职工业余中等学校高中课本

数学

上册

HUXUE

说　　明

这套课本是上海市教育局根据教育部一九八五年审定的《职工中等学校高中数学教学大纲》，以一九八三年上海教育出版社出版的职工业余中等学校高中数学课本为基础编成的，供职工中等学校高中数学(理科班)课程教学使用.

本书与一九八三年的版本相比，在章节的编排及内容的精选方面都作了调整．在处理上也有不少新的特点，力求较好地适应当前职工教育的实际和特点.

这套课本分上、下两册，上册的内容包括函数，三角函数等两章；下册的内容包括空间图形，直线方程和曲线方程，复数、数列和排列组合等三章．这套课本的教学时数为300课时．并附有教学大纲所规定的选学内容(逻辑代数初步，统计初步，计算器的使用，极坐标和参数方程，行列式和线性方程组，线性规划初步）以及附表（对数表，反对数表，三角函数表).

参加本册课本编写的人员有唐令颐、韩玉清、竺志平、汪祖亨、王抒．全书由王抒同志统稿，赵宪初、吴启贵审稿.

在编写修订过程中，江苏、浙江、江西、四川、安徽、山东、上海等省市的有关教师参加了审稿会议，对教材初稿作了认真的讨论，提出了不少宝贵的意见．对此，我们表示衷心的感谢.

上海市职工教材编写组

一九八五年八月

目　录

附表

第一章 函 数

一 集 合

1.1 集合

1. 集合的概念

我们先看下面的例子：

(1) 2、4、6、8；

(2) 某考场内所有的考生；

(3) 在同一平面内，到一个定点距离相等的点；

(4) 某商店里的一箱录象带。

他们分别是四个数的全体、某考场中考生的全体、与定点等距离的点的全体、箱内录象带的全体。象这些例子所叙述的对象的全体叫做集合（简称集）。集合里的各个对象叫做集合的元素。通常我们用大写字母 A、B、C、…等表示集合。小写字母 a、b、c、…等表示集合的元素。我们还用符号“$\in$”与“$\notin$”来表示集合与元素间的关系。如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a\in A$，读做“a 属于 A”；如果“$a\notin B$”，就表示 a 不是集合 B 的元素，读做“a 不属于 B”。集合与它的元素的关系是集合含有它的每一个元素，它的每一个元素都属于这个集合。一般地，我们称作集合与元素的从属关系。例如

设 J 为所有整数的集合，显然，任一整数都是它的元素。如 $3\in J$、$-2\in J$ 等；而分数 $\frac{1}{2}$、无理数 $\sqrt{3}$ 等都不是 J 的

元素，记作 $\frac{1}{2}\notin J$、$\sqrt{3}\notin J$ 等.

所谓一个集合是给定的，就是指那些对象是它的元素，那些对象不是它的元素，可以明确地得出判断．例如：对于整数集合 J，我们根据整数的定义判断出 $3\in J$、$-2\in J$，而 $\frac{1}{2}\notin J$、$\sqrt{3}\notin J$.

2．集合的表示法

对于一个具体的集合，常用的表示法是列举法和描述法.

把集合的元素一一列举出来，写在大括号"{ }"内表示集合的方法，叫做**列举法**.

例如：由数 2、4、6、8 组成的集合，可以表示为：

$$\{2、4、6、8\}$$

或者

$$\{2、8、4、6\},$$

这就是说，不同的对象在集合中的排列是没有顺序要求的．但是，不可以写成

$$\{2、8、4、6、6\}$$

即集合中的元素不可以重复出现．我们在集合中把两个相同的对象认为是一个元素．

把集合中元素的共同特性（属性或规律）描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**.

例如：由数 2、4、6、8 组成的集合，可以表示为：

{小于 10 的正偶数}

或 $\{x|0<x<10,\ x$ 为正偶数$\}$.

又如，考场内所有考生组成的集合，可以表示为：

{考场内的考生}.

习惯上，我们规定 N 表示自然数的集合，J（或 Z）表示整数的集合，Q 表示有理数的集合，R 表示实数的集合，R^+ 表示正实数的集合，R^- 表示负实数的集合．

对给定的集合，有些适宜用列举法表示，有些适宜用描述法表示．在选用集合的表示方法时，要根据集合的特性来考虑．例如：

由数2、4、6、8组成的集合，可以用列举法表示：

$$\{2、4、6、8\},$$

也可以用描述法表示：

$$\{x|x\text{是小于10的正偶数}\}.$$

这里符号"|"是竖线，也可以用冒号"："表示，即

$$\{x: x\text{是小于10的正偶数}\}.$$

竖线（或冒号）前的 x 是代表集合中的元素，称"代表元素"，竖线（或冒号）后的部分是用来描述代表元素的特征的．这种描述的方法除了文字说明外，有时也可以用数学符号，即

$$\{x|x=2n,\ \text{且}\ 0<n<5,\ n\in N\}$$

或

$$\{2x|x=1、2、3、4\}.$$

就是用文字描述，也有不同的方式，即

$$\{x|x\text{是大于1而小于9的偶数}\}$$

或

$$\{x|x\text{是不大于8的正偶数}\}\text{等}.$$

从上面的分析可以看出，一个集合的表示方法可以有多种形式．一般地说，列举法的优点是直观性强，用列举法表示的集合，一眼就能看出集合中的各个元素，给人以清晰的印象，但是当集合中的元素是无限多个时，列举法就无能为力了．这时，用描述法来表示是比较恰当的．因此，我们说有些集合可以用列举法或描述法分别来表示，而有些集合只适宜用其中的一种方法表示．例如：

集合$\{-21, 0, 736, 0.13\}$，它不适宜用描述法表示；

集合$\{x \mid -1<x<2, x\in R\}$，它不适宜用列举法表示．

3．集合的种类

通常我们可以按照集合中元素的个数将集合分成下面几种：

(1) 有限集

由有限多个元素组成的集合叫做**有限集**．例如：

$$\{\text{某学校的教师}\},$$

$$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 50, x\in N\},$$

等等．对于只含有一个元素的集合，叫做**单元素集合**．例如，$\{1\}$，$\{0\}$，$\{a\}$，$\{x\}$等等，应注意1和$\{1\}$是不同的，1表示一个元素，即数1，$\{1\}$表示只含有一个元素1的集合．

(2) 空集

不含有任何元素的集合叫做**空集合**（简称**空集**）．用符号"$\varnothing$"表示，读作空集．例如，{小于零的正整数}，{内角和等于180度的三角形}等等．应注意空集$\varnothing$与$\{0\}$是不同的，$\varnothing$表示不含任何元素的集合，$\{0\}$表示只含有一个元素零的单元素集．

(3) 无限集

由无限多个元素组成的集合叫做**无限集**．例如：

$$\{x \mid x-2>1, x\in R\},$$

$$\{\text{直线上的点}\}$$

等等．

习 题 一

1．用适当的方法表示出由下列对象所组成的集合：

(1) 100 以内为 9 的倍数的自然数所组成的集合；

(2) 比 15 小的质数所组成的集合；

(3) 小于 15 的正奇数；

(4) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的解组成的集合；

(5) 周长等于 12 厘米的三角形；

(6) 车床、铣床、刨床、磨床、钻床.

2. 试用列举法表示下列集合：

(1) {平方等于 4 的数}；

(2) $\{x \mid x^2=1\}$；

(3) $\{x \mid -3<x<4,\ x\in J\}$；

(4) $\{x \mid x=\dfrac{p}{q},\ p+q=5,\ p,\ q\in N\}$；

(5) {18 的正约数}.

3. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) $0\underline{\quad\quad}N$；$\dfrac{1}{2}\underline{\quad\quad}J$；$-3\underline{\quad\quad}Q$；$\sqrt{2}\underline{\quad\quad}R$.

(2) 如果 a、$b\in N$，且 $a<b$，那么 $a+b\underline{\quad\quad}N$，$a-b\underline{\quad\quad}N$.

4. 指出下列各集合中的有限集和无限集：

(1) $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 50,\ x\in Q\}$；

(2) $\{x \mid x\geqslant 1,\ x\in N\}$；

(3) $\{x \mid x-2<1,\ x\in N\}$；

(4) $\{x \mid x-2<1,\ x\in J\}$.

5. 选择题．下列四个关系中仅有一个是正确的，它是（ ）．

(A) $\varnothing\notin 0$；

(B) $0\notin\varnothing$；

(C) $0\in\{\varnothing\}$；

(D) $\varnothing\in 0$.

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集

设集合 A 表示{语文,数学,物理,化学},集合 B 表示{语文,数学},容易看出:这里集合 B 的任何一个元素,都是集合 A 的元素. 对于两个集合 A 与 B,如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么,集合 B 就叫做集合 A 的一个子集. 记作

$$B \subseteq A \text{ 或 } A \supseteq B.$$

读作"B 包含于 A"或"A 包含 B".

这里的符号"$\subseteq$"和"$\supseteq$"是用在集合之间表示包含关系的. 为加深理解,我们用下面的问题来说明.

设数 1、2、3、4、5 组成的集合为 A,数 1、3、5 组成的集合为 B,数 3、5 组成的集合为 C. 容易看出集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素;集合 C 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,并且集合 C 中的任何一个元素也都是集合 A 的元素. 即

$$B \subseteq A,\ C \subseteq B \text{ 以及 } C \subseteq A.$$

这就是说,B 和 C 都是 A 的子集,C 也是 B 的子集,也可以记作:

$$A \supseteq B,\ B \supseteq C \text{ 以及 } A \supseteq C.$$

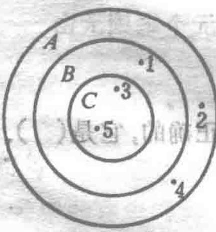

图 1.1

为了直观地表示集合与集合间的关系,可以用简单的示意图来表示. 从图 1.1 上可以看出:

如果 $A \supseteq B$, $B \supseteq C$, 那么 $A \supseteq C$.

又如,因为 $R \supseteq Q$, $Q \supseteq N$, 所以 $R \supseteq N$. 上面的关系式,学员可以仿照图 1.1 把它用图表达出

来.

关于子集的定义，还应注意下列两种特殊情况:

(1) 对于任何一个集合 A，因为它的每一个元素都是集合 A 的元素，即 $A\subseteq A$. 也就是说任何一个集合是它本身的子集.

(2) 一般我们规定，空集是任何集合的子集.

如果 B 是 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B，那么集合 B 就叫做集合 A 的真子集. 记作

$$B\subset A \text{ 或 } A\supset B,$$

读作"B 真包含于 A"或"A 真包含 B".

例如，自然数集 N 是实数集 R 的真子集，空集是任何非空集合的真子集.

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $A\supseteq B$，那么，集合 A 和集合 B 叫做相等，记作

$$A=B \text{ 或 } B=A.$$

读作"集合 A 等于集合 B"或"集合 B 等于集合 A". 它表示两个集合中的元素完全相同(即两个集合中的元素个数相等且相应的元素都相同).

这样，上面例子中给出的"数 1、2、3、4、5 组成的集合 A"就可以记作 $A=\{1、2、3、4、5\}$；"数 1、3、5 组成的集合 B"就可以记作 $B=\{1、3、5\}$等等.

如果有 $A=\{a、b、c\}$，$D=\{a、c、b\}$，那么，从 $A\subseteq D$ 和 $D\subseteq A$ 可以得到 $A=D$.

如果有 $M=\{1, 2\}$，$K=\{x|(x-1)(x-2)=0, x\in R\}$，虽然集合 M 是用列举法表示，集合 K 是用描述法表示，但它们的元素都是数 1、2，因此也就是 $M=K$. 也可以记作

$$\{1, 2\}=\{x|(x-1)(x-2)=0, x\in R\}.$$

例1 设集合 $S=\{0, 1, 2\}$，写出 S 的所有的子集与真子集.

解 S 的所有子集是：$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$;

S 的所有真子集是：$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$.

例2 试在下列集合之间，选出具有包含关系的集合，并将其包含关系用记号 $\subset$ 表示.

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $D=\{x|x$ 为自然数$\}$,

$E=\{x|x$ 为正奇数$\}$, $F=\{x|x$ 为整数$\}$.

解 $A\subset D$, $A\subset F$, $B\subset D$, $B\subset E$, $B\subset F$, $C\subset D$, $C\subset F$, $D\subset F$, $E\subset D$, $E\subset F$.

例3 讨论下列集合的包含关系：

$$A=\{x|x<1\},\ B=\{x|x-2<0\}.$$

解 将集合 A、B 分别在数轴上表示出来(如图 1.2)，从而得到

$$A\subset B.$$

图 1.2

例4 设 $A=\{2, 3\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，那末，$A=B$.

解 适合条件 $x^2-5x+6=0$ 的 x 有 $x_1=2$, $x_2=3$，即 $B=\{2, 3\}$，所以 A 与 B 的元素完全相同．即 $A=B$.

2. 交集

设集合 $A=\{$语文,数学,物理$\}$, $B=\{$语文,数学,化学$\}$. 那么,集合 $C=\{$语文,数学$\}$是既属于 A 又属于 B 的一切元素所组成的集合,这时,我们叫集合 C 是集合 A 与 B 的交集. 也就是说,把由 A 与 B 的所有公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$。即

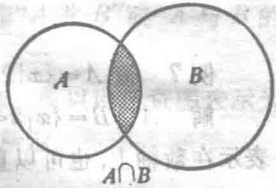

图 1.3

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 并且 } x\in B\}.$$

这里的记号"∩"读作"交", $A\cap B$ 读作"A 交 B"或"A 与 B 的交".

一般地说,两个集合 A、B 的交集,可以用示意图表示为相交的公共部分,如图 1.3 的阴影部分所示.

对于任意集合 A,都有

$$A\cap A=A;\ A\cap\varnothing=\varnothing.$$

例 5 设 $A=\{$等腰三角形$\}$, $B=\{$直角三角形$\}$, 求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}$

$=\{$等腰直角三角形$\}$.

例 6 设 $A=\{x|-2<x\leqslant 3\}$, $B=\{x|x\geqslant 0\}$, 求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x|-2<x\leqslant 3\}\cap\{x|x\geqslant 0\}$

$=\{x|-2<x\leqslant 3 \text{ 并且 } x\geqslant 0\}$

$=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$.

对于用不等号的描述法表示的集合,在进行求交的时候,我们可以把它们表示在数轴上,直观地找出公共元素所组成的交集. 如图 1.4 所示.

集合 A 与 B 的交集就是$\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$.

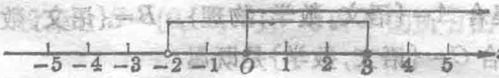

图 1.4

例 7 设 $A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|x<2\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x|2<x<3\}\cap\{x|x<2\}=\varnothing$.

表示在数轴上，也可以直观地得出 $A\cap B=\varnothing$（图 1.5）.

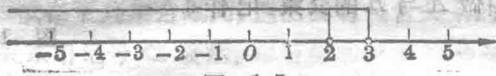

图 1.5

例 8 设 $A=\{(x,y)|x+2y=3\}$，$B=\{(x,y)|4x+y=5\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{(x,y)|x+2y=3\}\cap\{(x,y)|4x+y=5\}$，

$$=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}x+2y=3\\4x+y=5\end{array}\right.\right\}=\{(1,1)\}.$$

这个例子告诉我们，求用方程的解描述的集合的交时，可以解由这两个方程组成的方程组来得到它们的交集.

例 9 画示意图表示集合

$$A\cap B\cap C.$$

解 可先画出 $A\cap B$（横线阴影部分）.

再画出 $(A\cap B)\cap C$（如图 1.6 所示的竖线阴影部分）.

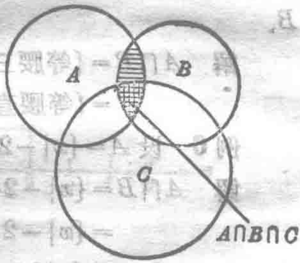

图 1.6

3. 并集

设集合 $A=\{$语文，数学，物理$\}$，$B=\{$语文，数学，化学$\}$，把 A 与 B 两个集合的元素合并起来，可以组成一个集合 $D=\{$语文，数学，物理，化学$\}$，对于这样的集合 D，叫做集合 A 与 B 的并集．也就是说，把集合 A 与集合 B 的所有元素合并在

一起所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

这里的记号"∪"读作"并"，$A\cup B$ 读作"A 并 B"或"A 与 B 的并"。

一般地说，两个集合 A、B 的并集，可以用示意图表示为以下两种情形，如图 1.7 的阴影部分所示。

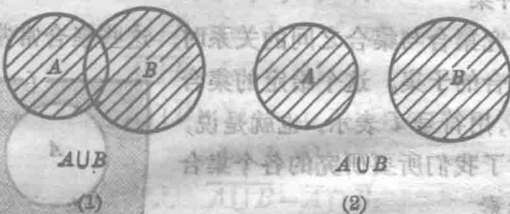

图 1.7

对于任意集合 A，都有

$$A\cup A=A;\quad A\cup\varnothing=A.$$

例 10 设 $A=$\{锐角三角形\}，$B=$\{钝角三角形\}，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=$\{锐角三角形\}$\cup$\{钝角三角形\}

$=$\{斜三角形\}.

例 11 设 $A=\{1, 2\}$，$B=\{-1, 0, 1\}$，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{1, 2\}\cup\{-1, 0, 1\}$

$=\{-1, 0, 1, 2\}.$

例 12 设 $A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|1<x<5\}$，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{x|-2<x<3\}\cup\{x|1<x<5\}$

$=\{x|-2<x<5\}.$

与前面求交一样，对于用不等号的描述法表示的集合，在进行

求并的时候，也可以把它们表示在数轴上，从而直观地找出所有元素并在一起组成的集合，如图 1.8 所示。

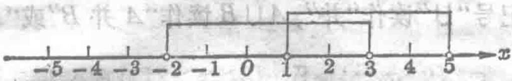

图 1.8

集合 A 与 B 的并集就是 $\{x|-2<x<5\}$。

4. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做**全集**，用符号 I 表示。也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素。

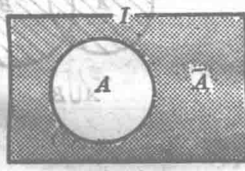

图 1.9

设有某一个给定的全集 I，A 是集合 I 的子集，那么在集合 I 中除去子集 A，余下的一切元素所组成的集合，叫做 A 的**补集**(或称余集)，记作 $\overline{A}$。这里的记号"$-$"读作"补"，$\overline{A}$ 读作"A 补"。

一般地说，在全集 I 中所有不属于集合 A 的元素所组成的集合 A 的补集，可以用示意图表示，如图 1.9 的阴影部分所示。

例 13 设 $I=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$A=\{0, 3, 4\}$，求 $A\cup\overline{A}$ 和 $A\cap\overline{A}$。

解 $I=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$A=\{0, 3, 4\}$，

那么，$\overline{A}=\{1, 2\}$，

$$A\cup\overline{A}=\{0, 3, 4\}\cup\{1, 2\}=\{0, 1, 2, 3, 4\}=I,$$

$$A\cap\overline{A}=\{0, 3, 4\}\cap\{1, 2\}=\varnothing.$$

对于任意集合 A，都有

$$A\cup\overline{A}=I;\ A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

例 14 设 $I=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$$A=\{c, d, e, f\}, B=\{e, f, g\}.$$

验证 1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

解 已知 $A=\{c, d, e, f\}$, $B=\{e, f, g\}$, 则

$$\overline{A}=\{a, b, g, h\},$$

$$\overline{B}=\{a, b, c, d, h\}.$$

1) $A\cup B=\{c, d, e, f, g\}$,

$\overline{A\cup B}=\{a, b, h\}$,

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{a, b, g, h\}\cap\{a, b, c, d, h\}$

$=\{a, b, h\}$,

$\therefore\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

2) $A\cap B=\{c, d, e, f\}\cap\{e, f, g\}=\{e, f\}$,

$\overline{A\cap B}=\{a, b, c, d, g, h\}$,

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{a, b, g, h\}\cup\{a, b, c, d, h\}$

$=\{a, b, c, d, g, h\}$,

$\therefore\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

习 题 二

1. 写出集合$\{r, s, t\}$的所有子集，并指出其中的真子集.

2. 用符号表示下列两个集合之间的关系.

(1) $A=\{a, b, c, d, 0\}$, $B=\{a, b, c, d\}$;

(2) $A=\{a, b, c, d, 0\}$, $B=\{0, d, a, c, b\}$.

3. 讨论下列集合的包含关系:

$$A=\{x|x^2-1=0\}, B=\{-2, -1, 1\}.$$

4. 设$M=\{$有理数$\}$, $N=\{$无理数$\}$, 求$M\cap N$. 现在有三个答案. (1)$M\cap N=\{0\}$, (2)$M\cap N=\{$空集$\}$, (3)$M\cap N=$