球面三角学

于霖泉　孙耀俊　编

焦作矿业学院 础基部

一九九一年十月

球 面 三 角 学

球面三角是数学的一个分科，研究球面上由大园弧构成的三角形的解法·

我们所在的地球，通常可近似地看作球体，这样，人类就生存于一个球形物体的表面上·我们的天空，通常也作为球状体进行研究，称为天球·这是球面三角学产生和发展的客观基础·

球面三角在天文学、高等测量学、制图学、矿山几何学等方面有广泛的应用。

凡读过中学的人都熟知平面三角学，在发展的顺序上是先有球面三角学，平面三角仅作为球面三角的特殊情形出现的·当球面三角形的球面半径变为无穷大时，球面三角形就变为平面三角形了·

球面三角学创始于两千一百年前，公认的创始人是希腊学者吉巴尔哈（公元前180年～125年）·以后在印度、中亚、阿拉伯及欧州得到了发展，有重大贡献的是著名学者欧拉，拉格朗日，高斯以及纳白尔，卡诺利等人·

目 录

第一章　　球面几何

§1　　球面上的园

空间与一定点O等距离的点的轨迹叫球面,包围在球面中的空间叫球，定点O叫球心，球心到球面的距离叫球的半径·球面也可定义为半园周围绕它的直径的旋转面·

球面上的园

一个平面和球面相截，截痕为园·通过球心的平面截球所得截口为大园，不过球心和球心距离小于球半径的平面截得的园为小园·大园直径等于球的直径，小园的半径小于球的半径·（图1－1）

通过球面上不在同一直径两端的两个点，能并且只能作一个大园·通过一个直径的两个端点可以作无数个大园·通过球面上不在同一直径两端的两点可以作无数个小园，这些小园相交于过这两点的直线·

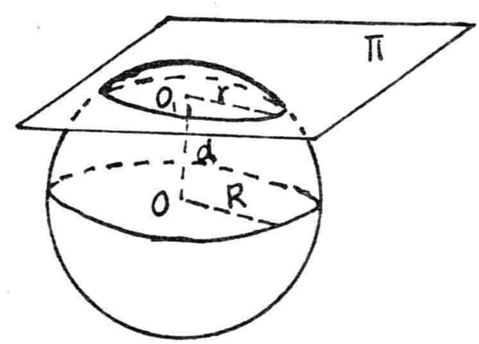

图1－1

球面上两点间的距离

球面上两点A，B间大园弧（劣弧）的长叫做球面上两点A，B间的距离·通常就以AB表示·

我们称大园的一部分为大园弧，小园的一部分为小园弧·联系AB两点只有一条大园弧，有无数条小园弧，以及其他曲线弧·

定理1　在球面上连接A、B两点的所有曲线（弧）之长，以距离AB为最短·

证：过A、B两点作大园弧AB和任意曲线弧ACD⋯GB，当分点无限增加时，把曲线弧分成无穷多个无穷小的弧AC，CD，⋯GB，我们可把它们分别看作大园弧，然后把各点与球心联接，得到多面角O－ACD⋯GB，从立体几何可知：

$\angle AOB < \angle AOC + \angle COD + \cdots + \angle GOB$

因园的中心角和所对的弧同度，我们有园弧

$AB < AC + CD + \cdots + GB$

即大园弧AB＜曲线弧长ACD⋯GB

就是：连接两点A、B的所有曲线弧之长 以距

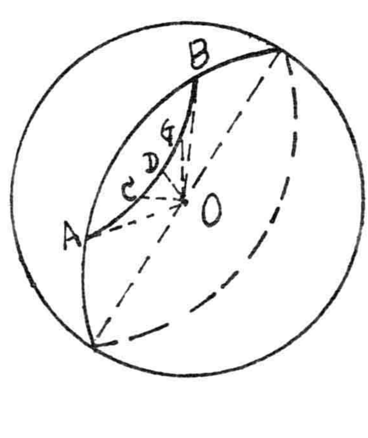

图1－2

离AB为最短。

这里和以后所讲各章，弧的长度是用所含角度的量来度量。

轴、极和极线

轴：设球面上有一已知园（大园或小园），垂直于这已知园所在平面的球直径叫这个园的轴。

显然，每个园都有且仅有一个轴，而许多园可以公有一条轴，共轴的园互相平行。

极：一个园的轴的两个端点，叫这个园的两个极。

显然，平行园有相同的极。

球面上某一个园的极到这个园的园周上任一点的距离，称为极距离。容易证明下述结论：

一个园的极到园周上各点的极距离相等。

关于园的极还有下面的定理。

定理2　大园的极距离为一象限（$=90^\circ$）。反之，球面上一点至其他两点（不是同一直径的端点）的距离都是一象限（$=90^\circ$），则前一点必为通过后两点的大园之极。

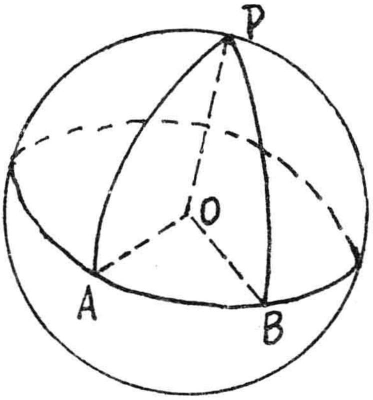

图1－3

证明：设有大园AB和它的极P，有

$\angle AOP=\angle BOP=90^\circ$，

$\therefore PA=PB=90^\circ$。

反之，若$PA=PB=90^\circ$，

则：$\angle AOP=\angle BOP=90^\circ$

即：$PO\perp$大园AB所在之平面，因此，P为大园AB之极。

若P为园CD之极，则P为园分出的一部分球面的中心，PC、PD叫这样的球面的半径，此半径显然也就是极距离。以P为极的小园有无穷多个，而以P为极的大园只有一个，此大园叫做P点的极线。

极线：一大园上各点到球面上一点的距离均等于90°，则那一点叫大园的极，而此大园叫极的极线。

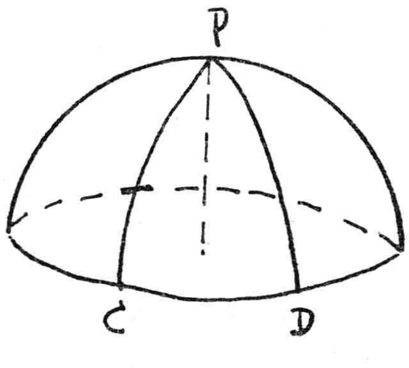

图1－4

§2　球面角、球面二角形和球面三角形

球面角

两大园相交所成之角叫做球面角，其交点叫球面角的顶点，大园弧叫这个球面角的边。在图1－5中，球面角APB与AP′B（记为球面角P，P′）的顶点为P和P′，PAP′，PBP′为其边。

球面角的大小可以用四种方法度量：

1）用二面角A－PO－B的大小度量；

2）用直线角∠AOB的大小度量；

3）AB为P的极线，则极线夹在两边间的部分AB和球面角同度。

4）过顶点P作两边的切线，可用直线角CPD的大小度量。（∵CP⊥PO，DP⊥PO，故∠CPD实为二面角A－PO－B的平面角）

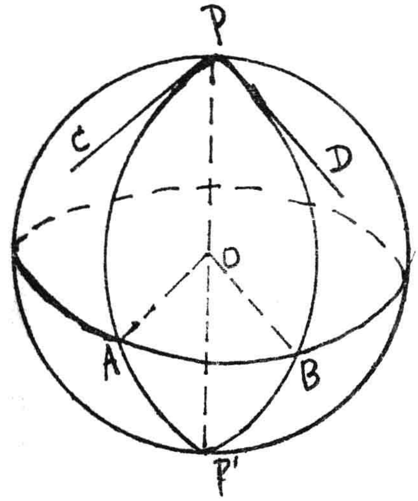

图1－5

球面角有锐角、直角和钝角。两大园相交成90°的球面角，则说这两大园互相垂直。

球面二角形

球面上包围于两个相邻半园周（大园）中间的部分叫做球面二角形。

显然，球面二角形可以看作半园周围绕直径旋转某一角度α所成的旋转面。

球面三角形

相交于三点的三个大园弧所围成的球面上的一部分叫球面三角形。

这三个大园弧叫做球面三角形的边，通常用小写字母a，b，c表示，各大园弧所成的球面角叫做球面三角形的角，用大写字母A，B，C表示。三边、三角统称为球面三角形的六个元素。（图1－6）

将球面三角形ABC的各顶点与球心O连接，构成球心三面角O－ABC，有关系式：

$$a=\angle BOC，\quad b=\angle AOC，\quad c=\angle AOB$$

而角A，B，C分别和二面角B－AO－C，A－BO－C，A－CO－B同度。即有下述结论：

球面三角形的边与所对应的球心三面角之面角同度，而角与球心三面角的二面角同度。（图1－7）

球面三角形可以是二等边的，等边的，直角的或斜的。直角球面三角形可以是一个，两个，三个直角；斜三角形可以有一个，二个，三个钝角。

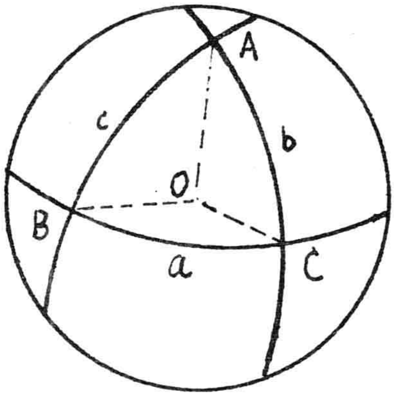

图1－6

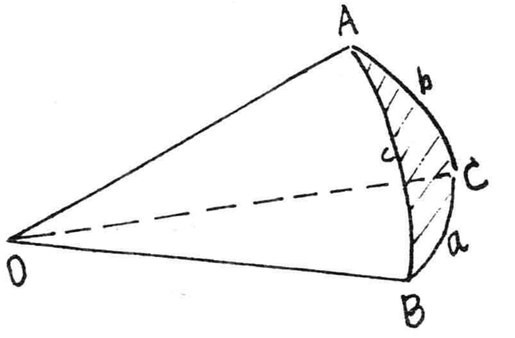

图1－7

我们讨论的球面三角形，其边和角均限于小于$180°$．

极三角形

把球面三角形ABC的顶点取作极并用$90°$的球面半径从每一顶点作极线，两两相交构成一新球面三角形$A'B'C'$，这一三角形叫原三角形的极三角形．（图1－8）

原三角形和极三角形的关系是相互的，即原三角形也是极三角形的极三角形，换言之，极三角形的顶点是原三角形的边的极．

我们仅证A'为BC的极：

用大园弧连接$A'B$，$A'C$，因为B为大园弧$A'C'$之极，$A'B=90°$，C为$A'B'$之极，$A'C=90°$，由定理2 A'必为BC之极．

同理可证B'为AC之极，C'为AB之极，即三角形ABC为三角形$A'B'C'$的极三角形．

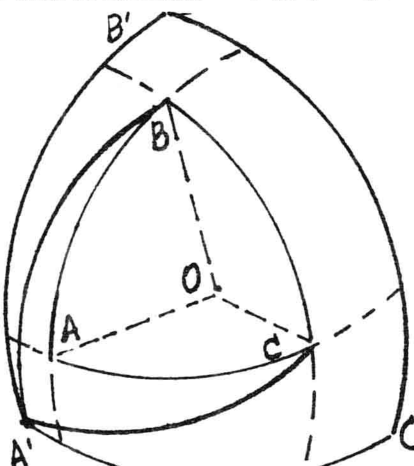

图1－8

定理3　极三角形的边与原三角形之对应角互补．同时因相互性，极三角形的角与原三角形之对应边互补．

证：图1－9中ABC和$A'B'C'$互为极三角形，证

$$a'+A=180° \qquad b'+B=180° \qquad c'+C=180°$$

及　$$A'+a=180° \qquad B'+b=180° \qquad C'+c=180°$$

我们仅证$a'+A=180°$，其他仿此可证．

延长AB，AC交$B'C'$于D，E　则

$$a'+A=a'+DE \qquad （\because A为a'之极）$$

$$=BD+DE+EC'+DE$$

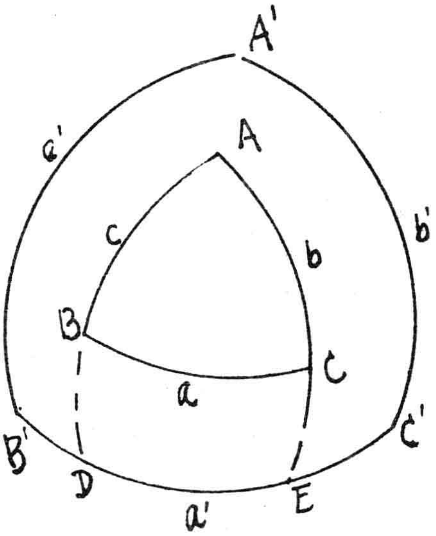

图1－9

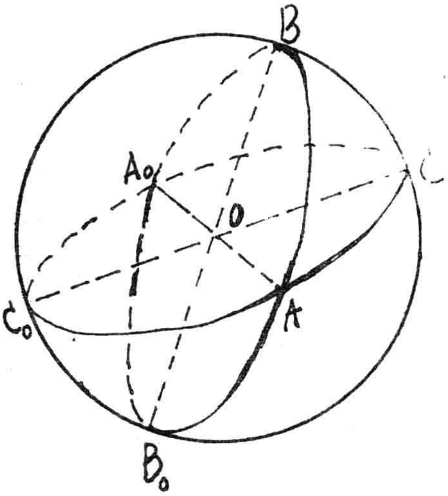

图1－10

$=BE+DC'$

$=90°+90°$ （∵ B'为AE之极，C'为AD之极）

$=180°$

附注：若原球面三角形所有边均小于$90°$，则极三角形在原三角形外边；反之，原球面三角形所有边均大于$90°$，则极三角形在里面；若有大于$90°$也有小于$90°$的边，则极三角形和原三角形相交·

对称三角形

从球面三角形ABC的顶点向球心作半径并延长使和球面交于$A_0B_0C_0$，以A_0，B_0C_0为顶点球面三角形$A_0B_0C_0$称为原三角形的对称球面三角形·（图1－10）

三角形$A_0B_0C_0$的边和角分别等于ABC的相当部分，但两三角形往往并不重合，因为顶点的排列顺序不同·

§3 球面三角形边和角的性质

性质1 球面三角形两边之和大于第三边·

证：如图1－11，由立体几何知，三面角的两个面角之和大于第三个面角，即

$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$

故 $c+a>b$

同理 $a+b>c$， $b+c>a$·

推论 球面三角形两边之差小于第三边·

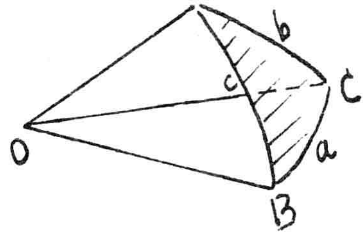

图1－11

性质2　球面三角形三边之和大于$0°$而小于$360°$．

证：∵ $a, b, c>0$，故$a+b+c>0$，又因凸多面角各面角之和小于$360°$

故

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<360°$$

即
$$c+a+b<360°$$

性质3　球面三角形三角之和大于$180°$而小于$540°$．

证：设球面三角形ABC的极三角形为$A'B'C'$，则

$$a'+A=180° \qquad b'+B=180° \qquad c'+C=180°$$

由性质2　$0°<a'+b'+c'<360°$

将　$a'=180°-A$，$b'=180°-B$，$c'=180°-C$代入上式，有

$$0°<180°-A+180°-B+180°-C<360°$$

$$0°<540°-(A+B+C)<360°$$

即
$$180°<A+B+C<540°$$

性质4　球面三角形的两角之和减第三角小于$180°$．

证：由原三角形和极三角线的关系以及性质1知

$$a'+b'>c'$$

$$\therefore \quad 180°-A+180°-B>180°-C$$

即
$$A+B-C<180°$$

同理　$A+C-B<180°$，　$B+C-A<180°$．

性质5　若球面三角形的两边相等，则这两边的对角也相等．反之，若两角相等，则这两角的对边也相等．

证：(1)设球面三角形ABC中，$b=c$，过A作平面OBC的垂线交平面于D，再过D引OB，OC的垂线DE，DF，由于

$\angle AOE=\angle AOF$

(∵ $b=c$)

则　平面$\Delta AEO\equiv\Delta AFO$

("≡"表示全等)

$\therefore$　$AE=AF$

因而　平面$\Delta ADE\equiv\Delta ADF$

$\therefore$　$\angle AED=\angle AFD$

即　$B=C$

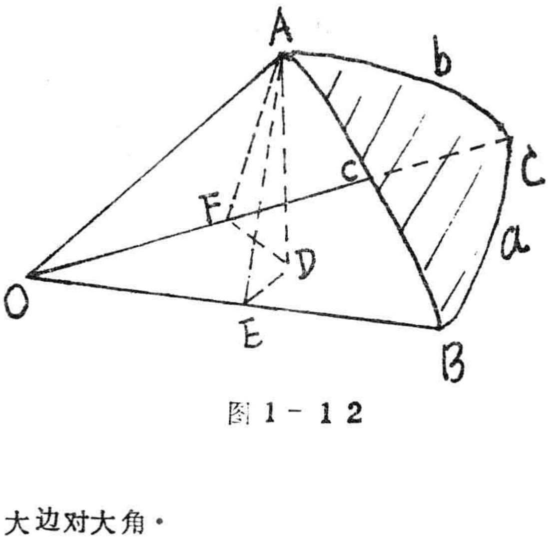

图1－12

(2)若$B=C$，则$b'=c'$

(考察极三角形$A'B'C'$)

由(1)的证明知　$B'=C'$

从而　$b=c$

性质6　球面三角形中，大角对大边，大边对大角．

证：(略)

§ 4　球面三角形的全等

在同球或等球上，两球面三角形的对应边和角分别相等，而且排列顺序相同，则称这两个球面三角形全等·

定理4　在同球或等球上两个球面三角形，有下列条件之一，且相等部分顺序相同，则这两个球面三角形全等·

1）两边及其夹角彼此相等·

2）两角及其夹边彼此相等·

3）三边彼此相等·

4）三角彼此相等·

证：前三种情况可用重迭法从球心三面角全等推出·仅证4）

设两已知球面三角形ABC和DEF，边的顺序相同并且

$A=D$，$B=E$，$C=F$

分别作极三角形$A'B'C'$和$D'E'F'$，有

$$A+a'=180^\circ=D+d'$$

$$B+b'=180^\circ=E+e'$$

$$C+c'=180^\circ=F+f'$$

∵ $A=D$，$B=E$，$C=F$　可知

$a'=d'$　$b'=e'$　$c'=f'$

从本定理3）可知两个极三角形全等，从而对应角相等·

$A'=D'$　　$B'=E'$　　$C'=F'$

又　$A'+a=D'+d$　　$B'+b=E'+e$

$C'+c=F'+f$　　（均为180°）

故：　$a=d$，$b=e$，$c=f$·又从3）知ABC和DEF全等·

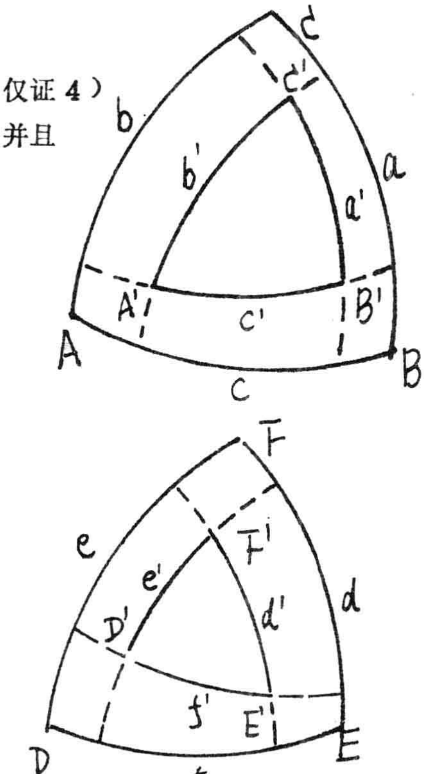

图1－13

习　题　一

1、化下列各量为弧度，精确到小数点后五位·

①$25^\circ16'19''$　　　②$238^\circ12'00.''2$

2、化弧度为度·

①$L=3.273213$；　　　②$L=0.584303$

3、已知中心角，求其所对地球（$R=6370$千米）大园弧的长度：

① $\alpha = 40°10'$；　　　　② $\alpha = 160°08'35''$

4、已知地球（$R = 6370$ Km）大园弧的长L，求其所对中心角·

① L = 20.31Km；　　　　② L = 10,000Km

5、已知莫斯科的纬度$55°45'$，求莫斯科到北极的距离·

6、在球面三角形中，求证：

$$-90° < \frac{1}{2}(A+B-C) < +90°$$

$$0° < \frac{1}{2}(a+b-c) < 180°$$

7、设球面三角形之一边 $c = 90°$，求证：

$$90° < a+b < 270°;$$

$$-90° < a-b < 90°.$$

8、设球面三角形之一角 $C = 90°$，求证：

$$90° < A+B < 270°$$

$$-90° < A-B < 90°$$

9*、A地纬度$55°46'4''$，B地$59°56'$，A、B两地经度之差为$7°13'$，求两地间的距离·

第二章　球面三角形边和角的函数关系

远在公元900年前，阿拉伯数学家亚尔·巴丹提出并证明了球面三角形边的余弦公式，从边的余弦公式可以推出其他一切球面三角的公式，因此边的余弦公式就成了球面三角的基本公式·当然，这仅是人们的约定，也能从其他关系式推出球面三角的所有公式·可以说球面三角公式具有很强的内在逻辑关系·我们下面所讲的基本公式不仅指边的余弦公式，而是泛指主要的常用公式·

§1　球面三角形的基本公式

一、边的余弦公式

取球面三角形ABC，设b，c<90°（注）作球心三面角O－ABC，自A作b，c边的切线分别交OC，OB于M，N，构成两个平面直角三角形：ΔOAM，ΔOAN和两个任意三角形ΔOMN，ΔAMN·

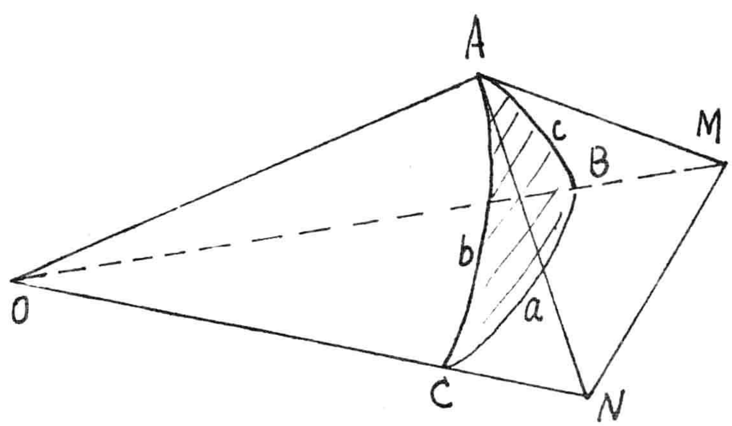

图2－1

根据平面三角的余弦定理，我们有：

$$\overline{MN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A$$

$$\overline{MN}^2=\overline{OM}^2+\overline{ON}^2-2\overline{OM}\cdot\overline{ON}\cos a$$

可得：$\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A=\overline{OM}^2+\overline{ON}^2-2\overline{OM}\cdot\overline{ON}\cos A$

$$\cos a=(\overline{ON}^2-\overline{AN}^2+\overline{OM}^2-\overline{AM}^2+2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A)\big/2\overline{OM}\cdot\overline{ON}$$

$$=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{ON}\cdot\overline{OM}}+\frac{\overline{AN}\cdot\overline{AM}}{\overline{ON}\cdot\overline{OM}}\cos A$$

$$=\frac{\overline{OA}}{\overline{ON}}\cdot\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}}+\frac{\overline{AN}}{\overline{ON}}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}}\cos A$$

$$=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

注：当b、c≥90°时可用类似方法证明·

即：　　$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\ \cos A$
同理：　$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\ \cos B$
　　　　$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\ \cos C$　　Ⅰ

也就是：球面三角形每边的余弦等于其他两边余弦的乘积加上这二边正弦及其夹角余弦的乘积。

二、角的余弦公式

从边的余弦公式，借助于极三角形可推出角的余弦公式：

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \cos B&=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\}\quad \text{Ⅱ}$$

也就是：球面三角形角的余弦等于其他两角余弦乘积冠以负号加上这两角正弦及其夹边余弦的乘积。

三、正弦公式

设有球面三角形ABC，作球心三面角O－ABC，过B引平面AOC的垂线交此平面于D，从D向OA、OC引垂线DE，DF，连接BE，BF。

易知：∠BOC＝a，∠AOC＝b，∠AOB＝c；∠BED＝A，∠BFD＝C，可得：

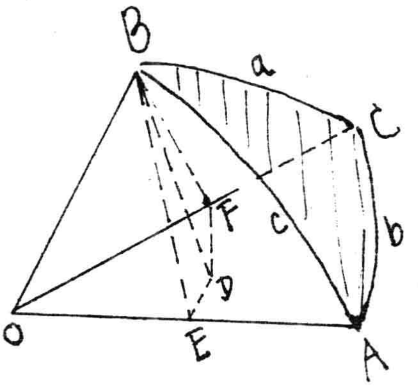

图2－2

$$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\dfrac{BE}{OB}}{\dfrac{BD}{BF}}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\dfrac{BF}{OB}}{\dfrac{BD}{BE}}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD}$$

可知：$$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a}{\sin A}$$

同理：$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

从而：
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \qquad \text{Ⅲ}$$

此即正弦公式或正弦定则。

用语言叙述：球面三角形各边的正弦与其对角的正弦成正比。

从边的余弦公式可推出正余弦第一公式，第一正余弦公式结合正弦定则可导出第二正余弦公式，从第一正余弦公式又可推出余切公式。下面列出这些公式。

Ⅳ（三边两角）第一正余弦公式

$$\sin a\cos C=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A$$
$$\sin a\cos B=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A$$
$$\sin b\cos A=\sin c\cos a-\cos c\sin a\cos B$$
$$\sin b\cos C=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B$$
$$\sin c\cos A=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C$$
$$\sin c\cos B=\sin a\cos b-\cos a\sin b\cos C$$

Ⅴ（三角两边）第二正余弦公式

$$\sin A\cos c=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a$$
$$\sin A\cos b=\sin C\cos B+\cos C\sin B\cos a$$
$$\sin B\cos a=\sin C\cos A+\cos C\sin A\cos b$$
$$\sin B\cos c=\sin A\cos C+\cos A\sin C\cos b$$
$$\sin C\cos a=\sin B\cos A+\cos B\sin A\cos c$$
$$\sin C\cos b=\sin A\cos B+\cos A\sin B\cos c$$

Ⅵ_1（两角夹边一对边）

$$\mathrm{ctg}A\sin C=-\cos C\cos b+\sin b\,\mathrm{ctg}a$$
$$\mathrm{ctg}A\sin B=-\cos B\cos c+\sin c\,\mathrm{ctg}a$$
$$\mathrm{ctg}B\sin A=-\cos A\cos c+\sin c\,\mathrm{ctg}b$$
$$\mathrm{ctg}B\sin C=-\cos C\cos a+\sin a\,\mathrm{ctg}b$$
$$\mathrm{ctg}C\sin A=-\cos A\cos b+\sin b\,\mathrm{ctg}c$$
$$\mathrm{ctg}C\sin B=-\cos B\cos a+\sin a\,\mathrm{ctg}c$$

Ⅵ_2（两边夹角一对角）

$$\mathrm{ctg}a\sin c=\cos c\cos B+\sin B\,\mathrm{ctg}A$$
$$\mathrm{ctg}a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\,\mathrm{ctg}A$$
$$\mathrm{ctg}b\sin a=\cos a\cos C+\sin C\,\mathrm{ctg}B$$
$$\mathrm{ctg}b\sin c=\cos c\cos A+\sin A\,\mathrm{ctg}B$$
$$\mathrm{ctg}c\sin a=\cos a\cos B+\sin B\,\mathrm{ctg}C$$
$$\mathrm{ctg}c\sin b=\cos b\cos A+\sin A\,\mathrm{ctg}C$$

公式Ⅰ反映了三边和一角的关系，若已知三边可求出各角，已知两边夹角可求另一边，例如：

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

只要已知 a，b，c 即可查表求出角A·

公式Ⅱ反映了三角和一边的关系，若已知三角可求出各边，已知两角夹边可求出另一角·

公式Ⅲ反映一个基本事实，边的正弦和对角正弦的比为一常数，故若已知两角一对边或两边一对角我们就可用Ⅲ解三角形·

公式Ⅳ反映了三边和两角的关系，Ⅴ反映了三角和两边的关系，公式Ⅳ_1反映了两角夹边和一对边的关系，Ⅳ_2反映了两边夹一角和一对角的关系，均可用来解三角形·

但在实际应用中，用这些公式解球面三角形是不方便的，因为公式中往往含加减号而不便于取对数，有时要设法把公式变成对数形式，把公式化为对数形式的方法往往视题目灵活进行·

例　在球面三角形中已知边 b，c 和夹角A求 a·

解：可用公式：$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

第一法：查函数表法：　$\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

第二法：改为对数形式：　$\cos a = \cos b(\cos c + \operatorname{tg} b \sin c \cos A)$

令　$$\operatorname{tg} b \cos A = \operatorname{tg} x \qquad (1)$$

则　$$\cos a = \cos b(\cos c + \sin c \operatorname{tg} x) = \cos b\left(\cos c + \sin c \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos b}{\cos x}(\cos x \cdot \cos c + \sin x \cdot \sin c)$$

$$= \frac{\cos b}{\cos x} \cos(x - c) \qquad (2)$$

可用取对数的方法解出 x，代入（2）再用 [illegible] 出 a·但是，仍然很繁，算量很大，需要找出计算较简的公式·

§2　半角公式和半边公式

半角公式是反映一角和三边关系的公式，其推导过程如下：

从　$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

可得：　$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \qquad (1)$$

由平面三角学：　$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$$

可得：$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-2\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}$$

令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则$\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$，$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-b$

$\frac{1}{2}(a-b+c)=p-b$

故 $$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}{\sin b\sin c}$$

或
$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\cdot\sin(p-a)}{\sin c\sin a}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\cdot\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}\quad 7$$

7式称为半角正弦公式，由于A，B，C皆小于$180°$，其半小于$90°$，故根号前取正号·

又由 $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$$

将（1）式代入，化简可得：

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}\end{aligned}\right\}\quad 8$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

叫半角余弦公式·因为$\frac{A}{2}$，$\frac{B}{2}$，$\frac{C}{2}$在第一象限，根号前取正号·

在已知三边求解三角形时上述公式比前节公式简单·但在实用上往往使用正切（余切）公式，因为正切（余切）变化快，结果更满意·

将7式除以8式（例如7式第一式两端分别除以8式第一式两端）可得；

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}\\\operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p\sin(p-b)}}\\\operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}\end{aligned}\right\}\quad 9$$

叫半角正切公式·

令 $\sqrt{\frac{\sin(p-a)\cdot\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}{\sin p}}=m$ 则9式可变为：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\frac{m}{\sin(p-a)}\\\operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\frac{m}{\sin(p-b)}\\\operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\frac{m}{\sin(p-c)}\end{aligned}\right\}\quad 9'$$

可进一步减化计算·

半边公式是研究一边和三角关系的公式，其推导思路和半角公式相同，即从

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

可得： $$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

代入平面三角公式： $\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos a)$ 则

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\cdot\sin C}\right)$$ 同前述变换