



高等数学 竞赛题 解析教程 (2012)

**GAODENGSHUXUE JINGSAITI
JIEXI JIAOCHENG (2012)**

南京大学金陵学院 陈 仲 主编



东南大学 出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学竞赛题解析教程(2012)

主编：陈 仲

编者：陈 仲 张玉莲 林小围

王夕予 王 培

东南大学出版社

• 南京 •

内 容 简 介

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含“基本概念与内容提要”、“竞赛题与精选题解析”与“练习题”三个部分。其中,竞赛题选自江苏省(1—10届)、北京市(1—15届)、浙江省(1—7届)、广东省、陕西省、上海市、天津市等省市大学生高等数学竞赛试题;清华大学、南京大学、上海交通大学等高校大学数学竞赛试题;莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。

高等数学竞赛能激发大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思维。高等数学竞赛试题中既含基本题,又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题,这些题目构思绝妙,方法灵活,技巧性强,本书逐条进行解析,并对重要题目深入分析,总结解题方法与技巧。

本书可供准备高等数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛题解析教程:2012/陈仲主编. —南京:东南大学出版社,2012.4

ISBN 978-7-5641-3098-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 238749 号

出版发行:东南大学出版社

社 址:南京四牌楼 2 号(邮编:210096)

出 版 人:江建中

经 销:全国各地新华书店

印 刷:南京京新印刷厂

开 本:700mm×1000mm 1/16

印 张:22.5

字 数:441 千字

版 次:2012 年 1 月第 1 版

印 次:2012 年 4 月第 2 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5641-3098-5

定 价:36.00 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与读者服务部联系。电话(传真):025-83792328

前 言

高等数学(或称大学数学)是一年级大学生的基础课程,江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会从1991年以来,已成功组织了十届全省性的大学生高等数学竞赛。参赛学校有全省普通高等学校、各重点高校的二级学院、各类职业技术学院、师范学院、地方工学院、职业大学、高等专科学校等共70多所,考生近万人,参赛类别分为本科一级、本科二级、本科三级、民办本科、专科等五类。

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于本科要注重素质教育的指示,加强普通高校的数学教学工作,推动高等数学的教学改革,提高教学质量。高等数学竞赛能激励大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思想,它要求学生比较系统地理解高等数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间抽象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含“基本概念与内容提要”、“竞赛题与精选题解析”与“练习题”三个部分。其中,竞赛题选自江苏省(1—10届)、北京市(1—15届)、浙江省(1—7届)、广东省、陕西省、上海市、天津市等省市大学生高等数学竞赛试题;清华大学、南京大学、上海交通大学、西安交通大学、天津大学、北京邮电大学等高校大学数学竞赛试题;莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。这些试题中既含基本题,又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题,它们构思绝妙,方法灵活,技巧性强,本书逐条解析,并对重要题目深入分析,总结解题方法与技巧。还有些“好题”在竞赛中没有出现过,为此本书在每个专题中都增加了不少“精选题”,大大增加了本书的内涵。

本书前身《高等数学竞赛题解析教程》一书在2010年初问世,受到广大教师 and 学生的认可和赞许。此次对前书的修订,重点是“竞赛题与精选题解析”部分,删去了不少旧题,增加了近三分之一的新题。本次修订还吸收了重点高校的几个青年教师参加,其中张玉莲负责专题1,2,8,林小围、王培负责专题3,4,6,王夕予负责专题5,7,最后由主编陈仲审定。

本书可供准备数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提高高

等效学水平。

本书在编写过程中,得到南京大学姚天行教授、东南大学黄骏教授、扬州大学刘金林教授、江南大学曹菊生教授、南通大学郭跃华教授、江苏大学李医民教授等的支持、关怀和帮助,最终出版得到南京大学金陵学院院长领导、金陵学院教务处和东南大学出版社的大力支持,编者谨此一并表示衷心的感谢。

书中错误难免,敬请智者不吝赐教。

陈 仲

2011 年 10 月于南京大学浦苑

目 录

专题 1 极限与连续	1
1.1 基本概念与内容提要	1
1. 一元函数基本概念	1
2. 数列的极限	1
3. 函数的极限	1
4. 证明数列或函数极限存在的方法	2
5. 无穷小量	2
6. 无穷大量	3
7. 求数列或函数的极限的方法	3
8. 函数的连续性	4
1.2 竞赛题与精选题解析	5
1. 求函数的表达式(例 1.1—1.4)	5
2. 利用四则运算求极限(例 1.5—1.18)	7
3. 利用夹逼准则与单调有界准则求极限(例 1.19—1.28)	13
4. 利用两个重要极限求极限(例 1.29—1.32)	18
5. 利用等价无穷小因子代换求极限(例 1.33—1.38)	19
6. 无穷小比较与无穷大比较(例 1.39—1.42)	21
7. 连续性与间断点(例 1.43—1.49)	22
8. 利用介值定理的证明题(例 1.50—1.54)	25
练习题一	28
专题 2 一元函数微分学	30
2.1 基本概念与内容提要	30
1. 导数的定义	30
2. 左、右导数的定义	30
3. 微分概念	30
4. 基本初等函数的导数公式	31
5. 求导法则	31
6. 高阶导数	32

7. 微分中值定理	32
8. 泰勒公式与马克劳林公式	32
9. 洛必达法则	33
10. 导数在几何上的应用	34
2.2 竞赛题与精选题解析	35
1. 利用导数的定义解题(例 2.1—2.7)	35
2. 利用求导法则解题(例 2.8—2.15)	39
3. 求高阶导数(例 2.16—2.29)	42
4. 与微分中值定理有关的证明题(例 2.30—2.49)	48
5. 马克劳林公式与泰勒公式的应用(例 2.50—2.70)	60
6. 利用洛必达法则求极限(例 2.71—2.81)	74
7. 导数在几何上的应用(例 2.82—2.101)	78
8. 不等式的证明(例 2.102—2.114)	88
练习题二	96
专题3 一元函数积分学	99
3.1 基本概念与内容提要	99
1. 不定积分基本概念	99
2. 基本积分公式	99
3. 不定积分的计算	100
4. 定积分基本概念	101
5. 定积分中值定理	101
6. 变限的定积分	102
7. 定积分的计算	102
8. 奇偶函数与周期函数定积分的性质	102
9. 定积分在几何与物理上的应用	103
10. 广义积分	104
3.2 竞赛题与精选题解析	105
1. 求原函数(例 3.1—3.4)	105
2. 求不定积分(例 3.5—3.21)	107
3. 利用定积分的定义求极限(例 3.22—3.28)	113
4. 应用积分中值定理解题(例 3.29—3.34)	116
5. 变限的定积分的应用(例 3.35—3.50)	119
6. 定积分的计算(例 3.51—3.71)	128
7. 定积分在几何与物理上的应用(例 3.72—3.83)	136

8. 积分不等式的证明(例 3.84—3.112)	144
9. 积分等式的证明(例 3.113—3.115)	163
10. 广义积分(例 3.116—3.125)	166
练习题三	172
专题 4 多元函数微分学	175
4.1 基本概念与内容提要	175
1. 二元函数的极限与连续性	175
2. 偏导数与全微分	175
3. 多元复合函数与隐函数的偏导数	177
4. 高阶偏导数	178
5. 二元函数的极值	178
6. 条件极值	178
7. 多元函数的最值	180
4.2 竞赛题与精选题解析	180
1. 求二元函数的极限(例 4.1—4.2)	180
2. 二元函数的连续性、可偏导性与可微性(例 4.3—4.9)	181
3. 求多元复合函数与隐函数的偏导数(例 4.10—4.20)	184
4. 求高阶偏导数(例 4.21—4.30)	189
5. 求二元函数的极值(例 4.31—4.35)	195
6. 求条件极值(例 4.36—4.39)	199
7. 求多元函数在有界闭域上的最值(例 4.40—4.41)	201
练习题四	202
专题 5 多元函数积分学	205
5.1 基本概念与内容提要	205
1. 二重积分基本概念	205
2. 二重积分的计算	206
3. 交换二次积分的次序	207
4. 三重积分基本概念与计算	207
5. 重积分的应用	209
6. 曲线积分基本概念与计算	209
7. 格林公式	211
8. 曲面积分基本概念与计算	212
9. 斯托克斯公式	215

10. 高斯公式	215
5.2 竞赛题与精选题解析	216
1. 二重积分的计算(例 5.1—5.16)	216
2. 交换二次积分的次序(例 5.17—5.27)	223
3. 三重积分的计算(例 5.28—5.32)	229
4. 与重积分有关的不等式的证明(例 5.33—5.39)	232
5. 曲线积分的计算(例 5.40—5.43)	237
6. 应用格林公式解题(例 5.44—5.54)	238
7. 曲面积分的计算(例 5.55—5.57)	246
8. 应用斯托克斯公式解题(例 5.58—5.60)	248
9. 应用高斯公式解题(例 5.61—5.66)	250
10. 多元函数积分学的应用题(例 5.67—5.76)	255
练习题五	260
专题 6 空间解析几何	264
6.1 基本概念与内容提要	264
1. 向量的基本概念与向量的运算	264
2. 空间的平面	265
3. 空间的直线	265
4. 空间的曲面	266
5. 空间的曲线	267
6.2 竞赛题与精选题解析	268
1. 向量的运算(例 6.1—6.5)	268
2. 空间平面的方程(例 6.6—6.9)	270
3. 空间直线的方程(例 6.10—6.15)	271
4. 空间曲面的方程与空间曲面的切平面(例 6.16—6.27)	273
5. 空间曲线的方程与空间曲线的切线(例 6.28—6.32)	279
练习题六	283
专题 7 级数	285
7.1 基本概念与内容提要	285
1. 数项级数的主要性质	285
2. 正项级数敛散性判别法	285
3. 任意项级数敛散性判别法	286
4. 幂级数的收敛半径、收敛域与和函数	286

5. 初等函数关于 x 的幂级数展开式	287
6. 傅氏级数	287
7.2 竞赛题与精选题解析	288
1. 判别正项级数的敛散性(例 7.1—7.14)	288
2. 判别任意项级数的敛散性(例 7.15—7.26)	296
3. 求幂级数的收敛域与和函数(例 7.27—7.44)	302
4. 求数项级数的和(例 7.45—7.51)	314
5. 求初等函数关于 x 的幂级数展开式(例 7.52—7.58)	318
6. 求函数的傅氏级数展开式(例 7.59)	321
练习题七	322
专题 8 微分方程	324
8.1 基本概念与内容提要	324
1. 微分方程的基本概念	324
2. 一阶微分方程	324
3. 二阶微分方程	325
4. 微分方程的应用	327
8.2 竞赛题与精选题解析	327
1. 微分方程的特解(例 8.1—8.3)	327
2. 变量可分离方程的应用题(例 8.4—8.8)	328
3. 齐次微分方程的应用题(例 8.9)	332
4. 一阶线性微分方程的应用题(例 8.10—8.13)	333
5. 求解二阶线性微分方程(例 8.14—8.21)	335
6. 求解可化为二阶线性微分方程的微分方程(例 8.22—8.23)	339
练习题八	341
练习题答案与提示	343

专题1 极限与连续

1.1 基本概念与内容提要

1. 一元函数基本概念

- 1) 利用已知条件求函数的表达式.
- 2) 函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性.
- 3) 基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数)和初等函数.
- 4) 反函数、复合函数、参数式函数、隐函数.
- 5) 分段函数.

2. 数列的极限

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

- 2) 收敛数列的性质

定理 1(惟一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 则其极限 A 是惟一的.

定理 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

定理 3(保向性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0 (< 0)$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$x_n > 0 \quad (< 0)$$

3. 函数的极限

- 1) 六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

例如 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0$, 当 $0 < |x - a| < \sigma$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

定理 1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(a-) = A, f(a+) = A.$

定理 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow f(-\infty) = A, f(+\infty) = A.$

2) 函数极限的性质

定理 3(惟一性) 在某一极限过程下,若函数 $f(x)$ 的极限存在,则其极限是惟一的.

定理 4(有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在,则存在 $x = a$ 的去心邻域 $\dot{U}$,使得 $f(x)$ 在 $\dot{U}$ 上有界.

定理 5(保向性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 (< 0)$,则存在 $x = a$ 的去心邻域 $\dot{U}$,使得 $x \in \dot{U}$ 时 $f(x) > 0 (< 0)$.

4. 证明数列或函数极限存在的方法

定理 1(夹逼准则) 设三个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

定理 2(夹逼准则) 设三个函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域中满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

注 对于其他的极限过程,类似的结论留给读者自己写出.

定理 3(单调有界准则) 若数列 $\{x_n\}$ 单调增加,并有上界(或单调减少,并有下界),则数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

5. 无穷小量

1) 若在某极限过程中($x \rightarrow a, x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 中任一个),某变量或函数 $\alpha(x) \rightarrow 0$,则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程下的**无穷小量**,简称**无穷小**.在同一极限过程中的有限个无穷小量之和仍为无穷小量;在同一极限过程中的有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量;无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \left(\text{因 } x \rightarrow 0, \sin \frac{1}{x} \text{ 有界} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \left(\text{因 } \frac{1}{x} \rightarrow 0, \sin x \text{ 有界} \right)$$

定理 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 这里 $x \rightarrow a$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

2) 无穷小的比较

假设在某极限过程中(以 $x \rightarrow a$ 为例), α, β 都是无穷小量.

(1) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 则称 α 是 β 的高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$.

(2) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$, 则称 α 是 β 的低阶无穷小.

(3) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c (c \neq 0, c \in \mathbf{R})$, 则称 α 与 β 为同阶无穷小. 特别, 当 $c = 1$ 时, 称 α 与 β 为等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta (x \rightarrow a)$.

(4) 若 $\frac{\alpha}{x^k} \rightarrow c (c \neq 0, k > 0)$, 则称 α 是 x 的 k 阶无穷小. 此时 $\alpha \sim cx^k$, 称 cx^k 为 α 的无穷小主部.

6. 无穷大量

1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, \quad n^\alpha (\alpha > 0), \quad n^\beta (\beta > \alpha > 0), \quad a^n (a > 1), \quad n^n$$

2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, \quad x^\alpha (\alpha > 0), \quad x^\beta (\beta > \alpha > 0), \quad a^x (a > 1), \quad x^x$$

7. 求数列或函数的极限的方法

1) 四则运算法则.

2) 利用夹逼准则求极限.

3) 先利用单调有界准则证明数列的极限存在, 再求其极限.

4) 利用两个重要极限求极限:

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \quad \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

例如 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = e$ (这里 $\square = \cos x - 1$)

5) 利用等价无穷小因子代换求极限.

定理 当 $\square \rightarrow 0$ 时, 有下列无穷小的等价性:

$$\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan \square \sim \arctan \square \sim \ln(1 + \square) \sim e^\square - 1$$

$$(1 + \square)^\lambda - 1 \sim \lambda \square \quad (\lambda > 0)$$

$$1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2$$

6) 利用洛必达法则求极限(关于洛必达法则见第 2.1 节).

7) 利用马克劳林展开求极限(关于马克劳林展开式见第 2.1 节).

8) 利用导数的定义求极限.

9) 利用定积分的定义求极限.

8. 函数的连续性

1) 函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续的定义: 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的邻域内定义, 若

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续; 若函数 $f(x)$ 在某区间 (a, b) 上每一点皆连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 记为 $f \in C(a, b)$; 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处右连续 (即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$), 在 $x = b$ 处左连续 (即 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$), 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记为 $f \in C[a, b]$.

2) 连续函数的四则运算性质.

3) 复合函数的极限与连续性.

定理 1 若 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, 函数 $f(x)$ 在 $x = b$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)) = f(b)$$

定理 2 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 函数 $f(x)$ 在 $x = b = \varphi(a)$ 处连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = a$ 处连续, 即有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$$

定理 3 初等函数在其定义域上每一点皆连续.

4) 间断点的分类.

若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续, 则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的间断点. 间断点分为两类.

(1) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 皆存在时, 称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点 (若 $f(a-) = f(a+)$, 称 $x = a$ 为可去型; 若 $f(a-) \neq f(a+)$, 称 $x = a$ 为跳跃型).

(2) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中至少有一个不存在时, 称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

5) 闭区间上的连续函数的性质.

定理 4 (有界定理) 若 $f \in C[a, b]$, 则 $\exists k > 0$, 使得 $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq k$.

定理 5 (最值定理) 若 $f \in C[a, b]$, 则 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得

$$\forall x \in [a, b], f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

定理 6 (零点定理) 若 $f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$ (称 $x = \xi$ 为函数 $f(x)$ 的零点).

1.2 竞赛题与精选题解析

1. 求函数的表达式(例 1.1—1.4)

例 1.1(江苏省 2004 年竞赛题) 已知 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数, 且当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $f(x) = \sin x - \cos x + 2$, 则当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时 $f(x) =$ _____.

解析 因 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -(\sin(-x) - \cos(-x) + 2) \\ &= \sin x + \cos x - 2 \end{aligned}$$

且 $f(0) = 0$. 因为 $f(x)$ 是周期为 π 的函数, 所以当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - \pi) = \sin(x - \pi) + \cos(x - \pi) - 2 \\ &= -\sin x - \cos x - 2 \end{aligned}$$

例 1.2(江苏省 1991 年竞赛题) 函数 $y = \sin x |\sin x|$ (其中 $|x| \leq \frac{\pi}{2}$) 的反函数为 _____.

解析 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时 $y = \sin^2 x$, $\sin x = \sqrt{y}$ ($0 \leq y \leq 1$), 所以 $x = \arcsin \sqrt{y}$ ($0 \leq y \leq 1$); 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ 时 $y = -\sin^2 x$ ($-1 \leq y \leq 0$), 所以 $\sin^2 x = -y$, $\sin x = -\sqrt{-y}$, $x = \arcsin(-\sqrt{-y}) = -\arcsin(\sqrt{-y})$ ($-1 \leq y \leq 0$). 于是所求反函数为

$$y = \begin{cases} \arcsin \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1; \\ -\arcsin(\sqrt{-x}), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

注 若利用公式 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, 类似的分析可得所求反函数为

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos(1 - 2x), & 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{1}{2} \arccos(1 + 2x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

例 1.3(北京市 1994 年竞赛题) 已知 $f'(-x) = x[f'(x) - 1]$, 求函数 $f(x)$.

解析 由 $f'(-x) = x[f'(x) - 1]$ 可得

$xf'(-x) = x^2[f'(x) - 1]$ 及 $f'(x) = -x[f'(-x) - 1]$
由此可得 $f'(x) = x + x^2 - x^2 f'(x)$, 解出

$$f'(x) = \frac{x+x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

两边积分得 $f(x) = x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \arctan x + c$.

例 1.4(莫斯科经济统计学院 1975 年竞赛题) 求

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

的表达式, 并作函数 $f(x)$ 的图象.

解析 当 $0 \leq |x| < 1$ 时, $f(x) = (1+0+0)^0 = 1$;

当 $x = 1$ 时, $f(1) = (2+0)^0 = 1$;

当 $x = -1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+(-1)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = (2+0)^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+(-1)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

所以 $x = -1$ 时 $f(x)$ 无定义;

当 $1 < x < 2$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x$$

当 $x = 2$ 时

$$f(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[n]{2 + \frac{1}{2^n}} = 2(2+0)^0 = 2$$

当 $|x| > 2$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1} = \frac{x^2}{2}$$

当 $-2 < x < -1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+x^{2n} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-x) \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} \\ &= (-x)(0+1+0)^0 = -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt[2n+1]{\frac{1}{x^{2n+1}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}} \\ &= x \cdot (0+1+0)^0 = x\end{aligned}$$

所以 $-2 < x < -1$ 时 $f(x)$ 无定义;

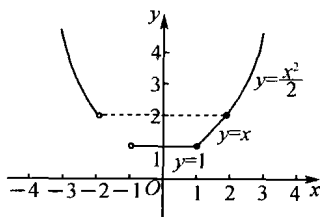
当 $x = -2$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+(-2)^{2n}+(2)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{2^{2n}}+2} = 2 \cdot (0+2)^0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+(-2)^{2n+1}+2^{2n+1}} = 1^0 = 1$$

所以 $x = -2$ 时 $f(x)$ 无定义.

函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.



2. 利用四则运算求极限(例 1.5—1.18)

例 1.5(江苏省 2008 年竞赛题) 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+2|x|}{bx-|x|} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

解析 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+2|x|}{bx-|x|} \arctan x = \frac{a+2}{b-1} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

所以 $a+2 = 1-b$; 又因为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+2|x|}{bx-|x|} \arctan x = \frac{a-2}{b+1} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

所以 $a-2 = b+1$.

由上, 解得 $a = 1, b = -2$.

例 1.6(南京大学 1995 年竞赛题) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 5$, 求 a 和 b .

解析 由

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+b) = 1+a+b = 0 \Rightarrow b = -(1+a)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) = 2+a = 5\end{aligned}$$

解得 $a = 3, b = -4$.

例 1.7(北京市 1997 年竞赛题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}$.