

陈玉祥  
张汉亚 编

# 预测数学基础

中国科技咨询服务中心  
预测开发公司

# 预测数学基础

陈玉祥 张汉亚 编

中国科技咨询服务中心

预测开发公司

一九八四年六月

# 《预测丛书》

## 编委会组成名单

总 编:	霍 俊	
副 总 编:	蔡福元	
常务副总编:	董福忠	
编 委:	鲍光前	尤毓同
	沈永淦	张汉亚
	霍丽骊	陈玉祥
	王大成	张正西
	胡玉奎	宋子成
	李永春	张德昂
	董玉海	陶 允

## 编者的话

近年来，预测技术发展迅速，尤其是定量预测技术，广泛地吸收和借鉴各学科的成果，发展了许多有效的方法。这些方法的应用，大部分都涉及到数学，特别是线性代数、概率、数理统计等方面知识的应用。为了配合当前普及预测技术、培训预测人员的需要，我们编写了这本教材，主要读者对象为具有高中、中专水平的计划和管理人员，适宜作为各类技术经济预测培训班的基础知识教材。

本教材线性代数和概率部分主要参考了罗崇蕙、朱镕道编写的有关教材，谨向有关作者表示感谢。限于我们的水平，编写时间仓促，书中定有许多缺点和不足之处，恳请各方面读者批评指正。

# 目 录

第一章 线性代数基本知识	(1)
一、行列式及其性质	(1)
(一) 二阶行列式	(1)
(二) 三阶行列式	(3)
(三) 三阶行列式的展开	(4)
(四) 行列式的性质	(6)
(五) 高阶行列式	(8)
二、解线性方程组的克莱姆法则与消去法	(15)
(一) 克莱姆法则	(16)
(二) 消去法	(19)
三、矩阵	(24)
(一) 矩阵的概念	(25)
(二) 矩阵的加、减、及数与矩阵相乘	(28)
(三) 矩阵与矩阵相乘	(30)
(四) 矩阵的转置	(34)
(五) 逆矩阵	(35)
(六) 逆阵的求法	(37)
(七) 用逆阵解线性方程组	(41)
四、矩阵的秩与初等变换	(43)
(一) 矩阵的秩	(45)
(二) 矩阵的初等变换	(47)
(三) 用初等变换求矩阵的逆	(49)

(四) 一般线性方程组的解法	(51)
习题一	(57)
第二章 概率	(60)
一、 随机事件	(60)
(一) 事件	(62)
(二) 事件间的相互关系	(64)
(三) 基本事件	(69)
二、 事件的概率	(70)
(一) 概率的概念	(70)
(二) 概率的性质	(72)
(三) 古典概型	(74)
(四) 加法公式	(75)
三、 条件概率	(76)
(一) 条件概率和乘法公式	(76)
(二) 全概率公式	(78)
(三) 逆概公式 (贝叶斯公式)	(80)
四、 独立性	(82)
五、 随机变量	(83)
(一) 随机变量的概念	(84)
(二) 离散型随机变量的分布列	(86)
(三) 常见的分布列	(88)
(四) 连续型随机变量及概率密度	(91)
(五) 随机变量的分布函数	(93)
六、 正态分布	(96)
(一) 正态分布的定义	(96)
(二) $3\sigma$ 原则	(100)

七、	随机变量的数字特征 .....	(103)
(一)	数学期望 .....	(104)
(二)	方差 .....	(107)
八、	多维随机变量 .....	(112)
习题二	.....	(114)
第三章	数理统计 .....	(117)
一、	样本及其分布 .....	(118)
(一)	总体与样本 .....	(118)
(二)	抽样方法 .....	(119)
(三)	分布密度的近似求法 (直方图) .....	(122)
二、	期望与方差的点估计 .....	(127)
(一)	数字特征法 .....	(127)
(二)	顺序统计量法 .....	(129)
(三)	极大似然法 .....	(131)
(四)	估计量的评选标准 .....	(134)
三、	抽样分布 .....	(136)
四、	区间估计 .....	(145)
(一)	均值的置信区间 .....	(146)
(二)	方差的置信区间 .....	(150)
五、	假设检验 .....	(152)
(一)	假设检验的基本思想 .....	(152)
(二)	u检验 .....	(156)
(三)	t检验 .....	(157)
(四)	$\chi^2$ 检验 .....	(160)
(五)	F 检验 .....	(163)
习题三	.....	(167)

<b>第四章 回归分析</b> .....	(169)
<b>一、一元线性回归</b> .....	(170)
<b>二、相关检验</b> .....	(175)
<b>三、预报与控制</b> .....	(182)
<b>四、多元线性回归</b> .....	(186)
<b>习题四</b> .....	(191)
<b>参考书目</b> .....	(193)
<b>附表 I 正态分布表</b> .....	(194)
<b>附表 II <math>\chi^2</math>分布临界值表</b> .....	(195)
<b>附表 III t分布临界值表</b> .....	(196)
<b>附表 IV F分布临界值表 (<math>\alpha = 0.05</math>)</b> .....	(197)
<b>附表 V F分布临界值表 (<math>\alpha = 0.025</math>)</b> .....	(198)
<b>习题答案</b> .....	(199)



# 第一章 线性代数基本知识

本章主要介绍行列式、矩阵，以及如何解线性方程组等一些基本的线性代数知识。这些知识在多元线性回归分析、经济计量模型的求解中都常常遇到，是数量经济分析中必不可少的。

## 一、行列式及其性质

在工程和经济分析中，有很多问题往往归结到求解一个线性方程组的问题。下面我们先讨论方程组，由此引出二阶和三阶行列式的定义和计算，然后推广到高阶行列式。

### (一) 二阶行列式

我们先来求解一个包含两个未知量 $x$ 、 $y$ 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 是常数。先以 $b_2$ 乘第一个方程，以 $b_1$ 乘第二个方程，然后两式相减，便消去了 $y$ ，即得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad (1.2)$$

以 $a_2$ 乘第一个方程，以 $a_1$ 乘第二个方程，然后两式相减，即得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad (1.3)$$

上述两式中 $x$ 或 $y$ 的系数 $a_1b_2 - a_2b_1$ 称为二阶行列式，用以下记号来表示：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

容易看出 (1.2) 式右边是把 $D$ 中的 $a_1, a_2$ 依次换成了 $c_1, c_2$ 。同样 (1.3) 式右边是把 $D$ 中的 $b_1, b_2$ 换成 $c_1, c_2$ 。于是 (1.2), (1.3) 两式的右边依次为两个二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

假若 $D \neq 0$ ，则由 (1.2), (1.3) 可得

$$x = \frac{D_1}{D} ; \quad y = \frac{D_2}{D} \quad (1.4)$$

把 (1.4) 中的 $x, y$ 值代入方程组 (1.1) 可以验证它是适合 (1.1) 的。是方程组 (1.1) 的唯一的一组解。

例1.1 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 4 = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{2} \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

## (二) 三阶行列式

给定一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

像前面方法一样，先从第一、第二两方程中消去 $z$ ，再从第一、第三两方程中消去 $z$ ，最后从所得的两个方程中消去 $y$ ，就得到

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 \\ & - a_3b_2c_1)x = (k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 \\ & - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

我们把 $x$ 的系数称做三阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

容易看出，(1.6)式右边刚好是将 $D$ 中的 $a_1, a_2, a_3$ 分别换成 $k_1, k_2, k_3$ 而得到的结果，所以其右边是

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

这样 (1.6) 式就可以写成

$$Dx = D_1$$

同理可以得到

$$Dy = D_2$$

$$Dz = D_3$$

这里  $D_2$  是将  $D$  中的  $b_1, b_2, b_3$  分别换成  $k_1, k_2, k_3$  所得到的行列式。  $D_3$  将是  $D$  中的  $c_1, c_2, c_3$  分别换成  $k_1, k_2, k_3$  所得到的行列式。

若  $D \neq 0$ , 则有

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \quad (1.7)$$

把 (1.7) 代入方程组 (1.5), 可以验证它们是适合 (1.5) 的, 所以是线性方程组 (1.5) 唯一的一组解。

### (三) 三阶行列式的展开

如果研究一下三阶行列式的构造, 我们会发现展开行列式的规则。

在行列式  $D$  的下面, 另写第一行, 第二行, 则成

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

取在实线上的三元素作乘积, 冠以 (+) 号, 则得三项

$$+a_1 b_2 c_3, \quad +a_2 b_3 c_1, \quad +a_3 b_1 c_2$$

又取在虚线上的三元素作乘积，冠以(-)号，则得另外三项

$$-a_3b_2c_1, -a_1b_3c_2, -a_2b_1c_3$$

行列式D的展开式为

$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

此法便于记忆，可以依此计算（仅限于二阶、三阶）行列式，称为“对角线展开法”。

### 例1.2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= 1 \times 2 \times 2 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 \\ &\quad - 3 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times 1 - 2 \times 2 \times 2 \\ &= 4 + 6 + 6 - 18 - 1 - 8 = -11 \end{aligned}$$

### 例1.3 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 1 - 12 + 5 + 6 + 4 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

所以方程组的解为

$$x = \frac{-11}{8} \quad y = \frac{-9}{8} \quad z = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

#### (四) 行列式的性质

从上面看可知，求解线性方程组 (1.1)，(1.5)，主要是计算  $D$ ， $D_1$ ， $D_2$ ， $D_3$ 。为了便于计算行列式，需要研究一下行列式的性质。下面以三阶行列式为例进行说明。这些性质对任意阶的行列式都是成立的，这一点后面我们就不再赘述了。

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中， $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  叫做行列式的元素。横排称为行，纵排称为列。 $a_1, b_1, c_1$  是第一行， $a_2, b_2, c_2$  是第二行， $a_3, b_3, c_3$  是第三行。 $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$  依次是第一、第二、第三列。

如果把行列式  $D$  的行列互换，而不改变各行各列的顺序，得到行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$D'$  叫做  $D$  的转置行列式。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性。由此可知：行列式中有关行的性质对列也同样成立；反过来也对。因此，下面各性质都只提及行。

性质 2 交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质 3 行列式中的某行的所有元素乘上某数  $k$  等于用  $k$  乘该行列式。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质 4 如果行列式的某行的各元素都是二项之和，那么这个行列式等于两个行列式之和。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_1 & b_2 + d_2 & c_2 + d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质5 把行列式中任一行的元素乘以同一数后，加到另一行的对应元素上去，行列式不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

以上五个性质，根据行列式的定义是不难证明的，请读者验证，这里就不给出了。根据上述行列式性质可以得到如下结论：

推论1 若行列式有两行相同，则此行列式等于零。

推论2 若行列式中有一行为零，则此行列式等于零。

推论3 若行列式中有两行成比例，则此行列式等于零。

### (五) 高阶行列式

在前面解二元、三元线性方程组中，引出了二阶、三阶行列式。

为了说理方便起见，我们用  $a_{ij}$  表示行列式中第  $i$  行第  $j$  列的元素。利用这种记法可把二阶、三阶行列式写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.8)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.9)$$

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，划去  $a_{ij}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3$ ) 所在的行和列的元素，余下



的元素按原来的次序构成一个二阶行列式，称为元素 $a_{ij}$ 的**余子式**，记作 $M_{ij}$ ；并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的**代数余子式**，记作 $A_{ij}$ ，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，元素 $a_{23}$ 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由三阶行列式的展开式 (1.9)，不难得到

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

即一个三阶行列式可以表示成第一行的元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和。也就是说，一个三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义。

如果我们把由单独一个元素 $a$ 组成的行列式看作是 $a$ 本身，并称之为**一阶行列式**，即 $|a| = a$ （这里， $|a|$ 表示行列式，而不是绝对值），那么，由(1.8)式可知，二阶行列式实际上也可以由相应的两个一阶行列式来**定义**：