) 4 种 (C) 7 种 (D) 16 种

6. 已知集合 $A=\{x|y=\lg(x^2-x-2)\}$，$B=\{y|y=x^{-\frac{1}{2}}\}$，则 $A\cap B$ 等于 ( )

(A) $[0, +\infty)$ (B) $(0, +\infty)$ (C) R (D) $(2, +\infty)$

二、填空题

1. 全集为 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，则 $\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}=$ ________

2. $M=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$N=\{x|x-k\leqslant 0\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 k 的取值范围是________

3. 已知 $A=\{x||x|<5\}$，$B=\{x|-7<x<a\}$，$C=\{x|b<x<2\}$，且 $A\cap B=C$，则 $a=$ ____，$b=$ ____

4. 已知 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，$F=\{\theta|\mathrm{tg}\theta<\sin\theta\}$，则 $E\cap F$ 为区间 ______

5. I 的子集 $P\subset Q$，则(A) $P\cup Q=Q$，(B) $\overline{P}\cup Q=I$，(C) $P\cap\overline{Q}=\varnothing$，(D) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$ 中，错误的是____

6. 已知 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0, x\in R\}$，且 $A\cap R^+=\varnothing$，则实数 m 取值范围是______

7. 若 $M=\{a, a+d, a+2d\}$，$N=\{a, aq, aq^2\}$，$a\neq 0$，且 $M=N$，则 q 的值为 ______

8. 若 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$ 与 $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，满足 $B\subseteq A$，则实数 m 的范围是______

三、解答题

1. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a。

2. 设 $A=\{x||x|\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2+4x+3<0\}$，求 C，使其同时满足下列三个条件：(1)$C\subseteq(A\cup B)\cap Z$；(2)$C$ 有两个元素；(3) $C\cap B\neq\varnothing$。

3. 集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-nx+n-1=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$。已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 m、n。

4. 设 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant t\}$，$B=\{y|y=2x+3, x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2, x\in A\}$，且 $C\subsetneqq B$，求实数 t 的取值范围。

第2天 函数的概念与反函数

[学习要点]

1. 了解映射的概念，理解函数及有关概念，掌握函数解析式的常用求法。

2. 理解反函数的概念，熟练掌握反函数解析式的求法和互为反函数的图象间的对称性。

[家教点窍]

1. 掌握函数的概念：关键是考察其定义域、对应法则和值域这三个要素。明确函数与其

反函数的关系。要点是明确:(1)定义域与值域的互换性;(2)图象关于 $y=x$ 的对称性。

2. 函数中考查的重点是:函数解析式的常用求法,即凑合法(配方)、换元法和待定系数法。

3. 函数中考查的难点是:正确而迅速地列出题中待求的函数解析式,它是应用函数解决实际问题的关键。

[**典型例题**]

例 1 (1) 下列各组函数中,表示同一函数的是 ( )

(A) $y=x^0$ 与 $y=1$ (B) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

(C) $y=e^{\ln x}$ 与 $y=x^2/(\sqrt{x})^2$ (D) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

解 (C)。(提示:定义域和对应法则是否相同,或两函数图象是否一致,即可判断是否为同一个函数。)

(2) 将函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象沿直线 $y=x$ 对折,所得图象的函数解析式为 ( )

(A) $x=y^2$ (B) $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ (C) $y=x^2$ $(x>0)$ (D) $y=\sqrt{x}$

解 (B)。(提示:定义域与值域的互换。)

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ e & (x=0),\\ x+1 & (x>0)。\end{cases}$ 试求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$与 $f\{f[f(-1)]\}$。

解 分别为 2, 0, e, $e+1$。

(4) 设 $f(\sqrt{t}-1)=t-2\sqrt{t}$,求 $f(x)$。

解 $f(x)=x^2-1$ $(x\geqslant -1)$,凑合法求解。

(5) 设 A 到 B 的映射 $f_1: x\to 2x+1$, B 到 C 的映射 $f_2: y\to y^2-1$,则 $f_2(f_1(x))$ 与 $f_1(f_2(x))$分别为____

解 $f_2(f_1(x))=4x^2+4x$, $f_1(f_2(x))=2x^2-1$。

例 2 求下列函数的反函数:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}[\lg(x-5)+1]$ $(x>5)$;(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x^2 & (-1\leqslant x<0)。\end{cases}$

解 (1) 由原式可得 $2y-1=\lg(x-5)$, $\therefore$ $x=10^{2y-1}+5$ $(y\in R)$, $\therefore$ 反函数是 $y=10^{2x-1}+5$ $(x\in R)$。

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,有 $-1\leqslant y\leqslant 0$,解得 $x=\sqrt{y+1}$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$ $(-1\leqslant x<0)$。当 $-1\leqslant x<0$ 时,有 $0<y\leqslant 1$,解得 $x=-\sqrt{y}$ $(0<y\leqslant 1)$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ $(0<x\leqslant 1)$。

于是所求反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant 1)。\end{cases}$

说明 求反函数步骤:(1)检查是否有反函数;(2)存在时,由 $y=f(x)$,先解出 $x=f^{-1}(y)$;(3)把 x、y 互相调换,改写为 $y=f^{-1}(x)$;(4)由 $f(x)$的值域得 $f^{-1}(x)$的定义域。若为分段函数,则应分段讨论,特别应注意 x、y 的取值。

例 3 (1)已知 $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=x/1-x^2$，求 $f(x)$的解析式。(2)已知 $f(x)$是一次函数，且 $f[f(x)]=4x-1$，求 $f(x)$。(3)若 $f(x)$满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$的解析式。

解 (1) 令 $1+\frac{1}{x}=t$，$\because t\neq 1$，$\therefore x=\frac{1}{t-1}$，于是 $f(t)=\frac{x}{1-x^2}=\frac{t-1}{t^2-2t}$，即 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$ ($x\neq 0$ 且 $x\neq 2$)。

(2) 设 $f(x)=kx+b$，则 $k(kx+b)+b=4x-1$，即 $\begin{cases}k^2=4,\\(k+1)b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-\frac{1}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\b=1。\end{cases}$ $\therefore f(x)=2x-\frac{1}{3}$ 或 $f(x)=-2x+1$。

(3) 以 $\frac{1}{x}$ 代替原式中的 x 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$，与原式联立，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $f(x)=\frac{2}{x}-x$ ($x\neq 0$)。

说明 换元法和待定系数法是求函数解析式的常用方法。

例 4 如图 2-1，正$\triangle ABC$ 边长为 2，PQ 将$\triangle ABC$ 面积等分，设 $AP=x$，$AQ=t$，$PQ=y$。求：(1)t 与 x 的函数关系式；(2)y 与 x 的函数关系式；(3)求 y 的最值。

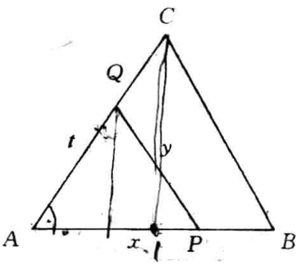

图 2-1 2

解 (1) $\because S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{1}{2}xt\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore xt=2$，$t=\frac{2}{x}$。$\because t\leqslant 2$ 即 $x\geqslant 1$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore t=\frac{2}{x}$ ($1\leqslant x\leqslant 2$)。

(2) $y^2=x^2+t^2-2xt\cos 60°=x^2+\frac{4}{x^2}-2$，$\therefore y=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}-2}$ ($1\leqslant x\leqslant 2$)。

(3) $\because y^2=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+2$，又 $1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore -2\leqslant\frac{-2}{x}\leqslant -1$，即 $-1\leqslant x-\frac{2}{x}\leqslant 1$。$\therefore \left(x-\frac{2}{x}\right)^2\leqslant 1$，即 $2\leqslant y^2\leqslant 3$，$\therefore y_{\min}=\sqrt{2}$，$y_{\max}=\sqrt{3}$。

说明 列函数解析式为关键，特别应注意求出解析式后，必须写明其定义域。

[**强化训练**]

一、填空题

映射 1. 设 A 是直角坐标平面上所有点组成的集合，由 A 到 A 的一一映射 f：$(x, y)\to(y-1, x+2)$，则像点 $(3, -4)$ 的原像点是______

2. $f(x)=a^x+k$ 的图象过 $(1, 3)$点，$y=f^{-1}(x)$ 的图象过 $(2, 0)$点，则 $f(x)$的表达式是______

$y=|x|$

3. 若 $f_1(x)=\sqrt{x^2}$，$f_2(x)=x^2/x$，$f_3(x)=a^{\log_a x}$($a>0$ 且 $\neq 1$)，$f_4(x)=\log_a a^x$ ($0<a\neq 1$)，其中____与 $y=x$ 图象重合。

$\frac{1}{2}ab\sin C$

4. 函数 $y = ax + b$ 与它的反函数是同一函数，则 a 与 b 分别是________

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0), \\ \pi & (x = 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$ 则 $f\{f[f(-2)]\}$ 为____

6. 设 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称，若 $x \leqslant 1$ 时 $y = x^2 + 1$，则当 $x > 1$ 时，$y =$ ______

7. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 R，则函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$，两者图象关于________对称。

8. $g(x) = 1 - 2x$，$f[g(x)] = \dfrac{1-x^2}{x^2}$ $(x \neq 0)$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ ______

二、选择题

1. 下列命题中：在同一坐标系下，(1) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象相同；(2) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象不同；(3) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是同一函数；(4) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是不同函数，其中正确的是 ( )

(A) (1)与(3)　　(B) (1)与(4)　　(C) (2)与(3)　　(D) (2)与(4)

2. 若 $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$，则 $f^{-1}(x)$ 等于 ( )

(A) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$　　(B) $f(-x)$　　(C) $-f(x)$　　(D) $-f(-x)$

3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+a}$ $\left(a \neq \dfrac{1}{2}\right)$ 与其反函数的图象重合，则 ( )

(A) $a = -1$　　(B) $a = -2$　　(C) $a = 2$　　(D) $a = 1$

4. 若 $f(x) = x^2 - bx + c$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$，且 $f(0) = 3$，则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$ 的大小关系是 ( )

(A) $\leqslant$　　(B) $\geqslant$　　(C) $>$　　(D) 不确定

三、解答题

1. 已知 $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$，求 $f(x+1)$ 与 $f(x^2)$。

2. 求下列函数的反函数：(1) $y = \log_2(1-x)$ $(x \geqslant 0)$；(2) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$。

3. $f(x) = a + b^{x-1}$ $(0 < b \neq 1)$ 图象过 $(1, 3)$，$f^{-1}(x+a)$ $(x > 0)$ 的图象过 $(4, 2)$，求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。

4. 如图 2-2，动点 M、N 同时从边长为 1 的正$\triangle ABC$ 的顶点 A 出发，分别以每秒 1 和 $\dfrac{2}{3}$ 的速度沿 AB 与 AC 运动，然后分别在 B 与 C 拐向 BC 线段，到相遇为止，试将 MN 的距离 s 表示为 t 的函数。

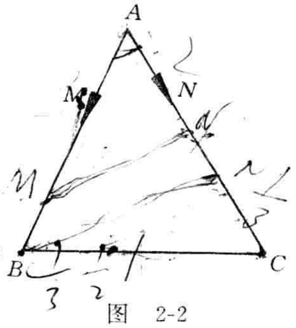

图 2-2

第 3 天　函数的定义域与值域

[**学习要点**]

1. 熟悉各种基本函数的定义域，能正确地求出简单的复合函数的定义域。

2. 熟悉直接法求值域，由定义域、单调性直接推出 y 的范围，掌握常见的求值域的方法。

[家教点窍]

1. 重点是求函数的定义域：应使分式的分母不为零；偶次根式的被开方式大于或等于零；对数的真数大于零，底数大于零且不等于 1；结合实际问题或几何问题应使之有意义；复合函数要从外到内根据函数的定义域求出 x 的范围。

2. 难点是求函数的值域，常用方法有：(1)配方法是求二次函数值域的基本方法；(2)某些函数的值域可转化为求其反函数的定义域；(3)某些无理函数的值域常用换元法来求之；(4)某些分式有理函数可化为二次方程，利用判别式来求值域；(5)某些函数的值域可用基本不等式来求出。另外，函数的图象、单调性、三角函数的有界性等也都可用于求函数的值域。

[典型例题]

例 1 选择与填空：

(1) 函数 $y=\dfrac{\log_2(3^x-9)}{|x|-3}$ 的定义域是____；$y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ 的反函数的值域是____

解 定义域：$3^x>9$ 且 $|x|\neq 3$，故为 $\{x|x>2$ 且 $x\neq 3\}$；反函数的值域即原函数的定义域，为 $\{y|y\neq 0\}$。

(2) 下列函数中，值域是 R^+ 的是

(A) $y=x^2+x+1$　　(B) $y=|\log_2 x|$

(C) $y=(x+1)^{-\frac{2}{3}}$　　(D) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

解 为(C)。(提示：不漏不缺，满足值域定义。)

(3) $y_1=\sin^2 x-3\sin x+4$ 与 $y_2=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$ 的值域分别是____

解 $y_1=\left(\sin x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$ 的值域为 $[2,8]$；$y_2=\dfrac{5}{2(x-1)^2+1}$（分母 $\geqslant 1$）的值域为 $(0,5]$。

(4) $f_1(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$ 与 $f_2(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}+3$ $(x\geqslant 1)$ 值域分别是____

解 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}+3=5$，值域为 $[5,+\infty)$。$x^2-\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x\geqslant 1$ 为增函数，最小值为 0，故值域为 $[3,+\infty)$。

(5) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(x^2)$、$f(\sin x)$、$f(x-k)+f(x+k)$ 的定义域分别是________（其中 $0<k<1/2$）。

解 $f(x^2)$：$0\leqslant x^2\leqslant 1$，定义域 $[-1,1]$；$f(\sin x)$：$0\leqslant \sin x\leqslant 1$，定义域是 $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ $(k\in Z)$；$f(x-k)+f(x+k)$：$0\leqslant x-k\leqslant 1$ 且 $0\leqslant x+k\leqslant 1$，即定义域为 $[k,1-k]$。

例 2 (1)求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}+(3x-2)^0$ 的定义域；(2)若 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 的值域是