普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

微积分

杨宪立　主　编
熊　霄　蒋世辉　副主编

清华大学出版社

普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

微积分

杨宪立　主　编
熊　霄　蒋世辉　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是编者总结多年的教学经验和教学研究成果，参考国内外若干优秀教材，根据教育部颁布的《微积分》教学大纲进行认真编写而成的．本书概念和原理的表述科学、准确、清晰、平易，语言流畅．例题和习题重视基础训练，丰富且有台阶、有跨度，有助于培养学生分析和解决问题的能力．而且为了方便教学与自学，在附录中给出了习题参考答案与提示．本书主要内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分与定积分、无穷级数、多元函数微分学、微分方程与差分方程等．此外，本书还着重阐述了一些经济管理学进行数量分析所需的常用概念、方法及其数学模型，如边际函数、弹性函数、库存函数、成本函数等．

本书可作为普通高等院校经济管理类和文史类本科学生和高职高专学生的教学用书．

图书在版编目(CIP)数据

微积分/杨宪立主编．—北京：清华大学出版社，2011.11
(普通高校"十二五"规划教材・公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-27121-5

Ⅰ．①微…　Ⅱ．②杨…　Ⅲ．①微积分－高等学校－教材　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 222695 号

责任编辑：梁云慈
责任校对：王荣静
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印 张**：15　**字 数**：420 千字
版　次：2011 年 11 月第 1 版　**印　次**：2011 年 11 月第1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：29.00 元

产品编号：044290-01

前言

目前,随着我国社会主义经济建设的发展和经济改革的深入,经济数学的教学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学、研究人员和实际工作者的重视.很多院校加强了数量经济学方面的研究和教学工作,相继增开了一些有关的必修课或选修课.近年来,高等院校的经管专业及文史专业学生队伍的构成素质也有了很大的变化,这一切都对经济数学的教材与教学提出了更高的要求.为此,在本书的编写过程中,我们密切结合教学实际,根据编者多年的教学经验,精选内容,努力使教材的观点正确稳妥,材料充实可靠,文字通俗易懂、深入浅出,并且尽可能地从内容和方法上反映近年来微积分这门课在教学和科研中的最新成果.

与同类教材相比,本书突出体现了三大特点:第一,淡化某些繁杂形式,注意核心内容,但简而不略;第二,加强了理论与实际的联系,注重该学科知识在社会生活,特别是在社会主义建设中的具体应用;第三,为了帮助读者更好地学好该课程,我们在每节后配备了一定数量的练习题,每章节后配备了形式多样的复习题,并在附录中给出了参考答案或提示.

本书由杨宪立主编,熊霄、蒋世辉任副主编.参加编写的人员(及相应的撰写章节)按姓氏字母顺序排列如下:焦科研(第 5 章定积分)、蒋世辉(第 3 章中值定理及导数的应用)、李艳军(第 1 章函数与极限 1.1~1.7 节)、时文俊(1.8节和第 2 章导数与微分)、熊霄(第 8章微分方程与差分方程)、张玉灵(第 7 章多元函数),杨宪立(第 4 章不定积分和第 6 章无穷级数).

由于编者水平有限,加之时间仓促,缺点、错误在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2011 年 6 月

目录

第 1 章

函数与极限

函数是数学中重要的研究对象，也是经济学研究中量与量关系的数学体现. 而极限是微积分中的重要概念，微积分中的其他一些概念都是以极限为基础推导而来的.

1.1 函数与初等函数

一、函数的概念

在给出函数的概念之前，先来回顾一下集合与区间的概念.

1. 集合

在经济管理学中，为了研究某个问题常常把具有某种共同特性的事物放在一起进行分析，由这些特定的事物或研究对象组成的全体在数学研究中就称为集合. 比如一个超市总是把商品分成食品类、日用品类、电器类等并将具有同一性质的物品上架在同一区域. 构成集合的对象称为集合的元素.

元素为实数的集合称为实数集，常用的实数集有：全体实数集 $\mathbf{R}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，整数集 $\mathbf{Z}$，正整数集 $\mathbf{Z}^+$，自然数集 $\mathbf{N}$，空集 $\varnothing$ 等.

常用的集合的计算有子集、交集、并集、补集、差集运算，这些在中学的学习过程中已经接触过，这里不再重述. 下面主要介绍集合的笛卡儿乘积运算.

定义 1.1 设 A、B 为任意两个集合，由集合 A 中的任意一个元素 x 与集合 B 中的任意一个元素 y 组成一个有序数组 (x,y)，所有这些有序数组构成的集合称为集合 A 与集合 B 的**笛卡儿乘积**，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

例 1.1 已知集合 $A=\{0,2,4\}$，$B=\{1,3\}$，求 $A\times B$，$B\times A$.

解 $A\times B=\{(0,1),(0,3),(2,1),(2,3),(4,1),(4,3)\}$

$B\times A=\{(1,0),(3,0),(1,2),(3,2),(1,4),(3,4)\}$

2. 区间与邻域

区间是实数集中常用的一类集合，集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$. 类似地

还可以定义其他区间，比如**开区间**(a,b)表示集合$\{x|a<x<b\}$，**半开半闭区间**$(a,b]$表示集合$\{x|a<x\leqslant b\}$，**半闭半开区间**$[a,b)$表示集合$\{x|a\leqslant x<b\}$，这些区间通称为**有限区间**. 而开区间$(-\infty,+\infty)$，半开半闭区间$(-\infty,b]$，半闭半开区间$[a,+\infty)$这类区间称为**无限区间**.

实数x_0的δ邻域是指区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$或集合$\{x||x-x_0|<\delta\}$，其中$\delta>0$. 实数x_0的δ空心邻域是指区间$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0-\delta)$或集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$.

3. 函数

定义 1.2 设有一个非空实数集D，若对任意的$x\in D$，在某对应法则f的作用下，都有唯一的y与之对应，则称从x到y构成了一个**函数关系**，记为$y=f(x)$.

这里集合D称为函数的定义域，x为自变量，y为因变量，y的所有取值构成的集合为函数的**值域**，常记为$Z(f)$.

当两个函数的定义域和对应法则完全相同时就称这两个函数为同一个函数. 通常情况下求函数的定义域是指使得函数有意义的自变量的所有取值，也叫函数的自然定义域.

例 1.2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(1-x)$；　　(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-3x-x^2}}+\arcsin x$

解 (1) 由$1-x>0$，可得$x<1$，因此该函数的定义域为$\{x|x<1\}$.

(2) 因为$\begin{cases}4-3x-x^2>0\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，解不等式方程组可得$-1\leqslant x<1$，因此该函数的定义域为$\{x|-1\leqslant x<1\}$.

在求函数的定义域时，如果函数是由几个简单函数组合而成的，则该函数的定义域应该是这几个函数的定义域的交集.

例 1.3 判断下列函数是不是同一个函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=\ln(1+x^2)^2$ 与 $g(x)=2\ln(1+x^2)$.

解 (1) 因为$f(x)$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$，且$x\neq1\}$，而$g(x)$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}\}$，两个函数的定义域不同，所以$f(x)$与$g(x)$不是同一个函数.

(2) 因为对任意的x，有$1+x^2>0$，所以两个函数的定义域相同. 根据对数的性质可知，两个函数是同一个函数.

二、函数的几个简单性质

1. 函数的单调性

设函数$y=f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$，若对任意的$x_1\in I$，$x_2\in I$，且$x_1<x_2$，总

有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I **内单调递增**，区间 I 称为**函数的单调递增区间**；若对任意的 $x_1\in I, x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调递减，区间 I 称为**函数的单调递减区间**.

例 1.4　(1) 函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.

(2) 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对 $\forall x\in D$，有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**偶函数**.

例 1.5　(1) 函数 $y=x^3$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

(2) 函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为奇函数.

(3) 函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为偶函数.

3. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若存在一个正数 M，使得对任意的 $x\in I$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上为**有界函数**.

由有界性的概念可以知道，函数的有界性是一个局部性概念，可以是在整个定义域上为有界函数，也可以是指在定义域的一部分区间上为有界函数.

例 1.6　函数 $y=\sin x$，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点 x 处，总有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上为有界函数.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 其中 T 称为**函数的周期**，一般指函数的**最小正周期**.

例 1.7　(1) 函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

(2) 函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、初等函数

1. 基本初等函数

通常把下列函数称为**基本初等函数**.

(1) 常量函数：$y=c$，其中 c 为常数

(2) 幂函数：$y=x^\alpha$，其中 α 为常数

(3) 指数函数：$y=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$ 为常数

(4) 对数函数：$y=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$ 为常数

(5) 三角函数：$y=\sin x \quad y=\tan x \quad y=\sec x$

$y=\cos x \quad y=\cot x \quad y=\csc x$

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x \quad y=\arccos x$

$y=\arctan x \quad y=\operatorname{arccot} x$

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $\mathbf{Z}$，且 $D\cap\mathbf{Z}\neq\varnothing$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为**复合函数**.

根据复合函数的定义，可以把复合函数看做是由一些简单函数复合而成的.

例 1.8 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\arctan(x^2+1)$； (2) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$

解 (1) $y=\arctan u$，$u=x^2+1$

(2) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$

3. 分段函数

若一个函数在不同的定义区间上函数表达式用不同的函数关系表示，则这样的函数称为**分段函数**.

例 1.9 为鼓励市民节约用水，某市居民单户每月用水计费按以下标准：若用水量不超过 4 吨，每吨收费 3 元；若用水量超过 4 吨，超出部分每吨收费 6 元. 则单户每月用水量 x(吨)与费用 p(元)之间的关系可表示为

$$P(x)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 6x-12, & x>4\end{cases}$$

分段函数是一个函数，而不是两个函数，只是在不同的定义区间上函数的表达式不同而已.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，其对应的函数值的集合为 $\mathbf{Z}$. 若对任意的 $y\in\mathbf{Z}$，有唯一的 $x\in I$ 使得 $f(x)=y$，则在集合 $\mathbf{Z}$ 上确定了一个新的函数关系，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in\mathbf{Z}$.

函数 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量为 y，定义域为 $\mathbf{Z}$，因变量为 x，值域为 I. 因习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故函数 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.10 求函数 $y=4x+3$ 的反函数.

解 从函数 y 的表达式中解出 x，即

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-3}{4}$$

将上式中 x 与 y 交换之后即得函数 $y=4x+3$ 的反函数为：$y=\frac{x-3}{4}$.

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而构成的函数称为**初等函数**. 在我们研究的实际问题中遇到的函数大都为初等函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{x+1}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\ln(x-1)$；

(3) $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$；　　(4) $s(t)=\sqrt{\ln\frac{3t-t^2}{2}}$

2. 求下列函数表达式：

(1) $f(x-1)=x^2+3x+1$, 求 $f(x)$, $f(1)$；　　(2) $f(x)=\frac{x}{1-x}$, 求 $f(f(x))$

3. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{x^2+x}$；　　(2) $y=e^{-\sin x}$；　　(3) $y=\ln^2(\arcsin(x+1))$

1.2　数列的极限

一、数列

在中学的学习中已经接触过数列，那时把按照一定顺序排成的一列数称为**数列**. 这里利用函数给出数列的概念.

设 $y_n=f(n)$ 是定义在正整数集上的一个函数，称为**整标函数**，当自变量 n 依照 $n=1,2,3,\cdots$ 依次取值，所对应的函数值 $y_1,y_2,y_3,\cdots$ 组成的一列数就称为**无穷数列**，简称为**数列**，记为数列 $\{y_n\}$. 下面给出几个数列的例子.

(1) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$，即　$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{n^2},\cdots$

(2) $\{n\}$，即　$1,2,3,\cdots,n,\cdots$

(3) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，　即　$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(4) $\{(-1)^n\}$，　即　$-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$

(5) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$， 即 $-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{3},\cdots,\dfrac{(-1)^n}{n},\cdots$

若一个数列$\{y_n\}$满足对任意正整数n，总存在$M>0$，使得$|y_n|<M$，则称该数列为**有界数列**. 上面的五个数列中(1)、(3)、(4)、(5)均为有界数列.

二、数列的极限

观察上面五个数列，数列(1)随着n的无限增大，数列的项无限地接近于0；数列(3)随着n的无限增大，数列的项无限地接近于1；数列(5)随着n的无限增大，数列的项从0的两侧无限地接近于0. 这三个数列有一个共同的特征：随着n的无限增大，数列的项无限地接近于某一个固定的常数A. 而在数学上，两个数无限地接近可以用两个数之间的距离来进行描述，即两个数的距离$|y_n-A|$越来越小，无限地接近于0. 也即不论指定多么小的一个正数ε，都可以找到一个足够大的N，使得当$n>N$时，都可以满足$|y_n-A|<\varepsilon$，而具有这种特征的数列就称它的极限存在. 下面给出数列极限的"$\varepsilon-N$"定义.

定义 1.3 设数列$\{y_n\}$，若对任意小的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数N，使当$n>N$时，有

$$|y_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称当n趋向于无穷大时，数列$\{y_n\}$以常数A为**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A(n\to\infty)$$

一个数列的极限若存在，就称这个数列是收敛的，或称这个数列为收敛数列；反之，若数列极限不存在，就称数列为发散数列. 在上面的例子中，数列(1)、(3)、(5)的极限均存在，且分别为0、1、0，称(1)、(3)、(5)均为收敛数列. 但是(2)和(4)两个数列的极限就不存在，这两个数列称为发散数列.

为了便于叙述，数学中常用符号"$\forall$"表示"任意的"，符号"$\exists$"表示"存在". 由此数列极限的"$\varepsilon-N$"定义又可描述为：

设数列$\{y_n\}$，若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当$n>N$时，有

$$|y_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，则有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A(n\to\infty)$$

数列的"$\varepsilon-N$"定义是用数学语言来刻画无限接近，根据这个定义可以验证数列$\{y_n\}$的极限为A. 在验证中关键是验证对任意小的正数ε，可以找到一个正整数N，使得当$n>N$时$|y_n-A|<\varepsilon$成立. 若这个N找不到就无法证明A是$\{y_n\}$的极限.

例 1.11 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

证 因要使对$\forall\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$恒成立，即$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$，故对$\forall\varepsilon>0$，取

N 为大于$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的最小正整数，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

恒成立. 因此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，判别 $n\to\infty$ 时哪些数列极限存在，如果极限存在写出极限值.

(1) $y_n=2^{-n}$；　　(2) $y_n=\ln n$；

(3) $y_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；　　(4) $y_n=\frac{n-1}{n+1}$

2. 利用数列极限的定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=3$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

1.3　函数的极限

数列的极限是定义在正整数集上的一种特殊的函数极限，而在许多实际问题中，需要解决的却是连续变化过程下事物的趋近状态，研究这类问题就要借助于函数的极限.

函数的极限有两大类型：一种是当 $x\to\infty$ 时函数的极限，一种是当 $x\to x_0$ 时函数的极限. 下面就这两种类型分别进行讨论.

一、$x\to\infty$ 时函数的极限

首先来看一个比较熟悉的函数：

$$y=\frac{1}{x}$$

图 1-1 即为该函数的图像. 由图像可知当 $x\to\infty$ 时，函数值趋向于常数 0，此时就称函数$y=\frac{1}{x}$在 $x\to\infty$ 时以 0 为极限.

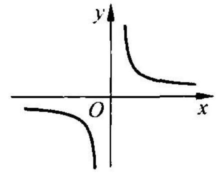

图 1-1

一般地，对于一个函数 $y=f(x)$，若当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$的值趋向于某一个常数 A，则有 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 以 A 为极限. 类比于数列极限的定义，“当 $x\to\infty$ 时”即指存在一个正数 M，当 $|x|>M$ 时，“函数值趋向于某一个常数 A”即指 $|f(x)-A|$ 可

以足够小. 由此比较数列极限的定义可以得到函数在 $x\to\infty$ 时极限存在的"$\varepsilon-M$"概念.

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$,若对 $\forall\varepsilon>0$,总存在一个正数 M,使得当 $|x|>M$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立,则称当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 以常数 A 为**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

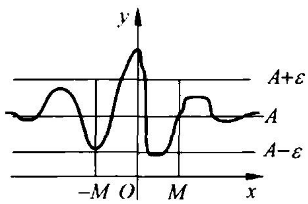

图 1-2

"$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$"反映在几何图像上即指:不论指定多么小的一个正数 ε,都可以找到一个正数 M,使得当 $|x|>M$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图像落在 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 两条线之间,并随着 $|x|$ 的增大越来越靠近 $y=A$,如图 1-2 所示.

在定义中,"存在一个正数 M,使得当 $|x|>M$ 时"刻画了 $x\to\infty$,而"$|f(x)-A|<\varepsilon$"刻画了随着 x 的变化 $f(x)$ 与 A 无限地接近.

$x\to\infty$ 时不具有这种性质的函数称在 $x\to\infty$ 时的极限不存在. 由定义可知要证明一个函数在 $x\to\infty$ 时的极限存在,关键之处就是从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 找出限定 x 的正数 M.

例 1.12 用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x}=3$.

证 因为对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{3x+1}{x}-3\right|<\varepsilon$ 恒成立,即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,所以对 $\forall\varepsilon>0$,取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$,则有当 $|x|>M$ 时,$\left|\dfrac{3x+1}{x}-3\right|<\varepsilon$ 恒成立. 即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}=3$$

对 $x\to\infty$ 这种类型的函数极限问题有时还需要区分为 $x\to+\infty$ 或者 $x\to-\infty$ 两种类型进行研究.

当 $x\to+\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限存在可表述为:对 $\forall\varepsilon>0$,总存在一个正数 M,使得当 $x>M$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立.

当 $x\to-\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限存在可表述为:对 $\forall\varepsilon>0$,总存在一个正数 M,使得当 $x<-M$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立.

例 1.13 用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=0$.

证 因为对 $\forall\varepsilon>0$,需要使 $|f(x)-A|=|e^x-0|<\varepsilon$ 恒成立,即 $x<\ln\varepsilon<0(\varepsilon<1)$,所以对 $\forall 0<\varepsilon<1$,取 $M=|\ln\varepsilon|$,则有当 $x<-M$ 时,$|e^x-0|<\varepsilon$ 恒成立,即

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

由函数 $y=e^x$ 的图像(图 1-3)也可直观地得到当 $x\to-\infty$ 时,函数图像无限地靠近 x 轴;而当 $x\to+\infty$ 时,函数图像与 x 轴越来越远,即

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 是不存在的. 这里 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ 是指 $x\to+\infty$ 时函数 $y=\mathrm{e}^x$ 也趋向于无穷大,也是极限不存在的一种形式,但在形式上可以记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

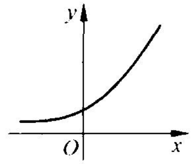

图　1-3

二、$x\to x_0$ 时函数的极限

首先来看两个函数的图像:

(1) $y=2x+1$;　　　　(2) $y=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$

由图 1-4 可知函数 $y=2x+1$ 在 $x\to1$ 时函数值无限地接近于 3,用数学语言来刻画这种趋向现象即为:对任意给定的不论多么小的一个正数 ε,总是存在一个正数 δ,使得当 x 与 1 的距离 $|x-1|$ 小于 δ 时,有 $|2x+1-3|<\varepsilon$ 恒成立.

由图 1-5 可知函数 $y=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义,但是随着 $x\to1$ 函数值仍然无限地接近于 3,用数学语言来刻画即为:对任意给定的不论多么小的一个正数 ε,总是存在一个正数 δ,使得当 x 与 1 的距离 $|x-1|$ 小于 δ 且大于 0 时,即 $0<|x-1|<\delta$ 时,有 $\left|\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}-3\right|<\varepsilon$ 恒成立. 其中 x 与 1 的距离 $|x-1|>0$ 是因为函数在 $x=1$ 时无定义. 由上面的分析可总结抽象出函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在的“$\varepsilon-\delta$”定义.

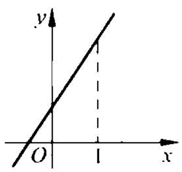

图　1-4

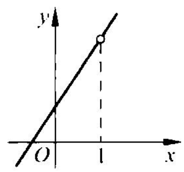

图　1-5

定义 1.5　设有函数 $y=f(x)$,若对任意小的正数 ε,总存在一个正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立,此时称函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以常数 A 为**极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

“$\lim f(x)=A$”反映在几何图像上即指:不论给定多么小的一个正数 ε,一定存在一个正数 δ,使得当 x 的取值落在 x_0 的 δ 空心邻域内时,$y=f(x)$ 的图像落在 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 两条直线之间.

由 $x\to x_0$ 时函数的"$\varepsilon-\delta$"定义可知，利用定义证明极限时的关键之处就是根据不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，确定出 δ 的取值.

例 1.14 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.

证 因为对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|3x+1-7|=|3(x-2)|<\varepsilon$ 恒成立，即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，则有当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|3x+1-7|<\varepsilon$ 恒成立. 即

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$$

三、左极限与右极限

在数轴上 x 趋向于 x_0 不仅可以从 x_0 的左侧趋向于 x_0，还可以从 x_0 的右侧趋向于 x_0. 前面讨论 $x\to x_0$ 时函数的极限没有指出 x 是从哪个方向趋向于 x_0，实际是把两侧同时考虑在内了. 但是在有些情况下只需要考虑 x 从单侧趋向于 x_0，比如定义在区间 (a,b) 上的函数 $y=f(x)$，要考虑 $x\to a$ 时函数的极限就只能考虑 x 从 a 右侧趋向于 a，因为在 a 的左侧函数可能没有定义，也就没有趋向于 a 这个过程可以进行讨论. 而讨论这类函数的自变量从单侧趋向于某一定点时函数的极限问题，就需要引入单侧极限的概念.

定义 1.6 设有函数 $y=f(x)$，若对 $\forall\varepsilon<0$，总存在一个正数 δ，使得当 $0<x_0-x<\delta$（即 $x_0-\delta<x<x_0$）时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，此时称函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以常数 A 为**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A$$

定义 1.7 设有函数 $y=f(x)$，若对 $\forall\varepsilon<0$，总存在一个正数 δ，使得当 $0<x-x_0<\delta$（即 $x_0<x<x_0+\delta$）时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，此时称函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以常数 A 为**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A$$

由函数在某一点的左右极限，可以得到函数在该点极限存在的一个等价条件.

定理 1.1

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

此定理主要应用在讨论分段函数在分段点处的极限：当分段函数在分段点两侧的表达式不同时求分段点处的极限，就需要利用左右极限定义先分别求出函数在分段点左右的极限，进而确定函数在分段点的极限是否存在；若函数在分段点两侧表达式相同，就不需要利用左右极限进行讨论，直接计算即可.