■张宇考研数学系列丛书

■全国著名考研辅导机构推荐用书

最新版

考研数学

概率论与数理统计8讲

■主　编　张　伟　张　宇

■副主编　杨　超　姜晓千

■总策划　海天培训学校

全国一线教学名师倾力打造的**最给力**的考研数学辅导书

重概念，讲想法，娓娓道来，**破解重点疑点**，贴近学生

重实战，讲方法，精心编制，洞悉题源，**与考研无缝接轨**

本书将使**考研学生**在数学基本素养和考研应试能力上有质的提高

同时，本书也是**在校本科生**学习数学极好的辅导用书

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

海天教育
HAITIAN EDUCATION

■张宇考研数学系列丛书
■全国著名考研辅导机构推荐用书

最新版

考研数学
概率论与数理统计8讲

■主　编　张　伟　张　宇
■副主编　杨　超　姜晓千
■总策划　海天培训学校

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学概率论与数理统计 8 讲 / 张伟，张宇主编.—北京：北京理工大学出版社，2012.2
ISBN 978-7-5640-5060-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①张… ②张… Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 172521 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京旺鹏印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 10.25
字　　数 / 200 千字
版　　次 / 2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 / 20.00 元

总　　序

摆在大家面前的《考研数学高等数学 18 讲》、《考研数学线性代数 10 讲》和《考研数学概率论与数理统计 8 讲》这三本书是专门为参加 2013 年全国硕士研究生入学统一考试的考生们编写的复习指导用书，供考生在考研复习的全过程中使用. 这三本书的编写具有以下特点：

第一，从考试中来，到考试中去.

面对考试，首先要做到"知彼"，就是要懂得这门考试到底要考什么. 对于考研来说，只有一本官方文件:《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)，教育部考试中心严格按照《考试大纲》命题，那么这三本书也严格按照《考试大纲》编写，与《考试大纲》无缝接轨. 科学、严谨、新颖的内容设计，对《考试大纲》的所有知识点做了权威且详实的诠释.

第二，从学生中来，到学生中去.

面对考试，还要做到"知己"，就是要懂得考生自己到底什么水平. 哪里是考生熟悉的、简单的考点，哪里是考生陌生的、不易掌握的难点. 这三本书的作者们都是考研教学一线上的辅导专家，对于考生们需要什么了如指掌，所以书的内容文笔鲜活，娓娓道来，讲重点讲难点，贴近考生，无论是作为辅导班的教材，还是考生自学，都是难得的辅导资料.

第三，重视数学思维的讲解与训练.

一般认为，数学题型很重要. 给出一种题型，掌握这种题型的解题步骤，然后去套这个步骤就可以了. 对于考试，我不否认这种说法有一定的合理之处，但我也不完全赞同它.

要想真正掌握数学知识，达到较高的数学解题水平，必须在复习的过程中，重视每个概念、定理和结论背后的数学思维方法，甚至可以在老师的引导下去欣赏和体味这思维背后的哲学涵义. 这个过程，是学习数学不可或缺的，我坚持这一观点不动摇. 这里可以给考生举个例子：

在刚刚过去的 2012 年考研中，有一道全国共用考题：

【例 1】设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，求 $f'(0)$.

在复习过程中，我给考生举过这样一个例子：

【例 2】设 $f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\left(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100\right)$，求 $f'(1)$.

当时，我说，本题的研究对象 $f(x)$ 是多因式相乘，如果直接对其使用导数定义或者先求导再代值，都比较麻烦. 本题希望考生发现，当把 $x=1$ 代入每个因式后，只有第一项 $\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)=0$，而其余所有项都不等于 0，抓住第一项这个"特立独行"的主要矛盾，则

记 $g(x)=\left(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100\right)$，于是 $f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot g(x)$.

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}\bigg|_{x=1}\cdot g(1)=-\frac{\pi\cdot 100!}{2};$$

事实上，如果考生读懂了这个【例 2】的解答，对于【例 1】，就可以轻而易举解决了.

可能有人会说，这个【例 1】还可以用导数定义做，等等，在这里我们暂且不去探讨这个题的多种解法，请注意下面这个事实：在考试结束的时候，很多考生与我联系，他们看到这个题目后，立即想到了四个字——“主要矛盾”，然后自然很顺利地解决了问题.

做事情，要学会抓主要矛盾，这就是思想，这才是有价值的东西，导数定义你们以后可以忘记(只要不在相关领域工作，基本上都会忘记)，但是，你们能够记住“主要矛盾”这种思想方法，这才是学习的真谛.

第四，重视经典好题的分析与解答.

2012 年的考卷，像我在考前说的一样，吸取 2011 年“难度控制”的成功经验，继续保持“中等难度”，整张试卷没有真正的难题. 但是很明显，题目新颖程度增加，计算量增加，如果考生只会套题型，计算能力不强，很多考生可能做不完、考不好，考后全国的考生给我的反馈也是如此.

这里要详细阐述两点：

第一，关于考研数学题的新颖性.

举个例子，在微分方程一讲中，我们知道，若 $y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是 n 阶微分方程 $F(x,y(x),y'(x),\cdots y^{(n)}(x))\equiv 0$ 在区间 I 上的解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为 n 个独立的任意常数，$x\in I$，则称它为该微分方程的通解.

一般地，确定通解中常数的条件就是初始条件，如给出

$$y(x_0)=a_0,y'(x_0)=a_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1},$$

其中，$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为 n 个给定的数，这是考生比较容易掌握的，但是如果题目出得比较新颖，还可以把初始条件给成“极限形式”等，比如这样一个例子：

【例 3】求微分方程 $xy'+(1-x)y=\mathrm{e}^{2x}(0<x<+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=1$ 的特解.

首先化其为标准形式，$y'+\dfrac{1-x}{x}y=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}$，于是其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\ln x+x}\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\ln x-x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x}\left[\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x}[\mathrm{e}^{x}+C].$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=1$，即 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x}[\mathrm{e}^{x}+C]=1$，得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x}+C}{x}=1$，故 $C=-1$，所以原方程满足条件 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=1$ 的特解为 $y=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-1)$.

考生读完此题发现，事实上，题目并不困难，只是增加了极限计算的工作量. 这里想提醒大家，数学题出得新颖，并不意味着一定难，求解它的过程，仍然是基本且经典的. 考生在平时的复习过程中，不要只会套题型，可以多见识一些新颖的提法，或者自己思考一下，这种问题如果换个说法怎么出等，这对于培养数学能力不无裨益.

第二，关于考研数学题的计算量.

考研数学的绝大多数问题，都是通过计算才能得出结论的. 所以，考好数学必须要有扎实的计算基本功，必须要有雄厚的计算能力. 这一点，请所有考生重视，坚持每天做计算，手不能生，细水长流，才能水到渠成.

现举个例子请考生做题并体会. 我想提醒大家，千万不要眼高手低，要踏实做题，踏实计

算，要做就做到底.

【例 4】计算 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

【分析与解答】本题考查二重积分的计算，是一道计算量较大的难题. 答案：$\dfrac{16}{15}$，你做做看？能做出来吗？

首先，由 x 与 y 的轮换对称性，有

$$I=\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$2I=\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\dfrac{(x+y)^2}{xy}}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln(x+y)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln x}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{(x+y)\ln(x+y)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}y-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{x+y}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}y.$$

令 $x+y=u$（视 x 为常数），得 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\frac{u\ln u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x\int_x^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u.$

交换积分次序，得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{u\ln u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\int_0^u\ln x\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{u^2\ln u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\int_0^u\ln x\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{u^2\ln u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}(u\ln u-u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u=\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

本书的例题既注重了题目的新颖性，又把握了题目的计算量，例题丰富、贴近考研，考生一定要把这三本书中的例题好好吃透.

考生如果严格按照以上几点去使用本书，并且坚持每天做题和总结，就能够形成比较系统全面的知识结构和解题能力，从而顺利通过考试，并取得高分.

感谢教学团队中各位多年从事考研数学命题研究工作和教学工作的专家们，他们治学严谨、功底深厚，对考研命题规律把握准确、对考生备考现状了若指掌. 相信这三本书一定能够给广大考生的考研复习提供极大帮助！预祝广大考生考试成功！

张　宇

2012 年春　于北京

本书前言

重温经典　领悟精髓

概率论与数理统计学科的发展是不缺乏经典故事的，其起源就是古典概型.概率论与数理统计理论不断地在扔硬币、摸球和赌博博弈中发展，一个个经典的故事不断完善着其公理化体系，概率论的理论也不断地影响着我们的生活.正如 1974 年著名的概率学者 Feller 在 *A Course in Probability Theory*（Academic Press，New York）著作中的所说，任何领域的理论要严格地区分公理体系、直观历史背景和应用，这三个方面正是整个理论的精髓，缺一不可.原文如下：

In each fields we must carefully distinguish three aspects of theory，(a) the formal logical content，(b) the intuitive background，(c) the application. The character，and the charm，of the whole structure cannot be appreciated without considering all three aspects in their proper relation.

可以看出概率论与数理统计课程与一些经典的故事相联系的.

纵观十几年来的概率论与数理统计考题无不是与经典的故事相联系的，经典好题既要具备故事背景还要有现实的应用，相对于繁琐的高等数学题目和抽象的线性代数题目，概率论与数理统计的题目比较具体和现实.概率论中常见分布影响着我们，每一个常见分布都有着自己背后的故事.就拿近三年的考题来说，从 2009 年的有放回摸球模型到 2010 年无放回摸球模型，这些都是古典概型.正态分布是概率中的重要分布，2011 年的考题是关于正态分布的参数估计问题，2012 年仍是正态分布的参数估计问题（数学一）.要学好这门课程，就要做个有故事的人，掌握常见分布.

概率论与数理统计这门课程的研究对象为随机变量，其研究主要内容有古典概型、概率分布、数字特征和参数估计等问题，内容概括为如下关键词

- Stochastic Variable（随机变量）
- Classical model（古典概型）
- Characters（数字特征）
- Evaluation（估计）
- Distributions（概率分布）

如果将上述的关键词的首字母结合（Unite）起来，形成了 SUCCEED（成功），将能够决胜于考研.

下面通过几个经典的故事来告诉大家这门课程复习中的几点启示.

故事 1:Banach 问题

波兰数学家 Banach 随身带着两盒火柴,每盒有 n 根火柴,每次用火柴时随机的任取一盒从中取出一根火柴,求他取出一盒火柴后发现用完而另一盒还有 r 根火柴的概率.

很多同学认为这是一个古典概型,共有 $2n$ 根火柴,其中一盒火柴用了 n 根,另一盒火柴用了 $n-r$ 根,于是概率为$\frac{C_n^n C_n^{n-r}}{C_{2n}^{2n-r}}$,事实上这是错误的,这里其中一盒用完,另一盒剩下的火柴数并非是等可能的概率.

这样问题可以这样去理解:每次用火柴视为随机试验,试验只有两个结果,要么取自甲盒要么取自乙盒,设事件 A 为火柴取自甲盒,事件 $\overline{A}$ 为火柴取自乙盒,

$$P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}.$$

而且每次试验的结果相互独立,当一盒火柴取完而另一盒剩余 r 根火柴的事件理解为独立重复试验次数为 $2n-r$,且第 $2n-r$ 次试验结果为 A,之前 $2n-r-1$ 试验中事件 A 发生了 $n-1$ 次,事件 $\overline{A}$ 发生了 r 次,于是,

甲盒火柴用完时发现乙盒火柴剩余 r 根的概率为 $C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)$,

同理,乙盒火柴用完时发现甲盒火柴剩余 r 根的概率也为 $C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)$.

综上所述,当一盒火柴用完发现另一盒火柴剩余 r 根的概率

$$C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)\times 2=C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}.$$

上述问题的解决完全取决于对问题的理解.

故事 2:Pascal 分布

在贝努利试验中,设成功的概率为 p,若记随机变量 X 第 r 次成功出现时的试验次数,求 X 的分布律.

这个问题关键之处是在于对第 r 次成功出现时的试验次数为 k 的翻译,即要求第 k 次试验成功,前面 $k-1$ 试验共有 $r-1$ 试验是成功的,于是

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}p=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}(k=r,r+1,\cdots).$$

通过上述两个故事可以总结如下启示:

启示 1:理解能力是基础.

启示 2:翻译能力是关键.

故事 3:Bertrand 奇论

Bertrand 问题是在一个圆周上随机的任取一根弦,求其长度大于内接等边三角形边长的概率.

这里可以假定单位圆周，单位圆的内接等边三角形的边长为$\sqrt{3}$，在单位圆周上随机取一条弦长度大于内接等边三角形边长当且仅当单元圆心到弦的中点距离小于$\frac{1}{2}$，记 p 为单位圆任取一根弦长度大于内接等边三角形的边长概率，下面有三种解法.

解法 1：将弦的一端 A 固定在单位圆上，随机的在单位圆周上取另一个点 B，连接成弦 AB，如图 1 所示，满足长度大于单位圆内接等边三角形边长的弦 AB 的 B 点落在弧段B_1B_2，其中 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，因此 $p=\frac{1}{3}$.

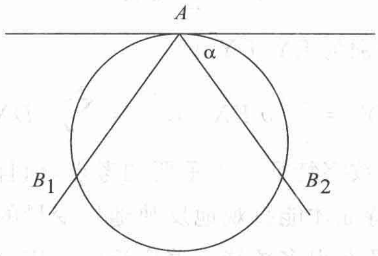

图 1

解法 2：设定弦垂直于某直径，先取定一条直径 A_1A_2，然后在直径上随机的选取点 B，过 B 点作垂直于 A_1A_2 的弦，如图 2，

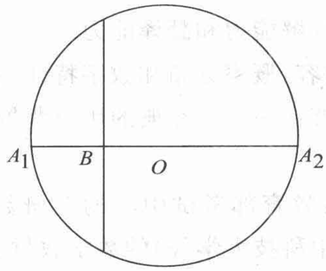

图 2

于是，B 点到圆点距离小于$\frac{1}{2}$的概率为 $p=\frac{1}{2}$.

解法 3：以单位圆心建立直角坐标系，选取圆内的点 $A(x,y)$，以 A 为中点作单位圆的弦，该弦是唯一的，则点 A 必须落在半径为$\frac{1}{2}$的圆周内部，即

$$p=\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi}=\frac{1}{4}.$$

上述三种解法都是正确的，这说明单位圆上弦取法的随机性(Stochastic)，而刻画随机变量的概率分布(Distribution)是至关重要的. 上述三种不同的概率分布导致不同的概率结果. 解法 1 中假定弦的端点在单位圆周上服从均匀分布的，解法 2 中假定垂直于直径的弦中点在直径上服从均匀分布的，解法 3 中假定弦的中点在单位圆内服从均匀分布的.

故事 4：组合投资问题

某人持有一笔资金，记为 1 个单位资金（100 万），现在他要购买 n 种股票，股票的收益分别为相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，记 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 分别为投资 n 种股票的份额，其中 $a_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，求此组合投资收益期望与风险.

概率论在经济上有着重要的应用，此时刻画的投资组合的收益期望和收益方差. 这里构建组合投资收益函数

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

而投资收益期望与风险分别为 EY，DY. 即

$$EY = \sum_{i=1}^{n} a_i EX_i, DY = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 DX_i$$

概率论与数理统计考点中数字特征是很重要的考点，而且每年必考. 这一方面是因为随机变量是随机的，而只有数字特征才能直观地反映随机变量的均值和偏离均值的程度的量；另一方面，随机变量的数字特征在很多领域有着广泛的应用，可见数字特征的重要性.

通过上述两个故事可以总结如下启示：

启示 3：概率分布是前提.

启示 4：数字特征是目标.

复习中需要培养两种能力：理解能力和翻译能力.

概率复习时聚焦两个方面内容：概率分布和数字特征（统计学聚焦：参数估计）.

编者写到此处有些激动，能够在一个个经典的历史背景下理解这门课程，可谓是重温经典，感悟精髓.

最后，感谢以下资料的作者：教育部考试中心的考研数学官方文件，众多高校（清华大学、复旦大学、上海交通大学、华中科技大学等）的数学教材和考试试题.

感谢责任编辑老师和我的同事对本书出版所付出的巨大努力！

由于本人的水平有限，对本书编写中存在的不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正.

作　者

2012 年 1 月

目　录

第 1 讲　随机事件与概率

导　　语

本讲内容是概率论的基础理论与理论依据，在后面几讲中都有其具体的表现，毫不夸张地说，学好这一讲是在概率论试题上取得高分的前提.

大纲要求

(1)了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

(2)理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式，以及贝叶斯(Bayes)公式等.

(3)理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

知识体系

- 随机事件与概率
  - 基本概念
    - 随机试验
    - 样本空间
    - 随机事件关系及运算
      - 和、积、差、逆
      - 交换、结合、对偶等
  - 概率
    - 概念
    - 古典概型与几何概型
    - 计算公式：加法、减法、求逆公式
    - 条件概率
      - 乘法公式
      - 全概率公式和贝叶斯公式
  - 独立
    - 概念
    - 贝努利概型

1.1 考试内容分析

1.1.1 基本概念

1. 样本空间和随机事件

定义 1.1 随机试验 E 所有可能结果的全体,称为样本空间,记为 Ω. 每一个可能的结果称为样本点或是基本事件,记为 ω. 这里样本空间为基本事件空间. 随机试验的样本是由试验的目的确定的.

定义 1.2 设随机试验 E,称样本空间 Ω 的子集为随机事件,简称事件,常记为 A,B,C 等;随机事件其本质为集合,若一次试验下出现 $\omega\in A$,则称事件 A 发生,若一次试验下出现 $\omega\notin A$,则称事件 A 没有发生.

【注】样本空间和随机事件均为集合,可以就具体的随机试验来分析,加强对定义的理解.

2. 随机事件关系及运算

以下内容从集合和事件含义两方面讨论,有助于大家记忆.

表 1.1 随机事件关系与运算

关系及运算	集合角度	事件角度
$A\subseteq B$	$\forall x\in A$,则 $x\in B$	事件 A 发生必导致事件 B 的发生
$A=B$	$A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$	事件 A,B 等价
$A\cup B$	集合 A,B 的并集	和事件:事件 A,B 至少有一个发生
$A\cap B$	集合 A,B 的交集	积事件:事件 A,B 同时发生
$A-B$	集合 A,B 的差集	差事件:事件 A 发生,但事件 B 不发生
$\overline{A}$	集合 A 的补集	逆事件:事件 A 不发生
$AB=\varnothing$	集合 A,B 的交集为空集	互斥:一次试验下事件 A,B 不能同时发生

事件间运算律与集合的运算律是一致的,不需要做重复记忆.(交换律、结合律、分配律、德摩根律)

【注】记住以下几点:

(1)学会事件的表示,例如"至少""至多""恰有"等关键词.

(2)记忆事件运算性质中的德摩根律,即

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

(3)事件的运算可以借助于集合的文氏图.

【例 1.1】设随机事件 A,B 满足 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则下列选项中正确的是(　)

(A)$A\cup B=\varnothing$　　(B)$A\cup B=\Omega$　　(C)$A\cup B=A$　　(D)$A\cup B=B$

【分析与解答】本题考察的是随机事件的运算.

由于 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，利用德摩根律得 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=AB$，即

$$A\cup B=A\cup B\cup AB=(A\cup B)\cup\overline{(A\cup B)}=\Omega.$$

答案为(B).

3. 概率的概念和性质

1) 概率的概念

定义 1.3　设随机试验 E，样本空间 Ω，对于随机事件 $A\subset\Omega$，则将 $P(A)$ 定义为满足下面三个条件的集合函数

(1)$P(A)\geqslant 0$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性，设 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$，两两互斥，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

本质上，概率是度量随机事件发生的可能性，概率为零的事件是可能发生的，同时概率为1的事件不一定会发生. 这里要区分不可能事件与概率为零的事件以及必然事件与概率为1的事件，见例1.14.

2)概率的重要公式

(1) 有限可加性 设 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(2) 加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

【推广】设有 n 个随机事件 $A_1,\cdots,A_n$，则

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

【注】多个事件的和事件的概率求解可以利用此公式，但是有时用起来比较复杂，如果事件间有独立性的条件，则利用概率公式将和事件的概率转化为逆事件的乘积，这将大大简化计算的过程.

(3)事件 A 与逆事件 $\overline{A}$ 满足

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

(4) 减法公式 设随机事件 A,B,

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地,当 $A\supset B$ 时,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

【注】应用概率公式计算时注意事件间的运算性质和运算律.

【例 1.2】设事件 A,B 互斥(互不相容),则(　　)

(A)$P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　(B)$P(AB)=P(A)P(B)$

(C)$P(A)=1-P(B)$　　(D)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【分析与解答】本题考查的是事件互斥条件下的概率.

由于事件 A,B 互斥,则 $AB=\varnothing$,即得 $P(AB)=0$,事实上,本题没有说明事件 A,B 是否独立,所以选项(B)不能直接得到;同时事件 A,B 不一定是互逆事件,不能选(C);对选项(A),

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B),$$

不能计算出结果;选项(D),

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

故本题答案为(D).

1.1.2　古典概型与几何概型

1. 古典概型

定义 1.4　设随机试验 E 的样本空间中包含有限个等可能的样本点,则称此试验为古典概型.

设古典概型为 E,样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,随机事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 含基本事件数}}{\Omega\text{ 中含基本事件数}}.$$

值得一提的是古典概型中的经典原理——抽签原理.

【例 1.3】袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第 2 个人取到黄球的概率是________.

【分析与解答】本题考查的是古典概型中的抽签原理.

利用抽签原理,依次取球,第 i 人取出黄球的概率不变,为黄球所占的比例.

设 A_i 表示第 $i(i=1,2)$ 人取出黄球,于是

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.$$

事实上,这是古典概型中的抽签原理,即 $P(A)$ 与 i 无关,即取黄球有先后顺序,各人取