

数理经济学

经济均衡分析的原理与方法

郭多祚 主编
宋雯彦 宋丽娜 副主编

清华大学出版社

QUANTITATIVE

ECONOMICS

数量经济学系列丛书

数理经济学

经济均衡分析的原理与方法

郭多祚 主编
宋雯彦 宋丽娜 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

数理经济学旨在使用数学工具研究经济,其特点是在一定的严格的假设之下,将所研究的经济问题转化为数学模型,然后应用数学理论进行推导,将得到的结果用来深入地分析经济问题。其核心问题是经济均衡。

本书以经济均衡分析为主线,由浅入深先后介绍静态均衡分析、比较静态分析、连续时间动态均衡分析、离散时间动态均衡分析、静态目标均衡分析,以变分法为基础的动态目标均衡分析、以最优控制为基础的带有控制变量的动态目标均衡分析,以递归方法为基础的离散事件动态目标均衡分析以及竞争性均衡。

本书对变分法、最优控制和递归方法在书中做了简要的介绍,适用于本科生和研究生作为教材,也可供从事经济理论研究和从事经济分析的人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数理经济学:经济均衡分析的原理与方法/郭多祚主编.--北京:清华大学出版社,2012.3

(数量经济学系列丛书)

ISBN 978-7-302-28365-2

I. ①数… II. ①郭… III. ①数理经济学 IV. ①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第049904号

责任编辑:张 伟

封面设计:常雪影

责任校对:王凤芝

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62770175-4903

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:15.5 插 页:1 字 数:371千字

版 次:2012年3月第1版 印 次:2012年3月第1次印刷

印 数:1~4000

定 价:30.00元

数理经济学不是经济学的一个分支学科,而是一种分析经济问题、揭示经济规律的行之有效的方法,是一种思维方式、一种研究技巧,可以应用于经济学的各个领域。

数理经济学的特点是用数学语言描述经济问题,通过建立经济数学模型,应用已有的数学理论,用严格的推理得出结论,进而深入地对经济问题进行分析。

均衡是经济学研究的核心问题,均衡是经济处于平衡时的一种状态或者是经济处于理想的最优状态。通过对均衡的研究可以揭示经济学中最具有实质性的规律,纵观经济学的发展历程,对均衡的研究贯穿于经济学发展的全过程。

本书以经济均衡分析为主线,由浅入深地讲述了经济学中的各种均衡状态及对均衡的分析,包括静态均衡和动态均衡,涉及连续时间均衡和离散时间均衡,并通过实际的经济学的模型讲述了如何利用数学语言描述经济问题,如何应用数学理论揭示经济规律以及进行深入的分析。本书关注分析方法而非定理和结论的收集。随着经济的不断发展,需要研究和解决的经济问题越来越复杂,随之而来的是应用的数学工具越来越艰深。本书包括以下9章。

第1章 导论。介绍了数理经济学及其发展过程,即本书的最基本的概念和符号。

第2章 静态均衡分析。介绍了均衡的含义,结合微观经济模型——市场模型和宏观经济模型——凯恩斯国民收入模型,介绍了如何建立数学模型,利用均衡条件求内生变量的均衡值。

第3章 比较静态分析。在第2章的基础上介绍了模型的参数和外生变量发生变化时,对模型均衡值的影响以及如何求比较静态导数。

第4章 最优化及目标均衡。介绍了什么是目标均衡,如何利用求导数极值的方法求目标均衡值,分析参数和外生变量发生变化时对均衡值的影响,以及如何将目标均衡模型应用于多产品厂商问题。

第5章 动态经济模型及其均衡分析。动态模型与静态模型的本质差别在于,静态模型的内生变量的均衡解是 n 维欧氏空间中的一个点,而动态模型的均衡点是用数来表达的路径,用于揭示内生变量如何通过这一路径达到均衡点,对于连续时间模型所用到的数学工具是常微分方程,对于离散时间模型所用到的数学工具是差分方程。这一章通过具体的经济问题,介绍了均衡路径的求解,讨论了动态稳定性,介绍了相图分析方法。

第6章 变分法与动态目标均衡模型。这一章提到的经济模型是一种用积分来表达的泛函极值问题,这种问题的求解方法是变分法,并利用欧拉方程求解这种模型。本章首先介绍了变分法和欧拉方法,然后讲述了几个有代表性的模型,并讨论了稳定性。

第7章 最优控制与动态目标均衡模型。这一章用到的数学工具是最优化控制理

论。首先介绍了最优控制的求解方法、最大值原理,然后研究了几种有代表性的模型并讨论了它们的稳定性。

第8章 递归方法与离散时间动态目标均衡。本章介绍了递归方法和以最优增长问题为例讨论了这一类离散动态目标均衡问题的求解方法,这种问题的困难之处在于要把离散时间问题转化为连续时间问题来求解,在数学上,有一定的难度,适合于研究生学习。

第9章 竞争性均衡。本章研究了多个不同类型经济行为人的相互作用而达到的均衡。介绍了竞争性均衡的概念、福利经济学的两大经典命题、帕累托最优和竞争性均衡之间的关系以及竞争性均衡的动态稳定性。本章内容适合于研究生选用。

本书还编写了两个附录,附录A介绍了常微分方程和差分方程的求解方法,附录B介绍了不动点定理及最大化定理。

本书是国家级教学团队“经济计量分析类课程”教学团队系列教材之一。

本书可作为经济、管理类专业的本科生和研究生的教材。前7章可供本科生学习,后两章可供研究生学习和本科生阅读。对于理工科专业可将本书作为选修课教材,也可供从事经济研究和经济管理工作的有关人员参考。

本书参考一些相关的中、外文参考文献,主要参考文献列于书后,在此向参考文献的作者表示感谢,如有遗漏请谅解。

由于作者的水平有限,书中难免出现缺陷和错误,欢迎专家、学者以及各院校师生批评指正。

编者

2011年11月

第 1 章 导论	1
1.1 数理经济学	1
1.2 数理经济学的产生和发展	1
1.3 数理经济学中的模型	3
1.3.1 经济模型	3
1.3.2 经济数学模型及其构成	3
第 2 章 静态均衡分析	5
2.1 均衡的含义	5
2.2 线性模型	5
2.3 非线性市场模型	6
2.4 一般市场模型	7
2.4.1 两种商品市场的线性模型	7
2.4.2 一般商品市场模型	9
2.5 凯恩斯国民收入模型	10
2.5.1 单一部门简单国民收入模型	10
2.5.2 两部门国民收入的 IS 与 IM 模型	11
习题	13
第 3 章 比较静态分析	15
3.1 简单市场模型的比较静态分析	15
3.2 国民收入模型的比较静态分析	16
3.3 一般函数形式的市场模型的比较静态分析	17
3.4 国民收入模型 (IS-IM) 的比较静态分析	21
3.5 开放经济模型	22
习题	25
第 4 章 最优化与目标均衡	27
4.1 单变量经济优化问题	27

4.1.1	酒的窖藏问题	27
4.1.2	伐木问题	28
4.2	多变量经济优化问题与目标均衡	28
4.2.1	多产品厂商问题	28
4.2.2	柯布-道格拉斯生产函数和 CES 生产函数	32
4.3	厂商的投入决策	35
4.4	目标均衡的比较静态分析	38
4.4.1	简化模型	38
4.4.2	一般函数模型	39
4.5	具有约束条件的目标均衡	40
4.5.1	效用最大化与消费需求	40
4.5.2	投入的最小成本组合	44
习题		46
第 5 章	动态经济模型及其均衡分析	48
5.1	连续时间的动态模型	48
5.1.1	动态市场模型	48
5.1.2	多马增长模型	50
5.1.3	索洛增长模型	52
5.1.4	具有价格预期的市场模型	55
5.1.5	菲利普斯模型	58
5.2	离散时间的动态经济模型	62
5.2.1	蛛网模型	62
5.2.2	具有存货的离散市场模型	64
5.2.3	萨缪尔森乘数-加速数相互作用模型	66
5.2.4	离散时间通货膨胀与失业模型	69
5.3	双变量动态模型及相图分析	72
5.3.1	通货膨胀-失业模型的方程组模型	72
5.3.2	双变量相位图	75
5.3.3	奥比斯特的通货膨胀与货币规则模型	79
习题		81
第 6 章	变分法与动态目标均衡模型	83
6.1	动态最优化问题及目标泛函	83
6.2	变分法与欧拉方程	85
6.2.1	固定起点和固定终结点问题	85
6.2.2	可变终结点问题与一般性横截条件	88
6.3	关于变分法的进一步讨论	92
6.3.1	充分条件	92

6.3.2	勒让德必要条件	96
6.3.3	无限计划水平	97
6.3.4	一阶变分和二阶变分	98
6.4	连续变量动态目标均衡模型	99
6.4.1	垄断者的动态最优化——埃文斯模型	99
6.4.2	通货膨胀和失业的均衡——泰勒模型	101
6.4.3	企业的最优投资路径——乔根森模型	104
6.4.4	艾斯纳-斯特罗兹模型	105
6.4.5	最优社会储蓄行为——拉姆齐模型	108
6.5	动态目标均衡的稳定性分析	109
6.5.1	艾斯纳-斯特罗兹模型的动态稳定性	110
6.5.2	简化的拉姆齐模型的动态稳定性	111
6.6	带有约束的目标均衡模型	115
6.6.1	约束的类型	115
6.6.2	带约束的拉姆齐模型	119
6.6.3	带约束的通货膨胀-失业折中模型	120
6.6.4	与资源利用相关的动态目标均衡模型	121
习题		125

第7章 最优控制与动态目标均衡模型

128

7.1	最优控制问题和最大值原理	128
7.1.1	最简单的最优控制问题	128
7.1.2	最大值原理	130
7.1.3	最大值原理的理论说明	134
7.1.4	其他终结条件	136
7.2	对最优控制的进一步讨论	138
7.2.1	最大值原理的经济学解释	138
7.2.2	现值汉密尔顿函数及修正最大值原理	140
7.2.3	最优控制的充分条件	141
7.2.4	具有多个状态变量和控制变量的最优控制问题	143
7.2.5	无限水平问题	145
7.3	能源使用和环境质量及反污染政策	147
7.3.1	布鲁斯·福斯特模型	147
7.3.2	考虑污染存量模型	149
7.4	新古典最优增长理论	152
7.4.1	模型	153
7.4.2	模型求解	154
7.4.3	模型的动态均衡分析	155
7.4.4	关于技术进步的讨论	158

7.4.5 具有哈罗德中性进步的新古典最优增长模型·····	159
7.4.6 内生技术进步——谢尔模型·····	160
7.4.7 罗默的模型·····	161
7.4.8 两个控制变量的动态目标均衡模型·····	162
7.5 具有约束的最优控制问题·····	164
7.5.1 涉及控制变量的约束·····	164
7.5.2 现值汉密尔顿函数和拉格朗日函数·····	170
7.5.3 充分条件·····	171
7.5.4 收益最大化企业的动态——H. 利兰最优控制模型·····	172
习题·····	176
第8章 递归方法与离散时间动态目标均衡·····	178
8.1 离散时间确定性最优增长模型·····	178
8.2 确定性动态规划·····	180
8.2.1 基本概念和假设·····	180
8.2.2 最优化原理·····	181
8.3 最优解的存在性·····	185
8.4 欧拉方程·····	189
8.5 最优增长——离散时间拉姆齐模型·····	190
习题·····	194
第9章 竞争性均衡·····	196
9.1 竞争市场理论概述·····	196
9.1.1 竞争市场的主要概念·····	196
9.1.2 消费集与偏好序·····	197
9.1.3 效用函数·····	198
9.2 帕累托最优与竞争均衡·····	199
9.2.1 福利经济学的两大经典命题·····	199
9.2.2 帕累托最优与竞争性均衡之间的关系·····	199
9.3 竞争性均衡的存在性·····	204
9.4 对竞争性均衡存在性的进一步讨论·····	208
9.5 竞争性均衡的稳定性·····	212
习题·····	216
参考文献·····	217
附录A 常微分方程与差分方程·····	219
A1 一阶线性方程·····	219
A2 二阶常系数线性微分方程·····	223

A3	一阶差分方程	225
A4	二阶常系数线性差分方程	227
A5	联立微分方程和差分方程	229
附录 B 不动点定理及最大化定理		234
B1	度量空间和赋范线性空间	234
B2	压缩映射定理	236
B3	最大化定理	237

1.1 数理经济学

数理经济学不是经济学的一个分支学科而是一种分析方法,是用数学语言描述经济问题,用已知的数学定理进行推理,来研究经济问题的一种方法。

现代经济理论的基本特征在于其分析性和数学性。数学作为一种语言,通过明确给出的假设条件,并使每一步推导符合逻辑,从而成为确切地表达某种理论的一种方便的工具。因此,数学语言为经济理论的进一步发展、推广提供了基础,更进一步,数学也使更多、更精确的检验成为可能。这不仅因为那些用语言表达的经济理论和图形化流派自身有一些隐含的、模糊不清的假设条件,更重要的是,用这些方式表达的经济理论没有办法进行精确和检验。

数理经济学关注的是过硬的行之有效的分析方法,而不是定理和结论的收集。因为现实世界太复杂了,不可能直接应用这些定理,正如 J. M. 凯恩斯提出的:“经济学的理论并不是由可以立即应用于政策的已有的结论组成的,它是一种方法而不是教条,是一种思维方式,是一种研究技巧,它可以帮助掌握它的人得出有用的结论。”数理经济学更是如此,数理经济学作为一种分析方法,可以应用于微观经济学、宏观经济学,以及公共财政等其他经济和分支学科。

数理经济学和用语言文字表达的所谓文字经济学的主要区别在于,数理经济学使用数学符号而非文字,使用方程而非语言来描述假设和结论,利用大量的数学定理而非语言进行推理。数理经济学具有如下优势:所运用的语言更为简练、精确;有大量的数学定理可供使用;有用数学语言叙述的明确的假设作为运用数学定理的先决条件;容易处理复杂的经济问题。

1.2 数理经济学的产生和发展

正规的经济模型获得它的数学生命时,才成为一种学科,这种学科的目标是不断地、无情地追求严谨性、普遍性和简练性。

数理经济学在 19 世纪发展的标志性事件是 1838 年奥古斯丹·古诺(Augustin Cournot)的著作《财富理论和数学原理研究》问世,这本书的数学形式和经济学的内容互相结合,具有里程碑性质的开创性。紧接着,于 1870 年里昂·瓦尔拉斯(Leon Walras)在洛桑大学发表了一篇数理经济学的共生演讲,维弗雷多·帕累托(Vilfredo Pareto)的著作《政治

经济学讲义》和《政治经济学教程》以及1991年发表的文章《数理经济学》对数理经济学的发展起到了推动作用。

约翰·冯·诺依曼(John von Neumann)1928年发表的关于对策论的论文和1937年发表的关于经济增长的论文对数理经济学的发展有深刻的影响,被认为在经济学发展中取得了杰出的成就。1944年以前,经济理论方面的文章,只有极少数几篇在数学上是严谨的,其中冯·诺依曼1928年和1937年的论文及亚伯拉罕·沃尔法(Abraham Wald)1935—1936年发表的关于一种均衡存在性的文章在数学的论证上是严谨的。

1944年发表的《对策论与经济行为》在理论上是严谨的,利用了公理化的方法,首先选择了基本概念,并用数学语言描述理论中的每一个概念。例如,消费者的消费、可能消费集及消费偏好分别用商品空间中的一个点、商品空间中的子集和子集中的二元关系来描述,描述基本概念的数学用语用于假设,结论是通过数学方法在这些假设的基础上推导出来的,并用经济的定理对经济问题进行解释和分析,公理化的理论有一个与它的经济内容相一致的数学形式。这种数学形式是严谨的,如果将基本概念、假设和模型的经济解释取消,单纯的数学结构必须依然成立。

随着经济学、数理经济学的不断发展,数学不断地被引入,1939年约翰·希克斯(John Hicks)的《价值与资本》,1943年莫里斯·阿莱斯(Maurice Allais)的《对一门经济科学的研究》,1947年保罗·萨缪尔森(Pan Samuelson)的《经济分析的作用》,把微分学和线性代数应用于商品-价格空间,微分学和线性代数对研究经济理论很适用。

冯·诺依曼和奥斯卡·莫根斯特恩(Oskar Morgenstern)的著作中的用数学形式为经济学推理达到了逻辑严谨的新水平,通过极小极大定理的初等证明将凸分析引入经济理论,在以后的几年里,凸性变成了一个重要概念。

1937年,冯·诺依曼为证明在他的模型中存在一个最优的增长路径而推广了布劳威尔(Brouwer)不动点定理,1941年角谷(Kakutani)重新阐述了不动点定理,使得数学的不动点概念与社会科学中的一般均衡概念完美地统一。在1950年约翰·纳什(John Nash)的论文中,不动点定理是对策论和一般均衡理论中的精彩部分。

早在1881年弗朗西斯·埃奇沃斯(Francis Edgeworth)在论文《数学心理学》中研究了一个“经济合同”渐近等式和它的竞争性配置集合,1959年马丁·舒贝克(Martin Shubik)利用了弗朗西斯·埃奇沃斯提出的理论解释了合同曲线和对策论核心概念之间的关系。1962年赫伯特·斯卡夫(Herbert Scarf)推广了埃奇沃斯的研究成果开创了理论经济学发展的新局面。1964年罗伯特·奥曼(Rooert Aumann)将可忽略的行为者集的概念用Lebesgue测度的公式表达,奥曼证明在具有这种行为集合的交换经济里,核心与竞争配置的集合重叠时,上述公式起到了关键性作用。

在1972年唐纳德·布朗(Donala Brown)和亚伯拉罕·鲁滨逊(Abraham Robinson)利用非标准分析提出了可忽视行为者概念相反的表达式。1978年罗伯特·安德森(Rober Anderson)建立了一个模型,即竞争性配置得出的核心配置偏差不等式,这是核心理论的核心,和用非标准分析对结论进行了证明。

第二次世界大战以后,数理经济学得到了迅速的发展,文献中数学表达准确,把假设和结论用精确的公式表达,经济分析就能更接近于超脱意识形态的完美水平。福利经济学的两个定理就是代表,给出了与价格相联系的均衡是帕累托最优的条件以及逆定理存在的

条件。

经济理论公理化的另一个成果是数学表达式更清晰,公理化概念界定更明确,数学推理更严谨,例如在研究 L 种商品交换的经济中总过度需求函数的特征,发现该函数把一个正的价格向量映射到总过度需求向量上。瓦尔拉定律认为,这两个向量在欧几里得商品价格空间中是正交的,该函数也是零次齐次的。在1973年雨果·索南夏因(Hugo Sonnenschein)推测:任何满足瓦尔拉定律的连续函数都是一个有限交换经济的总过度需求函数。数学形式和经济内容在这个结果的证明中交替地起主导作用。

1.3 数理经济学中的模型

1.3.1 经济模型

任何经济理论都是对现实世界的必要抽象。因为现实经济的复杂性,在研究现实经济问题时,往往涉及很多的因素,而且这些因素有错综复杂的关系。在研究经济问题时,必须经过分析,找到主要因素,通过分析这些主要因素,找出它们之间的关系,然后把注意力集中在那些能反映所研究经济问题的本质的重要因素及分析这些因素之间的关系,作为研究选定的经济问题的理论框架,称之为理论模型,这里只提出这样一个概念。在以后的章节中,会见到许多经济模型,这样可以逐步加深对经济模型概念的理解。

1.3.2 经济数学模型及其构成

经济模型是一种理论框架,一般是用经济学中的概念描述经济问题中涉及的各种因素,以及这些因素之间的定性关系。为了对经济问题进行更深入的定量分析,我们要用数学语言给出精确的描述,根据经济模型的理论框架建立数学模型。首先,要引入一些变量,表示经济问题涉及的各种因素,用严格的假设表示经济模型中的理论架框,用各种方程式表达各因素之间的联系。将用语言表述的经济模型归纳为数学模型,这是数理经济学作为一种分析方法来研究经济问题最关键的步骤。

数学模型中包含的基本要素是变量、常数和参数。

1. 变量

变量是指在研究这个问题中取值可以变化的量,经济学中常用的经济变量有价格、利润、成本、国民收入、消费、投资、进口、出口等,在经济学中,这些变量用一些特定的符号表示,例如,用 P 表示价格, C 表示成本, R 表示收益, Y 表示国民收入,变量的取值可以变化,如果写出 $P=5$,表示把价格 P 固定在具体的数值上。

模型中的变量分为内生变量和外生变量,内生变量是指其值可通过模型解出的变量。其值源于模型的内部,因此称为内生变量,外生变量源于模型的外部因素,在模型求解过程中,将其视为给定的数据,因此称为外生变量。由于从不同的经济问题提炼的经济模型研究经济问题的着眼点不同,一个模型中的外生变量在另一个模型可能变成内生变量,例如在研究市场问题时,价格 P 无疑是内生变量,但是在消费者支出理论时,价格 P 视为外生变量,作为消费决策的依据。为区分内生变量和外生变量,在外生变量上加下标 0 。如 P 表示价

格(内生变量),而 P_0 表示价格为外生变量,一般用大写字母表示变量。

2. 常数

常数是一个不变的数值,经常用一个数字来表示,常数经常和变量结合在一起,如 $7P$, $0.5R$, 在这种情况下常数称为系数。

3. 参数

参数在模型的求解过程中视为已知数,但未给出具体的数值,参数经常用小写字母如 a, b, c 表示或者用 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 等希腊字母表示,参数和变量结合在一起时,也视为系数,例如 aP 中的 a , 也称为系数。

4. 方程式

在数学上方程式是一种特殊的等式,在数理经济学中,方程式有如下三种类型。

(1) 定义方程,类似于数学上的恒等式,在本书中用符号“ $\equiv$ ”表示,相当于恒等于,例如总利润 π 等于总收益 R 和总成本 C 之差,记作:

$$\pi \equiv R - C$$

(2) 行为方程,行为方程规定了经济变量之间的关系,当其中一个变量变化,另一个变量会如何变化,例如

$$C = 75 + 10Q \quad (1.1)$$

$$C = 110 + Q^2 \quad (1.2)$$

就是两个不同的行为的方程,第一个方程(1.1)表示成本 C 和产量 Q 之间是线性关系,而方程(1.2)表示成本 C 和产量 Q 之间是非线性关系。

(3) 均衡条件,均衡方程只有在模型中涉及均衡概念时,才会出现,均衡方程表示均衡存在的条件,例如

$$Q_d = Q_s (\text{需要量} = \text{供给量})$$

和

$$S = I (\text{储存} = \text{投资})$$

分别是市场模型和国民经济模型中出现的均衡条件。

静态均衡分析

2.1 均衡的含义

均衡的概念可以用不同方式来定义。其中一种常见的定义为“选定的一组具有内在联系的变量经过彼此调整,从而使这些变量所构成的模型不存在内在变化倾向的一种状态”。在此定义中需要注意以下词语。

“选定的”:有可能存在一些变量,由于分析者的选择而未包含于模型之中。均衡仅与选定的特定变量集合有关。如果模型扩大,包含了另外的变量,适合于较小模型的均衡状态便不再适用于新的扩大的模型。

“内在联系”:为了实现均衡状态,模型中的所有变量必须同时处于静止状态。每一变量的静止状态必须与所有其他变量的静止状态相一致。否则某一变量将会变化,并引起其他变量的连锁反应,均衡便不再存在。

“内在的”:所涉及的静止状态仅以模型内部力量的平衡为基础,而假定外部因素不变。

均衡是这样一种状态,当其一旦达到且外力不发生变化时,就有一种维持不变的倾向。一个特定模型的均衡是以缺乏变化趋势为特征的一种状态,因而均衡分析被称之为静态学。

2.2 线性模型

首先考虑最简单的市场模型。市场是商品交换的场所,现在只考察一种商品,其中最核心的问题是商品的价格。商品的均衡价格由商品的供给量和商品的需求量决定,商品的需求量是价格的减函数,商品的供给量是价格的增函数,商品的供给量和商品的需求量都是价格的线性函数。

设商品的需求量为 Q_d , 商品的供给量为 Q_s , 商品的价格为 P , 假设市场出清时市场实现均衡。模型包括一个均衡条件、两个行为方程,这两个行为方程分别决定了市场供给和市场需求,模型可写成:

$$\left. \begin{aligned} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= a - bP, \quad (a, b > 0) \\ Q_s &= -c + dP \quad (c, d > 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 Q_d , Q_s 和 P 为内生变量。

选定横轴表示价格,纵轴表示 Q_d 和 Q_s , 分别作出需求曲线和供给曲线,如图 2.1 所示,

交点为 (P^*, Q^*) , 分别表示均衡价格和均衡的供给量与需求量。

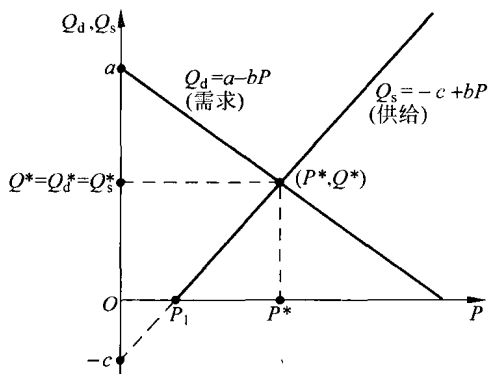


图 2.1

建模完毕, 下一步对模型求解, 由于 $Q_d = Q_s$, 得到

$$\begin{aligned} Q &= a - bP \\ Q &= -c + dP \end{aligned} \quad (2.2)$$

解出均衡价格与均衡数量分别为:

$$P^* = \frac{a + c}{b + d} \quad (2.3)$$

$$Q^* = \frac{ad - bc}{b + d} \quad (2.4)$$

要使此模型具有经济意义, 需满足条件 $ad > bc$ 。

在图 2.1 中可以看出这个条件的含义。市场模型的解 P^*, Q^* 在图形上由供给曲线的交点决定, 若 $Q^* > 0$, 供给曲线的交点必须位于图 2.1 横轴的上方, 这要求两条曲线的斜率和纵截距的相对大小受到约束。根据式(2.4), 给定 $b > 0, d > 0$, 这个约束是 $ad > bc$ 。

下面分别以 D, S 表示需求曲线和供给曲线的点集

$$\begin{aligned} D &= \{(P, Q) \mid Q = a - bP\} \\ S &= \{(P, Q) \mid Q = -c + dP\} \end{aligned}$$

则

$$D \cap S = (P^*, Q^*)$$

因为 D, S 均为直线, 所以只有一个交点, 线性市场模型的均衡是唯一的。

2.3 非线性市场模型

模型(2.1)中需求函数和供给函数都是线性函数, 称为线性市场模型。若其中有一个函数是非线性函数, 就称为非线性模型。在孤立的市場模型中, 用二次需求函数代替线性需求函数, 供给函数仍为线性函数。构建非线性模型:

$$\left. \begin{aligned} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= 4 - P^2 \\ Q_s &= 4P - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

模型(2.5)是一个含有三个变量,三个方程的模型,由均衡条件用变量消去法得到

$$P^2 + 4P - 5 = 0 \quad (2.6)$$

从而解出均衡价格为 $P^* = 1$ (因为价格不能为负值,舍去 $P^* = -5$)。

再利用模型(2.5)的第二个或第三个方程就可以很容易地求出均衡需求量和供给量。

与2.2节类似,可将需求曲线和供给曲线用点集表示为:

$$D = \{(P, Q) \mid Q = 4 - P^2\}$$

$$S = \{(P, Q) \mid Q = 4P - 1\}$$

由均衡条件,均衡点为

$$D \cap S = \{(1, 3), (-5, -21)\}$$

用横轴表示价格 P ,用纵轴表示需求量 Q_d 和供给量 Q_s ,分别作出需求曲线和供给曲线,如图2.2所示,交点为 (P^*, Q^*) ,因为价格和需求量均为非负值,于是均衡点只有一个,即 $(1, 3)$ 。

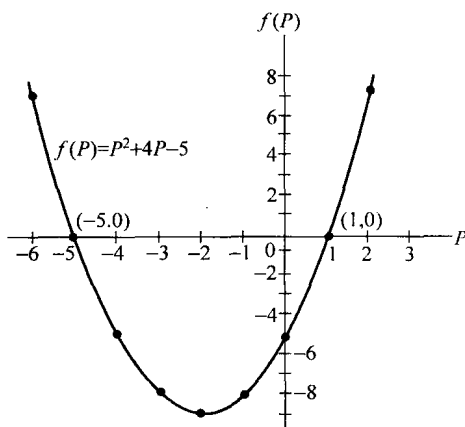


图 2.2

2.4 一般市场模型

在孤立的市場模型中,均衡条件仅包括一个方程 $Q_d = Q_s$, n 种商品市場模型的均衡条件将包括 n 个方程,每个方程代表一种商品,其形式为:

$$E_i = Q_{di} - Q_{si} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.7)$$

如果存在均衡解它将满足 n 个方程。

2.4.1 两种商品市場的线性模型

考虑仅包含两种相互关联的商品市場线性模型,此时两种商品的需求函数与供给函数均假设为线性的。两种商品的供给量和需求量不仅受该商品價格的影响,同时受另一种商品價格的影响。建立模型: