文都教育考研精品系列

文都教育

2006 考研数学

经典考题解读

主编：叶盛标

MATHS

新华出版社

文都教育

2006

考研数学经典考题解读

主　编：叶盛标

策　划：文都考研信息中心

新华出版社

图书在版编目（CIP）数据
考研数学经典考题解读/叶盛标主编．—北京：新华出版社，2005.4
ISBN 7－5011－7011－8

Ⅰ．考…　Ⅱ．叶…　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ．013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 021300 号

编　　者：叶盛标
责任编辑：王子予
出版发行：新华出版社
地　　址：北京石景山区京原路 8 号
邮政编码：100043
印　　刷：中煤涿州制图印刷厂
开　　本：787×1092 毫米 1/16
印　　张：5.75
版　　本：2005 年 4 月第 1 版　2005 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1—6000 册
书　　号：ISBN 7－5011－7011－8
定　　价：10.00 元

一份辛劳一份才

华罗庚

妙算还从拙中来，
愚公智叟两分开.
日久方显愚公智，
发白才知智叟呆.
埋头苦干是第一，
熟能生出百巧来.
勤能补拙是良训，
一份辛劳一份才.

名　题

——研读考研数学的国题、校题有感

名题留芳千万年，
考了一遍又一遍.
熟读名题三百道，
不是神仙也神仙！

前　　言

在长期深入研究全国历届考研数学试题（即国题），和 1987 年全国统考之前和之后的全国各高等院校历届考研数学试题（即校题）之后，编者认为，考生在备考过程中必须进行三个方面的研究：第一，研究考纲；第二，研究国题；第三，研究校题．国题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧，校题集中体现了全国各高等院校命题小组各位专家的智慧．国题和校题剔除了题海中的偏题、怪题、难题，是题海中的精品．国题与校题互为题源，相映生辉，必须精心研究，避免在茫茫题海中盲目地探索！

本资料收集的主要是校题中的国题，这些题目最先为各高等院校命题小组的专家所欣赏，遴选为校题；后来又为全国命题小组的专家所欣赏，遴选为国题，是精品中的精品，成为当之无愧的国家级名题．无论从考研角度，还是学习角度，或是教学角度，都值得把它作为数学中的艺术珍品来欣赏，研究，收藏．

编　者

2005 年 2 月 8 日

于武昌巡司河畔

E-mail：yeshengbiao233@sina．com

目　录

§ 1　极限

例 1　(浙江大学 1980,广西大学 1980,成都电讯工程学院 1985,全国 1987 数一)

求正的常数 a 与 b,使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt = 1$ 成立.

[考点] 求极限,求积分上限的函数的导数.

[解答] $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt}{bx-\sin x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} \frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} = 1, \therefore a = 4, b = 1.$$

[欣赏] 求极限的歌诀为:强行代入,先定型,后定法.反复叨念此诀,直至求出极限.本例叨念至 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{b-\cos x}$ 时,b 必为 1.若 $b\neq 1$,则极限为 0,与已知矛盾.

应该说,例 1 就是一道名题.什么是名题?内容与形式结合完美的题谓之名题.一般说来,名题出身于名校、名著、名卷,为读者所欣赏.

例 2　(吉米多维奇 469[①],沈阳机电学院 1979,镇江农机学院 1979,上海化工学院 1979,全国 1990 数二)

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则

(A) $a = 1, b = 1$.　　　　(B) $a = -1, b = 1$.

(C) $a = 1, b = -1$.　　　　(D) $a = -1, b = -1$.

[考点] 求极限.

---

① 吉米多维奇 469 是指吉米多维奇编写的《数学分析习题集》上的第 469 题,下同.

[解答] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{1}{x+1}-ax-b\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}+(1-a)x-b-1\right)=0.$$

根据极限的运算法则，若 $1-a\neq 0$，则极限值为 ∞，而极限值应为零. $\therefore 1-a=0,-b-1=0.\ \therefore a=1,b=-1$. 选(C).

[欣赏] ⅰ) 此题实际上是求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线，斜渐近线为 $y=x-1$.

ⅱ) 在现行的参考资料中，几乎全部是这样做的：

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0,$$

应有 $\begin{cases}1-a=0,\\a+b=0,\end{cases}$ 从而 $a=1,b=-1$.

编者以为，$\dfrac{x^2}{x+1}$ 为假分式，应化为真分式，即"假的"变"真的". 在求导数，求积分时，都应"假的"变"真的"，一旦这样，如释重负！

例 3 (一机部出国进修生 1978，中国矿业学院 1979，全国 1987 数二)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

[考点] 求极限.

[解答] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)\qquad(\infty-\infty)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

[欣赏] 反复叨念求极限歌诀，直至求出极限，轻松愉快！

例 4 (上海化工学院 1979，广西大学 1979，武汉工学院 1979，全国 2000 数四)

若 $a>0,b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

[考点] 求极限.

[解答] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} \qquad (1^{\infty})$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{a^x+b^x}(a^x\ln a+b^x\ln b)}{1}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}\ln(ab)}$$

$$=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

[欣赏] 一年之内，被三校选中，可见本题的内容与形式为三校的命题专家所欣赏. 时至今日，本题早已“下放”当自学考试的题目了！

例 5 （吉米多维奇 525，全国 1989 数三）

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

[考点] 求极限.

[解答] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}} \qquad (1^{\infty})$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\ln(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}}{1}}$$

$$=e.$$

例 6 （吉米多维奇 546，北京邮电学院 1979，山东海洋学院 1980，全国 1994 数二）

计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

[考点] 求极限.

[解答] $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$

$$\because\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{x}}{1-\tan\frac{2}{x}}\right]^x \qquad (1^{\infty})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left[\frac{1+\tan\frac{2}{x}}{1-\tan\frac{2}{x}}\right]^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\frac{1+\tan\frac{2}{x}}{1-\tan\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\ln(1+\tan 2t)}{t}-\frac{\ln(1-\tan 2t)}{t}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\tan 2t}{t}-\frac{-\tan 2t}{t}\right]} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{4t}{t}} = e^4. \quad \therefore 原式 = e^4.$$

例 7 （中国科学技术大学 1983，北京邮电学院 1985，全国 1996 数一）

设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 　　$(n = 1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

[考点] 求数列的极限.

[分析] 由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$

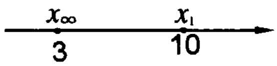
$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$

$l = \sqrt{6+l}$,

$l^2 = 6 + l$,

$l^2 - l - 6 = 0$

解得 $l_1 = 3$　$l_2 = -2$（舍去）



例 7 图

$\{x_n\}$ 应为单调下降有界数列.

[解答] 先证 $\{x_n\}$ 单调下降有下界.

$x_1 = 10, x_2 = \sqrt{6+10} = 4 < x_1$

假　$x_{k-1} > x_k$,

则　$x_k = \sqrt{6+x_{k-1}} > \sqrt{6+x_k} > x_{k+1}$，由数学归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n > x_{n+1}$.

又　$x_1 = 10 > 3$.

$x_2 = \sqrt{6+10} = 4 > 3$,

假设　$x_k > 3$,

则　$x_{k+1} = \sqrt{6+x_k} > \sqrt{6+3} = 3$.

由数学归纳法知 $x_n > 3, (n = 1,2,\cdots)$. 即 $\{x_n\}$ 为单调下降有下界的数列，所以有极限，设极限为 l.

由　$x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$,

$l = \sqrt{6+l}$,

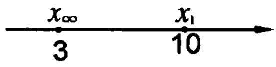
$l^2 - l - 6 = 0$,

$l_1 = 3, l_2 = -2$（舍去），

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3.$

[欣赏] 求由递推公式表达的数列的极限的歌诀为:数列极限看两头,看了两头不用愁,单调有界有极限,先求后证两步走.

所谓数列极限看两头,就是看 x_1,看 $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 这时 $\{x_n\}$ 的单调性出来了,界出来了,结合本题就是:



$\{x_n\}$ 应单调下降,且以 3 为下界.

若 $x_1 = 2 < 3$. 则 $\{x_n\}$ 应单调上升,且以 3 为上界.

建议读者,用能进行开方运算的计算器,根据 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$,由 $x_1 = 10$,计算 $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots$;由 $x_1 = 2$,计算 $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots$. 用几分钟的时间,极限过程就呈现在计算器的屏幕上,真实,具体,有趣!

例 8 (清华大学 1983,全国 1999 数二)

设 $f(x)$ 是区间$[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$

证明数列$\{a_n\}$ 的极限存在.

[考点] 单调有界数列有极限(极限存在准则).

[解答] 由于 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上单调减少,故有

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

因此 $\quad a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right] + f(n) \geqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$ 有下界,又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$ 单调下降,故由单调有界数列有极限的准则知数列$\{a_n\}$ 的极限存在.

[欣赏] 必须将$\int_1^n f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx$,才能与 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)$ 配套,即两个$\sum$ 配套!

例 9 (全国 1998 数一,北京大学 1999)

求$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \right]$

[考点] 两边夹法则,定积分的定义

[解答] $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

$=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\dfrac{2}{\pi}$;

另一方面 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{n+1}(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n})$

$=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x dx=\dfrac{2}{\pi}$.

所以由两边夹法则,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

[欣赏] 适当放大,放小,放出定积分的和式!

例 10 (同济大学等八院校 1985,全国 2000 数二)

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$ 时,证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

[考点] 周期函数的定积分性质与两边夹法则.

[解答] 由于被积函数 $|\cos t|$ 是周期为 π 的连续函数,所以可将$[0,+\infty)$分为小区间:

$0<\pi<2\pi<3\pi<\cdots<n\pi<(n+1)\pi<\cdots$,

对任意正数 x,一定存在正整数 n 或 0,使得

$n\pi<x<(n+1)\pi$.

(1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$,所以

$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx$.

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的周期函数,在每个周期上积分值相等,所以

$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx=n\int_0^{\pi}|\cos x|dx=2n$,

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx=2(n+1)$.

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2) 由(1) 知，当 $n\pi < x < (n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

[欣赏] $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos x|\, dx = 2.$

$\int_0^{n\pi} |\cos x|\, dx = 2n.$

由　$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi,$

得　$2n \leqslant S(x) < 2(n+1).$

进而得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

再进而使用两边夹法则，环环相扣，生动有趣．但在 1985 年同济大学等八院校①考这道题时，没有出现第(1) 题，因而难度很要大一点，因为(1) 的结果对(2) 是提示，启发．也就是说，这道题目的国题更容易为学生所接受，所理解．

为了让读者更全面地掌握本题，请继续欣赏天津大学 1982 年的一道考题．

例 11　(天津大学 1982)

设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数，证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

[考点] 周期函数的定积分性质与两边夹法则．

[解答] 因为对任意的 $x>0$，总存在非负整数 n，使

$nT \leqslant x \leqslant (n+1)T,$

所以，

(1) 当 $f(x)$ 为非负连续函数时，有

$$\frac{1}{(n+1)T}\int_0^{nT} f(t)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{1}{nT}\int_0^{(n+1)T} f(t)dt,$$

依 $f(x)$ 的周期性，上面不等式可以写成

$$\frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)dt,$$

而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

---

① (同济大学等八院校 1985)

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x |\sin t|\, dt}{x}$.

于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

(2) 当 $f(x)$ 为任一连续函数时，若记

$$M=\max_{t\in[0,T]}f(t),\varphi(t)=M-f(t),$$

则 $\varphi(t)$ 是以 T 为周期的非负连续函数. 对 $\varphi(t)$ 应用(1) 的结果，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[M-f(t)]dt=\frac{1}{T}\int_0^T[M-f(t)]dt.$$

由此推出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

即无论那种情形都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

[欣赏]欣赏了上面的两例，实则一例，例 10 是例 11 的特例. 题史为：天津大学 1982⇒ 同济大学等八院校 1985⇒ 全国 2002 数二.

应该说例 10，例 11 都是名题. 为什么要研究名题？因为：1. 国题 = 普题 + 名题；2. 没有名题的国题是没有水平的国题，而研制一道名题是不容易的，这就必然出现，名题反复考：北大考了清华考，清华考了北大考，北大考了全国考，……；3. 数学名题如同文学名著、名诗、名词一样，是一种文化沉淀，是精品，将世代流传. 一个人脑子里不装点中外文学名著、名诗、名词，怎么去表现他的文学素质、文学水平？同样地，一个人脑子里不装点中外数学名题，怎么去表现他的数学素质、数学水平呢？因此，收集名题、研究名题、热爱名题就是我们在教学过程中，在考研备考过程中，教师和学生特别要关注的一个重大问题！

§ 2 导数

例 12 （北京钢铁学院 1981，全国 1987 数二）

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于

(A) $f'(a)$.　　(B) $2f'(a)$.　　(C) 0.　　(D) $f'(2a)$.

［考点］导数的定义.

［解答］原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}+\dfrac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right]$

$=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$.

所以选 (B).

例 13 （西北轻工业学院 1985①，全国 2003 数三）

设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

［考点］函数的极限、导数的定义、间断点.

［解答］由 $f(x)$ 奇函数可知，$f(0)=0$. 于是，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x),$$

即 $x\to 0$ 时 $g(x)$ 有极限，但 $x=0$ 时 $g(x)$ 无定义. 若补充定义 $g(0)=f'(0)$，则函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续. 即 $g(x)$ 有可去间断点 $x=0$，故 (D) 正确，(A)，(B)，(C) 皆错.

［欣赏］已知 $f'(0)$ 存在，一定要用导数的定义，这没有思考的余地.

例 14 （吉米多维奇 960，东北工学院 1979，全国 2004 数四）

设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ________.

［考点］求复合函数的导数.

［解答］$y=\arctan e^x-\dfrac{1}{2}\ln e^{2x}+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$

$y=\arctan e^x-x+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$.

$$y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+1}$$

$$=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

① （西北轻工业学院 1985）

设不恒为零的奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，问 $x=0$ 为函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 的何种间断点？为什么？

$$\therefore y'\Big|_{x=1}=\frac{e}{1+e^2}-1+\frac{e^2}{e^2+1}=\frac{e-1}{e^2+1}$$

[欣赏] 求导数的歌诀为：

导数定义最重要，
导数公式要记牢，
复函求导要剥皮，
隐函求导直接导.

例 15 （重庆大学 1984，全国 1994 数二）

设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

[考点] 求隐函数的导数.

[解答] 应用隐函数求导法则得

$$y'=(1+y')f'$$

所以 $y'=\frac{f'}{1-f'}$. 将上式两边对 x 求导得

$$y''=y''\cdot f'+(1+y')^2f'',$$

于是 $$y''=\frac{(1+y')^2f''}{1-f'}=\frac{f''}{(1-f')^3}.$$

[欣赏] 隐函求导直接导，隐函数的导函数也是隐函数.

例 16 （吉米多维奇 1188[①]，全国 1995 数三）

设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

[考点] 求高阶导数.

[分析] $f(x)$ 为假分式，要化为真分式，即“假的”变“真的”！

[解答] $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$,

$$f'(x)=2\cdot(-1)(1+x)^{-2},$$

$$f''(x)=2\cdot(-1)(-2)(1+x)^{-3},$$

……

$$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}$$

$$=\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

[欣赏] 求 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 时一定要保留自然的美，发现规律，即可求出 $y^{(n)}$.

例 17 （北京邮电学院 1985，全国 1998 数三，数四）

设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

① （吉米多维奇 1188）

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$，求 $y^{(n)}$.