2012年
高考备考用书

总主编◎李朝东

高考档案·止于至善

轻纶图书

解密高考

高考档案

文科数学

课标版

最全面的考点讲解
最细致的方法规律归纳
高考题和模拟题有机组合，覆盖了所有考点、各种考查方式、各种难度，在做完这些题目后，你在以后遇到的任何题目，都能在本书题目中找到它的影子。

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

解密高考

数学 GAO KAO DANG AN

高考档案

课标版（文）

总 主 编：李朝东

本册主编：南鲁景 刘国元

项目统筹：张春雷 苏军军

责任编校：彭 乾 陈双双 张继胜 刘 佳

沙晓丽 窦爱静 王春美 陈中俊

黄河出版传媒集团

宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考档案. 文科数学/李朝东主编. —银川:宁夏人民教育出版社, 2011.6

ISBN 978-7-80764-523-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第107569号

高考档案——文科数学（课标版） **李朝东 主编**

责任编辑 柳毅伟 贾姗姗
装帧设计 红骑士
责任印务 刘 丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地　　址 银川市北京东路139号出版大厦(750001)
网　　址 www.yrpubm.com
网上书店 www.hh-book.com
电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话 0951-5014294
经　　销 全国新华书店
印刷装订 南京金灿印务有限公司

开　本 880mm×1230mm 1/16　**印　张** 24　**字　数** 480千
印刷委托书号(宁)0008150　**印　数** 5000册
版　次 2011年6月第1版　**印　次** 2011年6月第1次印刷
书　号 ISBN 978-7-80764-523-8/G·1442
定　价 42.00元

高考档案 前言

高考一轮复习追求基础全面，主要针对所有知识点，夯实基础。二轮是对重点的综合性专题的突破，主要针对高考的大块考点。而如今高考复习时间趋紧，很多学校都没有时间进行系统的二轮复习。本书通过合理的专题划分、巧妙的栏目设计、精炼的方法规律讲解和总结，让学生在一轮复习的过程中即潜移默化地学习了二轮专题的内容，解决了复习时间不够的问题。

与同类品种相比，《高考档案》有三个特点：

一、在内容讲解上更加全面、细致。

二、在高考真题和模拟题的选择上注意有机的整合。相信您在用完本书后，解任一考点题目时，都能在本书中找到它的影子。

三、在答案的讲解上，力求解析详尽，突出解题思路，把每题都当做例题来分析解答。

本书框架展示

栏目设置	功能简介	目标达成
新题速递	以最快的速度呈现每个专题的最新试题风貌，对最新高考动向了如指掌。	感受最新考题 明确高考动向
高考经典	精选前4年高考试题，按照考点、考查方式、难度梯度排序，覆盖本专题所有考查题型。	题型一网打尽 高考成竹在胸
考情分析	从“考纲解读”“命题规律”“命题趋势”三个角度分析高考考情，提示课程标准内容要素及高考命题规律，科学备考，事半功倍。	确立高考目标 锁定学考水平
考点梳理	对知识性考点内容进行全面梳理回顾，完善学生的知识体系。	构建知识体系 锁定记忆要点
方法规律	对重点难点进行细致而精炼的讲解，并通过典型例题现身说法，重点分析、详细解答对应的规律和解题方法。	归纳方法规律 提升解题能力
疑难剖析	对该专题中容易混淆和可能产生错误的各个部分逐条概括列出，重点剖析。	答疑解惑 查漏补缺
模拟精华	精选最新两年模拟试题，展现最新命题风貌与趋势，并补充近年高考题的考点缺漏，将所有高考考点一网打尽。	补充高考考点 多元强化训练

高考图书有个积累的过程，尽管我们精益求精，但在细节上仍有不少需要雕琢的地方，恳请广大读者予以指正，在以后出版中，我们一定会改进。

欢迎登录：www.jing-lun.cn

编者

目录

CONTENTS

第一章 集 合

新题速递

1. (11湖南文,1)设全集 $U=M\cup N=\{1,2,3,4,5\}$,$M\cap \complement_U N=\{2,4\}$,则 $N=$ ( )

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,3,5\}$

C. $\{1,4,5\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. (11海南、宁夏文,1)已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$,$N=\{1,3,5\}$,$P=M\cap N$,则 P 的子集共有 ( )

A. 2个　B. 4个　C. 6个　D. 8个

3. (11广东文,2)已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $x+y=1\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为 ( )

A. 4　B. 3　C. 2　D. 1

4. (11湖北文,1)已知 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{2,4,5\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

A. $\{6,8\}$　　B. $\{5,7\}$

C. $\{4,6,7\}$　　D. $\{1,3,5,6,8\}$

5. (11辽宁文,1)已知集合 $A=\{x\mid x>1\}$,$B=\{x\mid -1<x<2\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{x\mid -1<x<2\}$　　B. $\{x\mid x>-1\}$

C. $\{x\mid -1<x<1\}$　　D. $\{x\mid 1<x<2\}$

6. (11陕西文,8)设集合 $M=\{y\mid y=|\cos^2 x-\sin^2 x|,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\left\{x\left|\left|\frac{x}{\mathrm{i}}\right|<1\right.,\mathrm{i}\text{ 为虚数单位},x\in\mathbf{R}\right\}$,则 $M\cap N$ 为 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(0,1]$

C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

7. (11浙江文,1)若 $P=\{x\mid x<1\}$,$Q=\{x\mid x>-1\}$,则( )

A. $P\subseteq Q$　　B. $Q\subseteq P$

C. $\complement_{\mathbf{R}}P\subseteq Q$　　D. $Q\subseteq\complement_{\mathbf{R}}P$

8. (11江西文,2)若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{2,3\}$,$N=\{1,4\}$,则集合 $\{5,6\}$ 等于 ( )

A. $M\cup N$　　B. $M\cap N$

C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$　　D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$

9. (11四川文,12)在集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任取一个偶数 a 和一个奇数 b 构成以原点为起点的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$,从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形,记所有作为平行四边形的个数为 n,其中面积等于2的平行四边形的个数为 m,则 $\frac{m}{n}=$ ( )

A. $\frac{2}{15}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\frac{4}{15}$　D. $\frac{1}{3}$

10. (11天津文,9)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-1|<2\}$,$\mathbf{Z}$ 为整数集,则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中所有元素的和等于________.

11. (11江苏,14)设集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$,$B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,x,y\in\mathbf{R}\}$.若 $A\cap B\neq\varnothing$,则实数 m 的取值范围是________.

高考经典

考点一 集合的含义与表示

1. (09陕西文,16)某班有36名同学参加数学、物理、化学课外探究小组,每名同学至多参加两个小组,已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为26,15,13,同时参加数学和物理小组的有6人,同时参加物理和化学小组的有4人,则同时参加数学和化学小组的有________人.

2. (09北京文,14)设 A 是整数集的一个非空子集,对于 $k\in A$,如果 $k-1\notin A$ 且 $k+1\notin A$,那么 k 是 A 的一个"孤立元",给定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,由 S 的3个元素构成的所有集合中,不含"孤立元"的集合共有________个.

3. (08福建文,16)设 P 是一个数集,且至少含有两个数,若对任意 $a,b\in P$,都有 $a+b,a-b,ab,\frac{a}{b}\in P$(除数 $b\neq0$),则称 P 是一个数域.例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域,有下列命题:

①数域必含有0,1两个数;

②整数集是数域;

③若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$,则数集 M 必为数域;

④数域必为无限域.

其中正确的命题的序号是________.(把你认为正确的命题序号都填上)

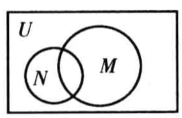
考点二 集合间的关系

4. (10天津文,7)设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid 1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是 ( )

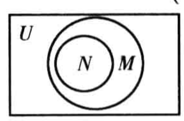
A. $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 6\}$　　B. $\{a\mid a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 4\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 6\}$　　D. $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 4\}$

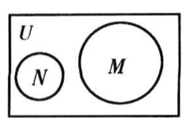
5. (09广东文,1)已知全集 $U=\mathbf{R}$,则正确表示集合 $M=\{-1,0,1\}$ 和 $N=\{x\mid x^2+x=0\}$ 关系的韦恩(Venn)图是 ( )



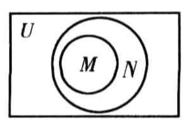
A



B



C



D

6. (10湖北文,10)记实数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中的最大数为 $\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,最小数为 $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边边长为 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$,定义它的倾斜度为 $l=\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}$,则"$l=1$"是"$\triangle ABC$ 为等边三角形"的　　(　　)

A. 充分而不必要的条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

7. (10湖南文,15)若规定 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$ 的子集 $\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}\}$ 为 E 的第 k 个子集,其中 $k=2^{i_1-1}+2^{i_2-1}+\cdots+2^{i_n-1}$,则

(1) $\{a_1,a_3\}$ 是 E 的第________个子集;

(2) E 的第211个子集是____________.

8. (09江苏,11)已知集合 $A=\{x|\log_2x\leqslant 2\}$,$B=(-\infty,a)$,若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是 $(c,+\infty)$,其中 $c=$________.

考点三　集合的运算

9. (09陕西文,4)设不等式 $x^2-x\leqslant 0$ 的解集为 M,函数 $f(x)=\ln(1-|x|)$ 的定义域为 N,则 $M\cap N$ 为　　(　　)

A. $[0,1)$　　B. $(0,1)$

C. $[0,1]$　　D. $(-1,0]$

10. (09重庆文,11)若 $U=\{n|n$ 是小于9的正整数$\}$,$A=\{n\in U|n$ 是奇数$\}$,$B=\{n\in U|n$ 是3的倍数$\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$________.

11. (09天津文,13)设全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}^*|\lg x<1\}$,若 $A\cap\complement_UB=\{m|m=2n+1,n=0,1,2,3,4\}$,则集合 $B=$____________.

考情分析

[考纲解读]

考点		考纲要求	考查角度
集合的含义与表示	1. 元素的特性 2. 元素与集合的关系 3. 集合的表示法	了解集合的含义、元素与集合的属于关系,能用自然语言、图形语言、符号语言描述集合	描述法表示集合的含义,会规范表述集合与元素的关系
集合的关系	1. 集合的包含关系、相等关系 2. 包含关系的性质	理解集合之间的包含与相等的含义,能识别给定集合的子集	根据集合关系求参数的值或范围,求子集的个数;定义型信息问题
集合的运算	1. 交集、并集、补集的含义 2. 三种集合运算的性质	理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个集合的并集与交集;理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集	集合的基本运算(求交集、并集、补集),已知集合关系确定参数范围;考查用Venn图表示集合间的关系

[命题规律]

本章在高考中常以选择题、填空题的形式出现,有时也会出现与其他知识(如函数、不等式)综合的解答题. 从高考题中可以看出,集合中的知识往往作为工具,来考查函数、三角、立体几何、解析几何,不等式等知识点,对集合的考查主要是集合之间的基本运算.

[命题趋势]

1. 从考查内容上看,集合问题仍是2012年高考的热点,在试题中一定会出现集合的问题.

2. 从考试背景上看,多与不等关系、不等式的解集、方程的根联系,有可能会加强Venn图的应用考查.

3. 从能力要求上看,对学生用集合思想解决数学问题的能力培养力度逐渐加大.

考点梳理

考点一　集合的含义与表示

1. 集合中元素的特征

确定性	作为一个集合中的元素,必须是确定的. 即一个集合一旦确定,某一个元素属于或不属于这个集合是确定的. 要么是该集合中的元素,要么不是,二者必居其一,这个特性通常被用来判断涉及的总体是否能构成集合
互异性	集合中的元素必须是互异的. 对于一个给定的集合,它的任何两个元素都是不同的. 这个特性通常被用来判断集合的表示是否正确或用来求集合中的未知元素
无序性	集合与其中元素的排列顺序无关,如 a,b,c 组成的集合与 b,c,a 组成的集合是相同的集合. 这个特性通常被用来判断两个集合的关系

2. 集合的分类:按集合中所含元素的多少可分为无限集和有限集. 特别地,我们把不含有任何元素的集合叫做空集. 记作 $\varnothing$.

3. 常用数集及其表示符号

名称	非负整数集(自然数集)	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}^+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

4. 集合与元素的相对性:如 $1\in\{1\}$,$\{1\}\in\{\{0\},\{1\}\}$,$\{1\}$ 在前者中的身份是集合,在后者中则是元素.

5. 集合的表示法:列举法,描述法,图象法.

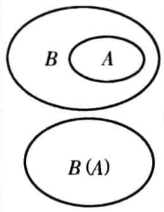
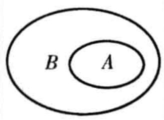
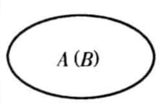
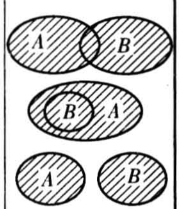
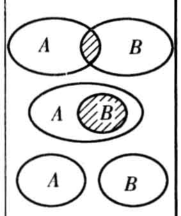
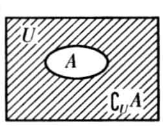
考点二 **集合与集合间的关系**

1. 集合与元素的关系

如果 a 是集合 A 的元素，可表示为 $a\in A$；

如果 a 不是集合 A 的元素，可表示为 $a\notin A$.

2. 集合与集合的关系

名称	自然语言描述	符号语言表示	Venn 图表示
子集	如果集合 A 中所有元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集	$A\subseteq B$ （或 $B\supseteq A$）	
真子集	如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $a\in B$，但 $a\notin A$，则称集合 A 是集合 B 的真子集	$A\subsetneqq B$ （或 $B\supsetneqq A$）	
集合相等	集合 A 与集合 B 中元素相同，那么就说集合 A 与集合 B 相等	$A=B$	
并集	对于两个给定集合 A、B，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$	
交集	对于两个给定集合 A、B，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	
补集	对于一个集合 A，由全集 U 中所有属于集合 U 但不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 在全集 U 中的补集，记作$\complement_U A$	$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$	

3. 子集的性质

(1)任意一个集合 A 都是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

(2)空集是任意一个集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

(3)对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

考点三 **集合的运算**

1. 运算关系

集合 A 和集合 B 的交集可表示为 $A\cap B$.

集合 A 和集合 B 的并集可表示为 $A\cup B$.

若 U 为全集，集合 A 的补集可表示为$\complement_U A$.

2. 逻辑关系

交集：$A\cap B\subseteq A$；$A\cap B\subseteq B$；$A\cap B\subseteq U$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

并集：$A\cup B\supseteq A$；$A\cup B\supseteq B$；$A\cup U=U$；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$.

补集：$\complement_U(\complement_U A)=A$；$\complement_U U=\varnothing$；$\complement_U\varnothing=U$；$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；$A\cup(\complement_U A)=U$.

考点四 **集合运算中常用的结论**

1. $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

2. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$；$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$.

3. 设有限集 A、B、C，则

(1)$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

(2)$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(C\cap A)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

4. 设有限集合 A，$\mathrm{card}(A)=n(n\in\mathbf{N}^*)$，则

(1)A 的子集个数是 2^n.

(2)A 的真子集个数是 2^n-1.

(3)A 的非空子集个数是 2^n-1.

(4)A 的非空真子集个数是 2^n-2.

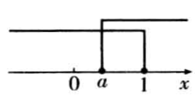
方法规律

一、集合与集合间的关系

在解决集合与集合之间关系时，要认清集合的元素，紧扣集合的意义，关键在于化简给定的集合，确定集合中的元素的特性. 对于用描述法给出的集合$\{x\mid x\in P(x)\}$，要紧扣代表元素 x 和它的特征性质 $P(x)$. 注意运用图示法即 Venn 图与数轴，通过数形结合来直观的解决问题.

例 1 已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

解析 由 $A\cup B=\mathbf{R}$，如图所示，当 $a\leqslant 1$ 时满足题意，即 a 的取值范围是$(-\infty,1]$.



答案 $(-\infty,1]$

二、集合与其他知识的综合应用

集合是中学数学中的一个重要概念,它不但与高中数学的许多知识有着广泛的联系,而且作为一种数学思想、一种数学语言、一种数学工具,集合的知识已经渗透到自然科学的众多领域.

例2 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,是否存在实数 a,使得 $A\cap C=\varnothing$ 和 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 同时成立?若存在,求出 a 值;若不存在,说明理由.

解析 根据集合的逻辑关系,转化为方程根的讨论.

答案 由已知可求得 $B=\{2,3\}$,$C=\{2,-4\}$.假设存在 a 使得 $A\cap C=\varnothing$ 且 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$,则由 $A\cap C=\varnothing$ 知,2 和 -4 都不是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根.

由 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$,知 $A\cap B\neq\varnothing$,

$\therefore x=3$ 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根,

即 $9-3a+a^2-19=0$,

解得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时,可求得 $A=\{2,3\}$,$\therefore A\cap C=\{2\}$,这与 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾,$\therefore a=5$ 舍去;

当 $a=-2$ 时,可求得 $A=\{3,-5\}$,满足 $A\cap C=\varnothing$ 和 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$.

$\therefore$ 存在 a 值,使得 $A\cap C=\varnothing$ 和 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 同时成立,此时 $a=-2$.

点评 当集合中含有参数时,常需要分类讨论,应注意讨论的分类标准.

疑难剖析

一、空集的理解及应用

例1 已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$,求 p 的取值范围.

解析 正确理解条件 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$ 是解题的关键,$A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$ 包含两层意义:其一,A 中元素不是正数;其二,A 是空集.

答案 $\because A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$,

$\therefore$ 集合 A 有以下两种情况:

①$A\neq\varnothing$,即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有两个非正数解,其充要条件是 $\begin{cases}p+2>0,\\(p+2)^2-4\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $p\geqslant 0$;

②$A=\varnothing$,即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无实数解,

$\therefore$ 判别式 $\Delta=(p+2)^2-4<0$,解得 $-4<p<0$.

综上可得,实数 p 的取值范围是 $p>-4$.

点评 空集是一个特殊的集合,是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,当题设隐含有空集参与的集合关系时,其特殊性很容易被忽视.

二、集合元素的互异性在解题中的应用

例2 设集合 $A=\{x^2,2x-1,-4\}$,$B=\{x-5,1-x,9\}$.若 $A\cap B=\{9\}$,求 $A\cup B$.

解析 首先根据集合的关系及集合中元素的互异性列出等式求得参数 x,确定集合 A、B,再求 $A\cup B$.

答案 由 $9\in A$,可得 $x^2=9$ 或 $2x-1=9$,解得 $x=\pm3$ 或 $x=5$.

当 $x=3$ 时,$A=\{9,5,-4\}$,$B=\{-2,-2,9\}$,由元素的互异性,$x=3$ 舍去;

当 $x=-3$ 时,$A=\{9,-7,-4\}$,$B=\{-8,4,9\}$,满足题意,此时 $A\cup B=\{-7,-4,-8,4,9\}$;

当 $x=5$ 时,$A=\{25,9,-4\}$,$B=\{0,-4,9\}$,此时 $A\cap B=\{-4,9\}$,这与 $A\cap B=\{9\}$ 矛盾,故 $x=5$ 舍去.

综上所述,$A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

点评 在本题中,根据元素的互异性求得参数 x 的值,一定要代入原集合中进行检验,以防出错.

模拟精华

A组

1. (上海市奉贤区2011届高三摸底测试)设全集 $U=\{a、b、c、d、e\}$,集合 $A=\{a、b\}$,$B=\{b、c、d\}$,则 $A\cap\complement_U B=$________.

2. (抚顺市重点高中协作校2010—2011学年度高三一模)设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　　B. 3

C. 4　　D. 8

3. (2011学年浙江苍南中学第一学期期中考试高三数学)集合 $A=\{-1,0\}$,$B=\{0,1\}$,$C=\{1,2\}$,则 $(A\cap B)\cup C=$ ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

4. (乐山市高中2011届高三第二次诊断性考试)设全集为 U,集合 $M=\{x|x>2\}$,$N=\{x|x^2+3x-10>0\}$,则下列关系中正确的是 ( )

A. $M=N$　　B. $N\subseteq M$

C. $M\subseteq N$　　D. $(\complement_U M)\cap N=\varnothing$

5. (山西大学附中2010—2011学年第二学期高三第一次(2月)模拟)已知集合 $M=\{y|y=2^x,x>0\}$,$N=\{x|y=\lg(2x-x^2)\}$,则 $M\cap N$ 为 ( )

A. $(1,2)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

6. (2011年安徽省"江南十校"高三联考)设集合 $P=\{3,\log_2 a\}$,$Q=\{a,b\}$,若 $P\cap Q=\{0\}$,则 $P\cup Q=$ ( )

A. $\{3,0\}$　　B. $\{3,0,1\}$

C. $\{3,0,2\}$　　D. $\{3,0,1,2\}$

7. (2010"九校"高三联考)已知集合 $A=\{0,a\}$,$B=\{b|b^2-3b<0,b\in\mathbf{Z}\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,则实数 a 的值为 ( )

A. 1 B. 2

C. 1 或 2 D. 2 或 3

B 组

8. (青岛市2011届高三3月教学质量统一检测)已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}$,$B=\{x|y=\lg(x-1)\}$,则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|x>2$ 或 $x<0\}$ B. $\{x|1<x<2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$ D. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$

9. (开封市2011届高三年级第二次质量检测)设全集 $U=\mathbf{R}$,$M=\{x||x|>2\}$,$N=\left\{x\left|\frac{x-3}{x-1}\leqslant 0\right.\right\}$,则 $(\complement_U M)\cap N=$ ( )

A. $[1,2]$ B. $(1,2]$

C. $(1,2)$ D. $[1,2)$

10. (东北师大附中2010—2011学年度上学期高三年级第三次摸底考试)已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{-x^2+3x}\}$,$N=\{x||x|>2\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{x|1<x<3\}$ B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|2<x<3\}$ D. $\{x|2<x\leqslant 3\}$

11. (黑龙江哈九中2011届高三上学期期末考试)已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$M=\{3,4,5\}$,$N=\{1,3,6\}$,则集合 $\{2,7\}$ 等于 ( )

A. $M\cap N$ B. $(\complement_U M)\cap(\complement_N)$

C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U M)$ D. $M\cup N$

12. (2011届山东省烟台市"十一五"课题调研卷)已知 $\mathbf{R}$ 是实数集,$M=\left\{x\left|\frac{2}{x}<1\right.\right\}$,$N=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$,则 $N\cap\complement_{\mathbf{R}}M=$ ( )

A. $(1,2)$ B. $[0,2]$

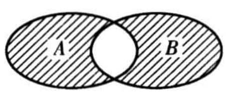
C. $\varnothing$ D. $[1,2]$

13. (2010广西南宁二中第二次模拟)已知 $S=\{1,2,\cdots,2\,010\}$,$A\subseteq S$ 且 A 中有三个元素,若 A 中的元素可构成等差数列,则这样的集合 A 共有 ( )

A. $C_{2\,010}^3$ 个 B. $A_{2\,010}^3$ 个

C. $2A_{1\,005}^2$ 个 D. $2C_{1\,005}^2$ 个

14. (2010福建省厦门三月质量检查)如图所示的韦恩图中,A、B 是非空集合,定义 $A*B$ 表示阴影部分的集合. 若 $x,y\in\mathbf{R}$,$A=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$,$B=\{y|y=3^x,x>0\}$ 则 $A*B$ 为 ( )



(第14题)

A. $\{x|0<x<2\}$

B. $\{x|1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$

D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$

15. (2011年浙江丽水高三模拟)已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$,$B=\left\{y\left|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right.\right\}$

(1)若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围;

(2)当 a 取使不等式 $x^2+1\geqslant ax$ 恒成立的 a 的最小值时,求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

16. (北京东城区2010—2011学年度高三第一学期期末教学统一检测)已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中的元素都是正整数,且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,对任意的 $x,y\in A$,且 $x\neq y$,有 $|x-y|\geqslant\frac{xy}{25}$.

(1)求证:$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n-1}{25}$;

(2)求证:$n\leqslant 9$;

(3)对于 $n=9$,试给出一个满足条件的集合 A.

第二章　函　　数

2.1　函数有关的概念

新题速递

1. (11广东文,10)设$f(x),g(x),h(x)$是$\mathbf{R}$上的任意实值函数. 如下定义两个函数$(f\circ g)(x)$和$(f\cdot g)(x)$;对任意$x\in\mathbf{R}$,$(f\circ g)(x)=f(g(x))$;$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$. 则下列等式恒成立的是　(　　)

A. $((f\circ g)\cdot h)(x)=((f\cdot h)\circ(g\cdot h))(x)$

B. $((f\cdot g)\circ h)(x)=((f\circ h)\cdot(g\circ h))(x)$

C. $((f\circ g)\circ h)(x)=((f\circ h)\circ(g\circ h))(x)$

D. $((f\cdot g)\cdot h)(x)=((f\cdot h)\cdot(g\cdot h))(x)$

2. (11湖南文,8)已知函数$f(x)=e^x-1,g(x)=-x^2+4x-3$,若有$f(a)=g(b)$,则$b$的取值范围为　(　　)

A. $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$　　B. $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

C. $[1,3]$　　D. $(1,3)$

3. (11山东文,16)函数$f(x)$的定义域为A,若$x_1,x_2\in A$,且$f(x_1)=f(x_2)$时总有$x_1=x_2$,则称$f(x)$为单函数. 例如$f(x)=2x+1(x\in\mathbf{R})$是单函数,下列命题:

①函数$f(x)^2=x^2(x\in\mathbf{R})$是单函数;

②函数$f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$是单函数;

③若$f(x)$为单函数,$x_1,x_2\in A$且$x_1\neq x_2$,则$f(x_1)\neq f(x_2)$;

④在定义域上具有单调性的函数一定是单函数.

其中的真命题是________(写出所有真命题的编号).

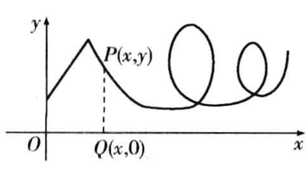
4. (11安徽文,13)函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$的定义域是________.

5. (11浙江文,11)设函数$f(x)=\dfrac{4}{1+x}$,若$f(a)=2$,则实数a=________

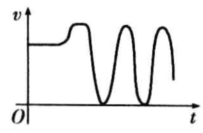
高考经典

考点一　函数的基本概念

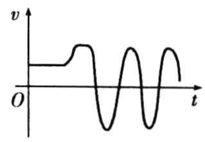
1. (09江西文,11)如图所示,一质点$P(x,y)$在xOy平面上沿曲线运动,速度大小不变,其在x轴上的投影点$Q(x,0)$的运动速度$v=v(t)$的图象大致为　(　　)



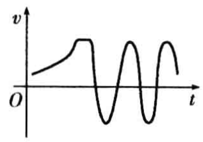
(第1题)



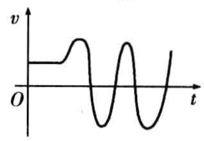
A



B



C

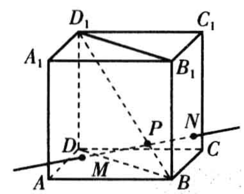


D

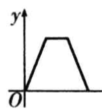
2. (10江西文,8)若函数$y=\dfrac{ax}{1+x}$的图象关于直线$y=x$对称,则a为　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 任意实数

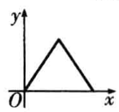
3. (08北京文,8)如图,动点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上. 过点P作垂直于平面BB_1D_1D的直线,与正方体表面相交于M,N. 设$BP=x,MN=y$,则函数$y=f(x)$的图象大致是　(　　)



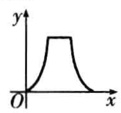
(第3题)



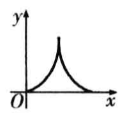
A



B

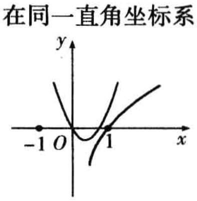


C

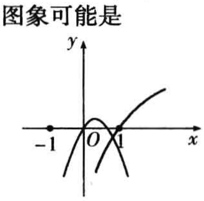


D

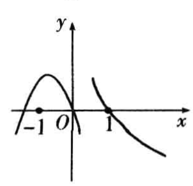
4. (10湖南文,8)函数$y=ax^2+bx$与$y=\log_{\left|\frac{b}{a}\right|}x(ab\neq0,|a|\neq|b|)$在同一直角坐标系中的图象可能是　(　　)



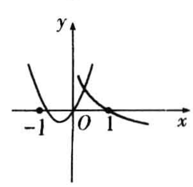
A



B



C



D

考点二 函数的定义域

5. (09江西文,2)函数 $y=\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域为( )

A. $[-4,1]$　　B. $[-4,0)$
C. $(0,1]$　　D. $[-4,0)\cup(0,1]$

6. (09湖北文,2)函数 $y=\frac{1-2x}{1+2x}\left(x\in\mathbf{R},且x\neq-\frac{1}{2}\right)$ 的反函数是 ( )

A. $y=\frac{1+2x}{1-2x}\left(x\in\mathbf{R},且x\neq\frac{1}{2}\right)$

B. $y=\frac{1-2x}{1+2x}\left(x\in\mathbf{R},且x\neq-\frac{1}{2}\right)$

C. $y=\frac{1+x}{2(1-x)}(x\in\mathbf{R},且x\neq1)$

D. $y=\frac{1-x}{2(1+x)}(x\in\mathbf{R},且x\neq-1)$

7. (08湖北文,1)函数 $f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$ 的定义域为 ( )

A. $(-\infty,-4)\cup[2,+\infty)$
B. $(-4,0)\cup(0,1)$
C. $[-4,0)\cup(0,1]$
D. $[-4,0)\cup(0,1)$

8. (08江西文,3)若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$,则函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是 ( )

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$
C. $[0,1)\cup(1,4]$　　D. $(0,1)$

考点三 函数的值域

9. (09海南、宁夏文,12)用 $\min\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 三个数中的最小值,设 $f(x)=\min\{2^x,x+2,10-x\}(x\geqslant0)$,则 $f(x)$ 的最大值为 ( )

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

10. (08广东文,9)设 $a\in\mathbf{R}$,若函数 $y=e^x+ax,x\in\mathbf{R}$,有大于零的极值点,则 ( )

A. $a<-1$　　B. $a>-1$
C. $a<-\frac{1}{e}$　　D. $a>-\frac{1}{e}$

11. (07浙江文,11)函数 $y=\frac{x^2}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域是________.

12. (09江苏,20)设 a 为实数,函数 $f(x)=2x^2+(x-a)\cdot|x-a|$.

(1)若 $f(0)\geqslant1$,求 a 的取值范围;
(2)求 $f(x)$ 的最小值;
(3)设函数 $h(x)=f(x),x\in(a,+\infty)$,直接写出(不需给出演算步骤)不等式 $h(x)\geqslant1$ 的解集.

考情分析

[考纲解读]

考点		考纲要求	考查角度
函数的基本概念	1. 函数的定义及三要素 2. 函数的表示方法 3. 映射的含义	了解函数的含义及要素,了解映射的概念,会根据不同的需要选择恰当的方法表示函数,了解分段函数并会简单应用	求分段函数或复合函数的函数值;判断两个函数是否为同一函数;求函数的解析式
函数的定义域	求函数定义域;求复合函数的定义域	会求一些简单函数的定义域	求函数的定义域;在求解析式或研究函数性质时注意定义域
函数的值域	求函数的值域	会求一些简单函数的值域	求函数的值域;已知值域确定参数的值;数形结合思想

[命题规律]

在高考中,主要考查映射、函数的定义域、分段函数的解析式和求函数值,属容易题. 其中求解析式和定义域具有综合性,有时渗透在解答题中,尤其是在大题中,近几年对函数概念的理解的考查也在加强,以选择题、填空题考查基本技能为主.

[命题趋势]

预计在2012年高考中,命题仍集中在理解函数的概念,会求一些简单函数的定义域,而且经常与其他知识结合起来考查,如解不等式、利用解析式求值等. 题型多数以选择题或填空题形式出现.

考点梳理

考点一 函数与映射的基本概念

1. 函数的基本概念

(1)函数的定义

设 A、B 是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作 $y=f(x)(x\in A)$.

(2)函数的定义域、值域

在函数 $y=f(x),x\in A$ 中,x 叫做自变量,x 的取值范围 A 叫做函数的定义域;与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域. 显然,值域是集合 B 的子集.

(3)函数的三要素:定义域、值域和对应关系.

(4)相等函数:如果两个函数的定义域和对应关系完全一致,则这两个函数相等,这是判断两个函数相等的依据.

2. 函数的表示法

表示函数的常用方法有：解析法、图象法、列表法.

3. 映射的概念

设 A、B 两个非空集合，如果按照某种对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射.

4. 由映射的定义可以看出，映射是函数概念的推广，函数是一种特殊的映射，要注意构成函数的两个集合 A、B 必须是非空数集.

考点二　函数的定义域

1. 已知函数解析式，求定义域

(1)分式的分母不为0.

(2)偶次根式的被开方数大于或等于0.

(3)对数的真数大于0，指数或对数的底数大于0且不为1.

(4)零次幂的底数不为0.

(5)三角函数中的正切函数 $y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(6)实际问题中除要考虑函数解析式有意义外，还应考虑实际问题本身的要求.

2. 求复合函数的定义域

$f(g(x))$ 的定义域是指表达式中 x 的取值集合.

(1)已知 $f(x)$ 的定义域为 D，求 $f(g(x))$ 的定义域，只需令 $g(x)\in D$，解得 x 的集合即为所求.

(2)已知 $f(g(x))$ 的定义域为 D，求 $f(x)$ 的定义域，只需要求 $g(x)$ 在 $x\in D$ 上的值域.

考点三　函数的值域

1. 观察法：如 $y=\frac{1}{2x^2+1}$ 的值域可以从 x^2 入手去求. 由 $x^2\geqslant 0$ 得 $2x^2+1\geqslant 1$，函数的值域为 $(0,1]$.

2. 图象法：基本初等函数，或由其经简单变换所得函数，或用导数研究极值点及单调区间后，可通过画示意图、截取、观察得值域，这是值域中的重点内容.

3. 配方法与判别式法：

(1)判别式法：若函数 $y=f(x)$ 可以化为一个系数含有 y 的二次方程 $a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$，则在 $a(y)\neq 0$ 时，若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\Delta\geqslant 0$，从而确定函数的最值，并检验 $a(y)=0$ 时对应的 x 的值是否在函数定义域内，以决定 $a(y)=0$ 时 y 的值的取舍.

(2)配方法：形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的函数，根据二次函数的极值点或边界点的取值确定函数的最值.

如求函数 $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}$ 的值域.

解法一：配方法.

$y=1-\frac{1}{x^2-x+1}$.

又 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，

$\therefore 0<\frac{1}{x^2-x+1}\leqslant\frac{4}{3}$，$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant y<1$.

解法二：判别式法.

由 $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}, x\in\mathbf{R}$，得 $(y-1)x^2+(1-y)x+y=0$.

当 $y=1$ 时，$x\in\varnothing$；

当 $y\neq 1$ 时，$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore \Delta=(1-y)^2-4y(y-1)\geqslant 0$，

$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant y<1$，

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right)$.

4. 函数的单调性法

确定函数在定义域(或某个定义域的子集)上的单调性求出函数的值域，例如，$f(x)=ax+\frac{b}{x}(a>0,b>0)$. 当利用均值不等式法等号不能成立时，可考虑利用函数的单调性解题.

5. 利用函数的有界性：形如 $\sin\alpha=f(\alpha)$，$x^2=g(x)$，因为 $|\sin\alpha|\leqslant 1$，$x^2\geqslant 0$ 可解出 $f(\alpha)$、$g(x)$ 范围，从而求出其值域或最值.

6. 换元法化归为基本函数的值域

(1)代数换元. 形如 $y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$(a,b,c,d 为常数，$ac\neq 0$)，可设 $\sqrt{cx+d}=t(t\geqslant 0)$，转化为二次函数求值域.

(2)三角换元：如 $y=x+\sqrt{1-x^2}$，可令 $x=\cos\theta, \theta\in[0,\pi]$，$\therefore y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \theta\in[0,\pi]$.

7. 均值不等式法：利用均值不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$($a,b>0$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立).

(1)需同时满足"一正、二定、三相等"的条件.

(2)熟悉常见变形：$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$；$a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$.

(3)若等号取不到，可考虑函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的单调区间.

8. 分离常数法：形如 $y=\frac{cx-d}{ax-b}(a\neq 0)$ 的函数的值域，可使用"分离常数法"求解.

9. 数形结合法

如果所给函数有较明显的几何意义，可借助几何法求函数的值域，如由 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 可联想 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 两点连线的斜率.

10. 导数法：如求 $y=x^3+2x^2-x, x\in[1,2]$ 的值域可先使用导数法求其单调区间，再求值域.

考点四　函数解析式

1. 已知函数类型时，可用待定系数法，列出方程组，确定其中的系数即可.

2. 换元法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题，往往先

设 $h(x)=t$,从中解出 x,代入 $g(x)$ 进行换元求解,也可将 $g(x)$ 拼凑成 $h(x)$ 的形式求解.

3. 构造法:当方程中同时出现 $f(x)$,$f(-x)$,或同时出现 $f(x)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$ 时,可构造另一个方程,解方程组求解.

4. 赋值法:对于抽象函数求解析式,可采用赋值法,如 $f(x+z)=f(x)+f(z)-2x$.

5. 实际问题:引入合适的变量,找出函数关系式,此时要注意变量的选取要有利于构造函数关系式.还应注意自变量的取值范围,明确解析式及定义域才能确定函数.

方法规律

一、函数定义域的求法

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt{x^2-1}$;

(2) $y=\dfrac{(\sqrt{x^2}-1)^0}{\log_{(2x+1)}(32-4^x)}$.

答案 (1)要使函数有意义,只需 $\begin{cases}2-|x|\neq 0,\\ x^2-1\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\neq \pm 2,\\ x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1.\end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)要使函数有意义,只需 $\begin{cases}\sqrt{x^2}-1\neq 0,\\ 2x+1>0 \text{ 且 } 2x+1\neq 1,\\ 32-4^x>0,\\ 32-4^x\neq 1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\neq \pm 1,\\ x>-\dfrac{1}{2} \text{ 且 } x\neq 0,\\ x<\dfrac{5}{2},\\ x\neq \log_4 31.\end{cases}$

即 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}$,且 $x\neq 0,1,\log_4 31$.

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2},\text{且 } x\neq 0,1,\log_4 31\right\}$

点评 若 $f(x)$ 是由有限个基本初等函数的四则运算合成的函数时,则它的定义域一般是各个基本初等函数定义域的交集.

例 2 (1)已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$,求函数 $f(x+1)$ 及 $f(x^2)$ 的定义域;

(2)已知 $f(x^2-3)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-6}$,求 $f(x)$ 的定义域.

答案 (1)依题意,$0\leqslant x+1<1$,$\therefore -1\leqslant x<0$,

$\therefore f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,0)$.

由 $0\leqslant x^2<1$ 得 $-1<x<1$,$\therefore f(x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

(2)令 $u=x^2-3$,则 $f(x)$ 的定义域就是 u 的值域.

要使 $\lg\dfrac{x^2}{x^2-6}$ 有意义,只需 $x^2>6$,

即 $x^2-3>3$,$\therefore u>3$,

即 $f(x)$ 的定义域是 $(3,+\infty)$.

二、求函数解析式的常用方法

例 3 (1)如果 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x^2}$,则 $f(x)=$ ________;

(2)如果 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$,则 $f(x+1)=$ ________;

(3)如果 $f(f(x))=2x-1$,则一次函数 $f(x)=$ ________;

(4)已知 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x(x\neq 0)$,则 $f(x)=$ ________.

解析 (1) $\because f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}$,

$\therefore f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}(x\neq 0,\pm 1)$.

(2) $\because f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2-2+\dfrac{1}{x^2}\right)+4=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$,

$\therefore f(x)=x^2+4$,

$\therefore f(x+1)=(x+1)^2+4=x^2+2x+5$.

(3) $\because f(x)$ 为一次函数.设 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$,

$\therefore f(f(x))=f(kx+b)=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=2x-1$.

比较系数得 $\begin{cases}k^2=2,\\ kb+b=-1,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}k=\sqrt{2},\\ b=1-\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\sqrt{2},\\ b=1+\sqrt{2}.\end{cases}$

$\therefore f(x)=\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}$ 或 $f(x)=-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$.

(4) $\because f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$,将原式中的 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 互换得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{1}{x}$.

于是得关于 $f(x)$ 的方程组:

$\begin{cases}f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x,\\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{1}{x},\end{cases}$

解得 $f(x)=\dfrac{2}{3x}-\dfrac{x}{3}(x\neq 0)$.

答案 (1) $\dfrac{x}{x^2-1}(x\neq 0,\pm 1)$

(2) x^2+2x+5

(3) $\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{x}{3}(x\neq 0)$

三、求函数值域的方法

例4 求下列函数的值域.

(1)$y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$;

(2)$y=2x+\sqrt{1-2x}$;

(3)$y=x+\sqrt{1-x^2}$.

答案 (1)(配方法)由$3+2x-x^2\geqslant0$,得$-1\leqslant x\leqslant3$.

$\because y=4-\sqrt{-(x-1)^2+4}$,

$\therefore$ 当$x=1$时,$y_{\min}=2$;

当$x=-1$或3时,$y_{\max}=4$.

$\therefore$ 函数的值域为$[2,4]$.

(2)(换元法)令$t=\sqrt{1-2x}(t\geqslant0)$,则$x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

$\because y=-t^2+t+1=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$,

$\therefore$ 当$t=\dfrac{1}{2}$,即$x=\dfrac{3}{8}$时,$y_{\max}=\dfrac{5}{4}$,无最小值.

$\therefore$ 函数的值域为$\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$.

(3)(三角代换法)函数的定义域是$\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$.

设$x=\sin t$,$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则$y=x+\sqrt{1-x^2}$化为$y=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\because -\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore -\dfrac{\pi}{4}\leqslant t+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$,

$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,$\therefore -1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$,

$\therefore$ 函数的值域是$[-1,\sqrt{2}]$.

例5 求下列函数的值域.

(1)$y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2x+10}$;

(2)$y=\dfrac{4\sin x+1}{2\cos x-4}$;

(3)$y=4x-1+\sqrt{2x-3}$.

答案 (1)(几何法)解析式可化为

$y=\sqrt{(x-0)^2+[0-(-2)]^2}+\sqrt{[x-(-1)]^2+(0-3)^2}$,

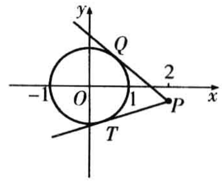
表示x轴上的点$P(x,0)$到两定点$A(0,-2)$,$B(-1,3)$的距离之和.

则有$y\geqslant|AB|=\sqrt{(-1-0)^2+[3-(-2)]^2}=\sqrt{26}$,即$y\geqslant\sqrt{26}$.

$\therefore$ 函数的值域为$[\sqrt{26},+\infty)$.

(2)(图象法)$y=\dfrac{4\left(\sin x+\dfrac{1}{4}\right)}{2(\cos x-2)}=2\cdot\dfrac{\sin x-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{\cos x-2}$,

上式可看作单位圆外一点$P\left(2,-\dfrac{1}{4}\right)$与圆$x^2+y^2=1$的点$(\cos x,\sin x)$所连线段的斜率的2倍. 由图可知$2k_{PQ}\leqslant y\leqslant2k_{PT}$.



设过P点的直线方程为$y+\dfrac{1}{4}=k(x-2)$,

即$kx-y-2k-\dfrac{1}{4}=0$,令$\dfrac{\left|2k+\dfrac{1}{4}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=1$.

解得$k_1=-\dfrac{3}{4}$,$k_2=\dfrac{5}{12}$,$\therefore -\dfrac{3}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{5}{6}$,

$\therefore$ 函数的值域为$\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{6}\right]$.

(3)(单调性法)$f_1(x)=4x-1$,$f_2(x)=\sqrt{2x-3}$为增函数,

$\therefore f(x)=f_1(x)+f_2(x)$在定义域$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增.

$\therefore y\geqslant f\left(\dfrac{3}{2}\right)=5$,因此函数的值域为$[5,+\infty)$.

疑难剖析

关于函数定义域问题

例1 (1)已知实数$a\in[-1,1]$,且函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(a-4)x+4-2a}}$恒为正,求$f(x)$的定义域;

(2)已知实数$a\in[-1,1]$,试求函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(a-4)x+4-2a}}$的定义域.

答案 (1)设$g(a)=x^2+(a-4)x+4-2a=(x-2)a+x^2-4x+4$.

$\because$ 当$a\in[-1,1]$时,$g(a)>0$恒成立,

$\therefore \begin{cases}g(-1)>0,\\g(1)>0,\end{cases}$ 解得$x<1$或$x>3$.

$\therefore f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

(2)由$x^2+(a-4)x+4-2a>0$得

$(x-2)[x-(2-a)]>0$,

①当$-1\leqslant a\leqslant0$时,$2-a\geqslant2$,则

$x\in(-\infty,2)\cup(2-a,+\infty)$,

函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,2)\cup(2-a,+\infty)$;

②当$0<a\leqslant1$时,$2-a<2$,则

$x\in(-\infty,2-a)\cup(2,+\infty)$,

函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,2-a)\cup(2,+\infty)$.

点评 对这两个小题,在解题时容易混淆,认为问题的结果是相同的. 事实上,问题(1)是对$a\in[-1,1]$不等式$f(x)>0$恒成立,求x的取值范围;问题(2)是含参数的$f(x)$的定义域与参数a的取值是相关的,a每取一个值,对应着一个$f(x)$,也就对应该函数的一个定义域.

例 2 已知$f(x)=\log_3 x, x\in[1,9]$,求函数$y=f(x^2)+f^2(x)$的值域.

答案 由$\begin{cases}1\leqslant x^2\leqslant 9,\\1\leqslant x\leqslant 9,\end{cases}$

得$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3 \text{ 或 } -3\leqslant x\leqslant -1,\\1\leqslant x\leqslant 9,\end{cases}$

即$1\leqslant x\leqslant 3$.

$\therefore y=\log_3 x^2+\log_3^2 x=\log_3^2 x+2\log_3 x, 1\leqslant x\leqslant 3$.

令$t=\log_3 x\in[0,1]$,

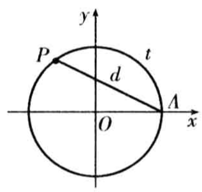
$\therefore y=g(t)=t^2+2t=(t+1)^2-1, t\in[0,1]$,此时函数单调递增,$\therefore y\in[0,3]$.即函数的值域为$[0,3]$.

点评 在解题中,容易忽视了复合函数$f(x)$的定义域,误认为函数$y=f(x^2)+f^2(x)$的定义域是$f(x)$的定义域,而导致出错,在解题中,应注意隐含条件的挖掘与应用,避免错误的发生.

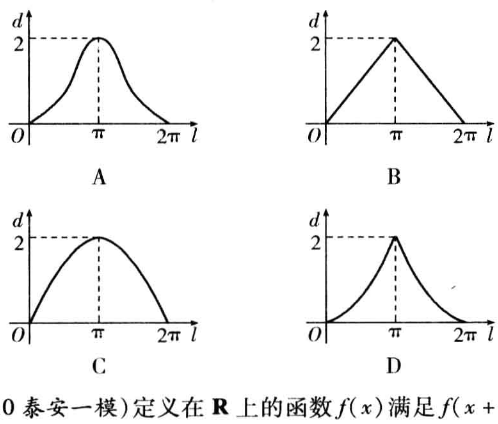
模拟精华

A组

1. (广东华南师大附中2010—2011学年高三综合测试)如图,设点A是单位圆上的一定点,动点P从点A出发在圆上按逆时针方向旋转一周,点P所旋转过的弧AP的长为l,弦AP的长为d,则函数$d=f(l)$的图像大致是 ( )



(第1题)



2. (2010泰安一模)定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in\mathbf{R})$,$f(1)=2$,则$f(-2)$等于 ( )

A. 2　B. 3　C. 6　D. 9

3. (2011学年苍南中学第一学期期中考试高三数学)已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x & (x>0),\\3^x & (x\leqslant 0),\end{cases}$则$f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$的值为 ( )

A. 9　B. $\frac{1}{9}$　C. -9　D. $-\frac{1}{9}$

4. (2010冀州中学第一次模拟)已知函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4^x-2^{x+1}+1)$的值域是$[0,+\infty)$,则它的定义域可以是( )

A. $(0,1]$　B. $(0,1)$

C. $(-\infty,1]$　D. $(-\infty,0]$

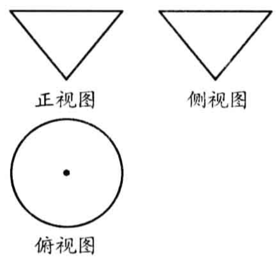
5. (2010石家庄三月质量检测)设函数$f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$,$[m]$表示不超过实数m的最大整数,则函数$g(x)=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]+\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]$的值域为________.

B组

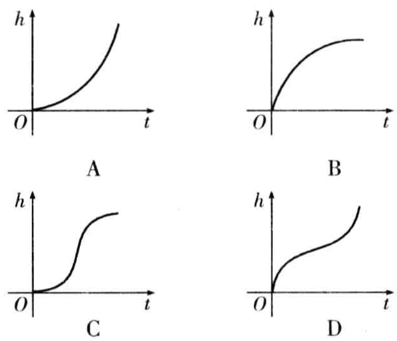
6. (2010江西十所重点中学第一次模拟)已知函数$y=2\sin x$的定义域为$[a,b]$,值域为$[-2,1]$,则$b-a$的值不可能是 ( )

A. $\frac{5\pi}{6}$　B. π　C. $\frac{7\pi}{6}$　D. 2π

7. (宁夏银川一中2011届高三第五次月考)如图所示是某一容器的三视图,现向容器中匀速注水,容器中水面的高度h随时间t变化的可能图象是 ( )



(第7题)



8. (2010—2011年北京东直门中学高三数学提高测试一)函数$y=\begin{cases}3^x, & x\in(-\infty,-1),\\\log_2 x, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$的值域为 ( )

A. $(0,3)$　B. $[0,3]$

C. $(-\infty,3]$　D. $[0,+\infty)$

9. (北京东城区2010—2011学年度高三第一学期期末教学统一检测)已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,若存在常数$m>0$,对任意$x\in\mathbf{R}$,有$|f(x)|\leqslant m|x|$,则称$f(x)$为F函数,给出下列函数:①$f(x)=x^2$;②$f(x)=\sin x+\cos x$;③$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$;④$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,且满足对一切实数x_1,x_2均有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|$.其中是$F$函