普通高等教育“十三五”规划教材

变分原理及有限元

Variational Principle and Finite Element Method

■ 史治宇 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育"十三五"规划教材

变分原理及有限元

Variational Principle and Finite Element Method

史治宇　编著

Shi Zhiyu

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书系统阐述了弹性力学的积分变分原理，以及基于变分原理泛函的有限单元法的理论基础和计算列式。全书共分 12 章，包括变分原理和有限单元法两部分内容。第一部分变分原理由第 1 章至第 3 章组成，主要阐述变分学的基本概念和泛函极值的求解方法，弹性力学的经典变分原理和广义变分原理，以及变分原理的近似解法。第二部分有限单元法由第 4 章至第 12 章组成，主要阐述基于最小势能原理的有限单元法的基本概念、基本理论和计算列式过程，介绍了杆系结构、平面问题、空间问题、板壳问题、热传导问题、结构动力学问题和稳定性问题的有限元方法，同时在第 12 章介绍了基于其他变分原理的杂交应力有限元方法。

本书可作为高等院校力学、机械、土木等专业本科生和研究生的教材，也可作为相关专业工程技术人员和研究人员的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

变分原理及有限元／史治宇编著. —北京:国防工业出版社,2016.3

ISBN 978-7-118-10785-2

Ⅰ.①变… Ⅱ.①史… Ⅲ.①变分学②有限元 Ⅳ.①O176②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 039568 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

三河市鼎鑫印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 11½　**字数** 282 千字

2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—3000 册　**定价** 28.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前　言

变分法是17世纪末发展起来的一个数学分支,其早期的研究工作是如何将泛函的极值问题转化为微分方程的边值问题。但是,微分方程边值问题的求解常常是非常困难的。因而,如何将微分方程的边值问题转化为与之等价的泛函极值问题并寻找其直接解也成为变分问题研究的内容。这两方面的理论和方法都称为变分原理(Variational Principle)。弹性力学问题从数学上讲就是偏微分方程的边值问题,寻求这些偏微分方程的解的方法一直是众多力学家孜孜追求的目标。自从1908年里兹提出了基于变分原理的微分方程的近似求解方法——里兹法(Ritz Method)以后,此方法在弹性力学问题的求解中得到了广泛应用,并取得了很多成果,变分原理也成为弹性力学的重要组成部分。

有限单元法就是基于里兹法和分片近似、整体逼近思想发展起来的求解微分方程的数值计算方法。1956年,Turner、Clough等人应用分片近似、整体逼近的思想成功求解了弹性力学的平面应力问题。1960年,Clough在论文中首次使用了有限单元法(Finite Element Method)一词,此后这一名称得到了广泛承认。有限单元法的出现进一步推动了变分原理理论的完善和发展,此后,不仅建立了基于积分变分原理的,特别是最小势能原理泛函的有限单元法的理论及计算列式,还建立了不依赖于微分方程等价泛函的,基于微分变分原理的,特别是伽辽金法(Galerkin Method)的有限单元法的理论及计算列式。随着计算机技术的迅猛发展,有限单元法从20世纪60年代起得到了迅速发展,其应用领域已经从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等学科。由于其理论基础扎实、通用性强的特点,有限单元法现已成为工程问题数值仿真的主要工具,并在工程应用中取得了巨大的成功。

本书系统阐述了弹性力学的积分形式的变分原理,以及基于变分原理泛函的有限单元法的理论基础和计算列式。全书共分两部分内容:第一部分为变分原理,由第1章至第3章组成;第二部分为有限单元法,由第4章至第12章组成。第1章介绍变分学的基本概念,以及各类泛函极值的求解方法;第2章介绍弹性力学的经典变分原理,包括最小势能原理、最小余能原理和哈密尔顿原理的单变量变分原理以及赫林格-赖斯纳两变量广义变分原理和胡-鹫三变量广义变分原理;第3章介绍变分问题的直接解法,包括里兹法、伽辽金法和康托洛维奇法;第4章介绍基于最小势能原理的有限单元法的基本概念、基本理论、离散方法、计算列式以及求解过程;第5章介绍杆系结构的有限元方法;第6章介绍弹性力学平面问题的有限元方法;第7章介绍选择单元与构造单元插值函数的原则和方法;第8章介绍板壳问题的有限元方法;第9章介绍热传导问题的有限元方法;第10章介绍结构动力学问题的有限元方法;第11章介绍结构稳定性问题的有限元方法;第12章介绍基于其他变分原理的杂交应力有限元。

本书是为力学、机械、土木等工科类专业的本科生和研究生学习变分原理以及有限单元法编写的。全书着重介绍弹性力学的积分形式的变分原理，阐述它们与弹性力学的平衡微分方程、几何方程、物理方程和应力边界条件、位移边界条件之间的内在关系，以及变分原理泛函的直接解法，进而建立基于变分原理泛函的有限单元法的理论体系。针对工科研究生的特点，本书没有从数学层面阐述深奥的泛函极值问题充分条件的证明，也没有探讨一般微分方程的泛函构造方法。

本书的初稿于2003年编写完成，2008年进行了修订，初稿《变分原理及有限元》作为南京航空航天大学力学专业的研究生教学讲义使用至今。

作者在本书的编写过程中参考了大量论文和专著，丁锡洪教授、顾慧芝副教授提供了许多资料和帮助，历届研究生提出了很多宝贵意见，在此谨表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，敬请批评指正。

史治宇

2015年8月30日于南京航空航天大学明故宫校区

目　录

第 1 章　变分学 …… 1

1.1　变分命题 …… 1
1.2　变分及其特性 …… 2
1.3　固定边界的变分问题 …… 5
1.4　可动边界的变分问题 …… 8
1.5　含多个未知函数泛函的变分问题 …… 12
1.6　含高阶导数泛函的变分问题 …… 13
1.7　含多元函数重积分泛函的变分问题 …… 15
1.8　含约束条件的泛函变分问题 …… 21
1.9　泛函极值的充分条件 …… 25
习题 …… 25

第 2 章　弹性理论的变分原理 …… 27

2.1　张量的概念与弹性力学基本方程 …… 27
2.2　应变能和余应变能 …… 30
2.3　最小势能原理 …… 31
2.4　最小余能原理 …… 32
2.5　最小势能原理和最小余能原理的泛函的建立 …… 34
2.6　哈密尔顿原理 …… 35
2.7　赫林格-赖斯纳广义变分原理 …… 36
2.8　胡-鹫广义变分原理 …… 38

第 3 章　变分问题的直接解法 …… 41

3.1　基于最小势能原理的直接解法 …… 42
3.2　基于最小余能原理的直接解法 …… 49
3.3　基于 H－R 变分原理的直接解法 …… 52
3.4　变分问题的康托洛维奇解法 …… 54
习题 …… 56

第 4 章　有限单元法概述 …… 58

4.1　位移协调元的变分原理 …… 58

4.2 有限单元法进行结构分析的步骤及有限元列式 …… 60
4.3 有限元解的收敛性 …… 66
4.4 大型线性方程组的求解 …… 67

第5章 杆系结构有限元 …… 71

5.1 杆单元 …… 71
5.2 梁单元 …… 76
5.3 平面刚架结构分析实例 …… 79
习题 …… 83

第6章 弹性力学平面问题有限元 …… 85

6.1 常应变三角形单元 …… 85
6.2 六节点三角形单元 …… 90
6.3 矩形平面应力单元 …… 96
6.4 等参单元 …… 100
6.5 高斯积分 …… 107
6.6 算例 …… 108
6.7 应力的处理方法 …… 110
习题 …… 110

第7章 单元和单元插值函数 …… 111

7.1 一维单元 …… 112
7.2 二维单元 …… 113
7.3 三维单元 …… 118

第8章 板壳问题有限元 …… 122

8.1 薄板弯曲的基本方程及最小势能泛函 …… 122
8.2 矩形薄板弯曲单元 …… 124
8.3 三角形薄板单元 …… 128
8.4 完全协调的三角形薄板单元 …… 132
8.5 考虑横向剪切变形影响的板弯单元 …… 133
8.6 平面壳体单元 …… 136
8.7 曲面壳体单元 …… 139

第9章 热传导问题有限元 …… 147

9.1 热传导方程及泛函 …… 147
9.2 有限元列式的推导 …… 149

9.3 稳态二维热传导 …… 150
9.4 瞬态二维热传导 …… 151
9.5 热应力 …… 152

第 10 章 结构动力学问题有限元 …… 154

10.1 结构离散体的动力学方程 …… 154
10.2 质量矩阵和阻尼矩阵 …… 156
10.3 结构的固有特性分析和动响应分析 …… 158

第 11 章 结构稳定性问题有限元 …… 161

11.1 杆的稳定性分析 …… 161
11.2 板的稳定性分析 …… 164

第 12 章 杂交应力有限元 …… 166

12.1 修正余能原理及杂交应力单元 …… 167
12.2 基于赫林格-赖斯纳变分原理的杂交混合有限元模型 …… 173

参考文献 …… 176

第1章 变分学

1.1 变分命题

在自然科学和工程技术上，常常会遇到确定某一函数极值的问题，这种计算分析是微积分里大家所熟知的，但是也会遇到这样一种依赖于某类未知函数的抽象的积分型函数的极值问题。这种抽象的函数称为泛函(Functional)，其定义域由某类未知函数所确定，值域是实数域。求泛函极值的问题称为变分问题，求解泛函极值的方法称为变分学(Calculus of Variation)。为了便于理解变分的命题，本书先从历史上的一些典型的变分命题讲起。

最速降线问题(the Brachistochrone)：已知铅垂平面中两点 A 和 B，不在同一铅垂线上，A 高于 B。要求在两点间连一曲线，使得受重力作用的重物从 A 沿此曲线自由滑下时，从 A 到 B 所需的时间最少(摩擦力不计)。

此命题是约翰·伯努利(Johann Bernoulli)于 1696 年以公开信的形式向他的哥哥雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)和其他数学家提出来的，引起了当时科学家们的极大兴趣。牛顿(Newton)、莱比尼兹(Leibniz)、伯努利兄弟等人都研究了这个问题，用不同的方法求得了正确的结果。

如图 1-1 所示，通过 A、B 两点并垂直水平面作一平面，在此平面上取一直角坐标系，以 A 为原点，x 轴水平，y 轴垂直向下，设 B 点坐标为 (a,b)。令所求曲线为 $y(x)$，已知 $x=0$ 处，$y=0$；$x=a$ 处，$y=b$。设 $P(x,y)$ 是曲线上某一点，重物在 P 点的速度 v 可由能量守恒原理求得，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \qquad 或 \qquad v=\sqrt{2gy} \tag{1-1}$$

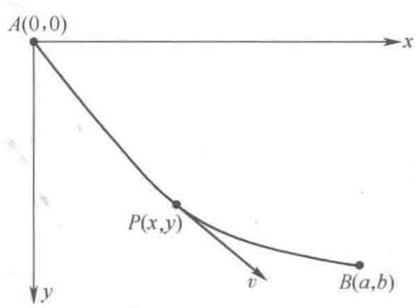

图 1-1

令 $\mathrm{d}s$ 为曲线弧长的微分，则有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

由式(1－1)和式(1－2)消去 v 并积分,得重物沿曲线从 A 滑到 B 所需的时间 T 为

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} \mathrm{d}x \tag{1-3}$$

可以看出上式中时间 T 是依赖于函数 $y(x)$ 的函数,T 称为泛函。最速降线问题可以归结为这样的数学问题:在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 区间找一个满足边界条件的函数 $y(x)$,并使式(1－3)定义的时间 T 取最小值。

短程线问题(Geodesic Problem):设 $\varphi(x,y,z) = 0$ 为一已知曲面,而 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 是曲面上的两定点,在该曲面上过 A、B 两点的所有曲线中,试求长度最短的一条曲线。

如图 1－2 所示,曲面 $\varphi(x,y,z) = 0$ 在 A、B 两点间曲线的长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} \mathrm{d}x \tag{1-4}$$

其中 $y(x)$ 和 $z(x)$ 为连续可微函数,且满足约束条件

$$\varphi(x,y,z) = 0 \tag{1-5}$$

所以,短程线问题就归结为这样的数学问题:在 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 区间内确定两个函数 $y(x)$ 和 $z(x)$,使它们满足约束条件式(1－5),并使式(1－4)定义的 L 取最小值。

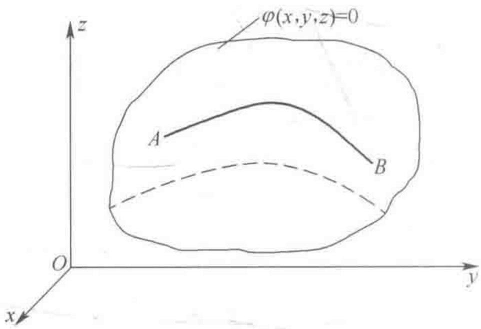

图 1－2

等周问题(Isoperimetric Problem):在平面上长度一定的封闭曲线中,何种曲线所围面积最大。这是最古老的变分命题之一,早在古希腊时,人们就知道这条曲线是一个圆。

将所给曲线用参数形式表达为 $x = x(s)$,$y = y(s)$,因为这条曲线是封闭的,所以有 $x(s_b) = x(s_e)$,$y(s_b) = y(s_e)$,该曲线的周长为

$$L = \int_{s_b}^{s_e} \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} \mathrm{d}s \tag{1-6}$$

其所围面积 A 为

$$A = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_{s_b}^{s_e} (xy' - yx')\mathrm{d}s \tag{1-7}$$

所以,等周问题就归结为这样的数学问题:在满足式(1－6)的约束条件下,选取函数 $x(s)$ 、$y(s)$,并使式(1－7)定义的泛函 A 为最大值。1701 年雅各布·伯努利给出了该问题的正确解答。

这三个历史上有名的变分命题,都是在 17 世纪末期提出的,18 世纪上半叶得到解决。这三个变分命题的共同特点是:在满足一定约束条件下,寻求依赖于某类函数的固定边界积分泛函的极值。在解决这类问题的过程中,欧拉、拉格朗日等创立了变分法。该方法后来广泛地应用于力学的各个方面,并对力学的发展起了很重要的作用。

1.2 变分及其特性

为了讨论问题的方便,本节将介绍与泛函和泛函极值相关的一些概念。

1.2.1　泛函的定义

给定满足一定条件的函数集合 $\Gamma:\{y(x)\}$ 和实数集合 R。设 $y(x)$ 是 Γ 中的函数，V 是 R 中的变量，若 Γ 和 V 之间存在一个对应关系，使 Γ 中的每个函数 $y(x)$，V 中都有唯一的 V 值与之对应，则称 V 是函数 $y(x)$ 的泛函，记为 $V=V(y(x))$。Γ 成为泛函的定义域，可变函数 $y(x)$ 称为自变函数，依赖自变函数而变的量 V，称为自变函数的泛函。

在区间 (x_0,x_1) 上连续的函数集，称为在区间 (x_0,x_1) 上连续的函数类，记为 $C(x_0,x_1)$。在区间 (x_0,x_1) 上 n 阶导数连续的函数集，称为在区间 (x_0,x_1) 上 n 阶导数连续的函数类，记为 $C^n(x_0,x_1)$，而 $C^0(x_0,x_1)$ 约定为 $C(x_0,x_1)$。

1.2.2　函数间的距离和函数的邻域

设函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 都属于 $C^n[a,b]$，则 $|y(x)-y_0(x)|$，$|y'(x)-y_0'(x)|$，…，$|y^n(x)-y_0^n(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值，称为函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 n 级距离，记为

$$d_n(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}\{|y-y_0|,|y'-y'_0|,\cdots,|y^n-y_0^n|\}$$

特别地，零级距离与一级距离分别为

$$d_0(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}|y-y_0|,\qquad d_1(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}\{|y-y_0|,|y'-y_0'|\}$$

给定 $y_0(x)\in C^n[a,b]$ 和正数 δ，如果对于 $y(x)\in C^n[a,b]$，有 $d_n(y,y_0)<\delta$，则称 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 具有 n 阶的 δ 接近度。又称集合

$$N_n[\delta,y_0]\equiv\{y(x)\,|\,y(x)\in C^n[a,b],d_n(y,y_0)<\delta\}$$

为 $y_0(x)$ 的 n 阶 δ 邻域。

当 $n=0,1$ 时，分别表示 y 与 y_0 具有零阶与一阶的 δ 接近度。对于给定的正数 δ，如果 y 与 y_0 具有一阶的 δ 接近度，那么就蕴含有零阶的 δ 接近度，但反之则不成立。一般，若两曲线具有 n 阶的 δ 接近度，那么它们将具有任何低于 n 阶的 δ 接近度。显然，接近度的阶数越高，两曲线接近得越好。

1.2.3　泛函的连续

设泛函 $V(y(x))$ 的定义域为 $\Gamma:\{y(x)\,|\,y(x)\in C^n[a,b]\}$，又 $y_0\in\Gamma$。如果对于任意给定的正数 ε，都能找到正数 δ，使得对于任意的

$$y(x)\in N_n[\delta,y_0]\subset\Gamma$$

都有

$$|V[y(x)]-V[y_0(x)]|<\varepsilon$$

成立，则称泛函 $V(y(x))$ 在 $y_0(x)$ 处是具有 n 阶的 δ 接近度的连续泛函。

1.2.4　泛函的极值

泛函的极值定义与函数的极值定义是类似的。

设 $y_0(x)$ 是泛函 $V(y(x))$ 的定义域 Γ 中的某一函数，若对于 Γ 中任一函数 $y(x)$ 都有

$$V[y_0(x)]\leqslant V[y(x)]\qquad(\text{或 }V[y_0(x)]\geqslant V[y(x)])$$

则称泛函 $V(y(x))$ 在 $y_0(x)$ 处达到绝对极小值(或绝对极大值)。

若存在一正数 δ，使对于任一 $y(x) \in \Gamma \cap N_0[\delta, y_0]$ 都有

$$V[y_0(x)] \leqslant V[y(x)] \qquad (\text{或 } V[y_0(x)] \geqslant V[y(x)])$$

则称泛函 $V(y(x))$ 在 $y_0(x)$ 处达到强相对极小值(或强相对极大值)。

若存在一正数 δ，使对于任一 $y(x) \in \Gamma \cap N_1[\delta, y_0]$ 都有

$$V[y_0(x)] \leqslant V[y(x)] \qquad (\text{或 } V[y_0(x)] \geqslant V[y(x)])$$

则称泛函 $V(y(x))$ 在 $y_0(x)$ 处达到弱相对极小值(或弱相对极大值)。

极大值和极小值统称极值。在上述绝对极值、强相对极值和弱相对极值的定义中，函数 $y_0(x)$ 是依次地与较小的函数集里的函数 $y(x)$ 相比较而言的，因此，可以得出：绝对极值 $\Rightarrow$ 强相对极值 $\Rightarrow$ 弱相对极值；弱相对极值的必要条件 $\Rightarrow$ 强相对极值的必要条件 $\Rightarrow$ 绝对极值的必要条件。因此，在推导泛函极值的必要条件时，只对泛函弱极值的必要条件进行推导。在实际问题中，泛函极值的存在性，往往在问题给出时就已肯定了。因此当泛函有极值时，求出满足必要条件的未知函数是着重要解决的问题。

1.2.5 泛函的变分

求泛函极值的方法称为变分法。求函数极值时需要应用函数的导数或微分，同样求泛函极值时需要用到泛函的变分概念。讨论变分法之前先介绍泛函的变分概念。

1. 函数的变分

函数 $y(x)$ 与另一函数 $\bar{y}(x)$ 的差 $\bar{y}(x) - y(x)$ 称为函数 $y(x)$ 的变分，记为 δy，即 $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$。显然，函数 $y(x)$ 的变分 $\delta y(x)$ 是 x 的函数。注意函数的变分 δy 与函数的增量 Δy 的差别，如图 1－3 所示，函数的变分 δy 是两个不同的函数 $y(x)$ 和 $\bar{y}(x)$ 在自变量 x 保持不变时的差；函数的增量 Δy 是同一函数 $y(x)$ 由于自变量 x 的增量而使函数 $y(x)$ 产生的增量。

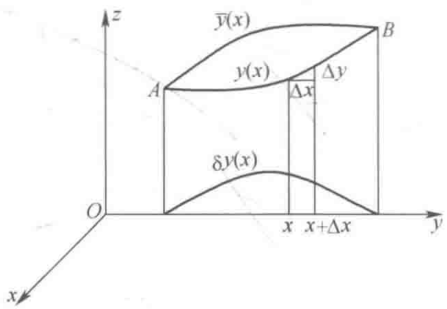

图 1－3

2. 泛函的变分

记泛函 $V(y(x))$ 的增量为 $\Delta V = V[y(x) + \delta y] - V[y(x)]$，如果 ΔV 可表示为

$$\Delta V = L[y(x), \delta y] + \beta[y(x), \delta y] \max|\delta y|$$

其中 $L[y(x), \delta y]$ 是关于 δy 的线性泛函，$\max|\delta y|$ 表示 $|\delta y|$ 的最大值，且当 $\max|\delta y| \to 0$ 时，$\beta[y(x), \delta y] \to 0$，则称 $L[y(x), \delta y]$ 为泛函 $V(y(x))$ 在 $y(x)$ 上的一阶变分(the First Variation)，简称变分，记为 δV，即 $\delta V = L[y(x), \delta y]$。

上面关于函数与泛函的变分定义及公式可推广到多元函数及依赖于多元函数或多个函数泛函的情形。

1.2.6 变分法的基本预备定理

如果函数 $F(x)$ 在域 $[x_1, x_2]$ 上连续，且对于只满足某些一般条件①一阶或若干阶可微分；②在域 $[x_1, x_2]$ 的端点处为0；③ $|\delta y(x)| < \varepsilon$ 或 $|\delta y(x)|$ 和 $|\delta y'(x)| < \varepsilon$ 等)的任意选定的函数 $\delta y(x)$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = 0$$

则在域 $[x_1,x_2]$ 上，有 $F(x) \equiv 0$。

证明：(反证法)若 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 内某点 $x=\xi$ 处不等于零，由 $F(x)$ 的连续性，在点 $x=\xi$ 的某个 δ 邻域 $\xi-\delta<x<\xi+\delta$ 也不等于零，记 $\xi-\delta=\xi_1$，$\xi+\delta=\xi_2$，不妨设 $F(x)>0$，$x\in(\xi_1,\xi_2)\subset[x_1,x_2]$。由于 $\delta y(x)$ 的任意性，当选定 $\delta y(x)$ 在此邻域 $[\xi_1,\xi_2]$ 内为正，而在此邻域外恒为零解时，可构造函数 $\delta y(x)$ 如下

$$\delta y(x)=\begin{cases}0 & x\in[[x_1,\xi_1)\cup(\xi_2,x_2]]\\ k(x-\xi_1)^{2n}(\xi_2-x)^{2n} & x\in[\xi_1,\xi_2]\end{cases}$$

这时，$\delta y(x)$ 满足：① $2n-1$ 阶可导；②在域 $[x_1,x_2]$ 的端点处为零；③如果选取一个很小的正数 k，则一定能使 $|\delta y^{2n-1}(x)|<\varepsilon$ 得到满足。于是有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(x)k(x-\xi_1)^{2n}(\xi_2-x)^{2n}\mathrm{d}x > 0$$

这与已知条件矛盾，因此在 $[x_1,x_2]$ 上，有 $F(x)\equiv 0$。

对于多变量的问题也有类似的变分预备定理。

1.3 固定边界的变分问题

从本节起将讨论泛函极值的必要条件，介绍如何把泛函的极值问题化为微分方程的边值问题，先考虑固定边界简单泛函的变分问题。

考虑一类最简单定积分泛函 $\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的极值问题。如图 1－4 所示，$G(a,\alpha)$，$H(b,\beta)$ 是两个已知点，在 $a\leqslant x\leqslant b$ 区间内，决定一个函数 $y(x)$，使泛函

$$V=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

取极值。

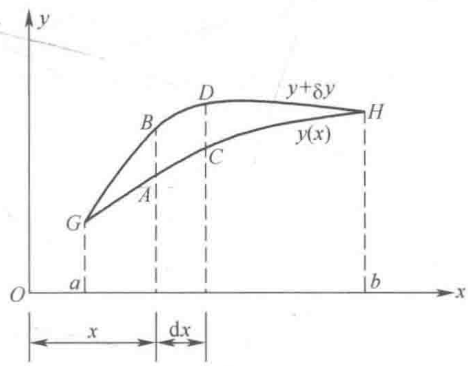

图 1－4

设这条曲线为 $GACH$，它的方程为 $y=y(x)$。设想在其附近另取一条曲线 $GBDH$，两条曲线定义为无穷接近，不仅函数本身无限接近，而且各导数也要无限接近(n 阶的 δ 接近度)，令这条曲线方程为 $y(x)+\delta y(x)$，δy 是一个无穷小量，称为自变函数的变分。

对应这两条曲线，可以得出泛函的两个值，即

$$V=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

$$V+\Delta V=\int_a^b F[x,y+\delta y,(y+\delta y)']\mathrm{d}x=\int_a^b F[x,y+\delta y,y'+(\delta y)']\mathrm{d}x$$

式中：ΔV 代表泛函的增量；δy 为自变函数的变分。而函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$。

图中 A、B、C 三点的纵坐标分别为 y、$y+\delta y$ 和 $y+\mathrm{d}y=y+y'\mathrm{d}x$。而 D 点的纵坐标若从 C

点算过去为

$$(y+y'\mathrm{d}x)+\delta(y+y'\mathrm{d}x)=y+\delta y+(y'+\delta y')\mathrm{d}x$$

若从 B 点算过去则为

$$(y+\delta y)+(y+\delta y)'\mathrm{d}x=y+\delta y+[y'+(\delta y)']\mathrm{d}x$$

故有

$$(\delta y)'=\delta y' \tag{1-8}$$

此式表明,一个函数的微分运算和变分运算的次序是可以交换的,这在变分的公式推导中要常用到。

利用式(1-8),$V+\Delta V$ 可写为

$$V+\Delta V=\int_a^b F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x$$

于是有

$$\Delta V=\int_a^b[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]\mathrm{d}x \tag{1-9}$$

对于力学和工程上经常遇到的泛函,被积函数 $F(x,y,y')$ 是 y 、y' 的连续可导函数,因此当 δy 、$\delta y'$ 很小时,ΔV 也很小,当 δy 、$\delta y'$ 是无穷小时,ΔV 也是无穷小。将式(1-9)按泰勒公式展开有 $\Delta V=\delta V+\delta^2 V+\cdots$ 。

δV 称为 V 的一阶变分,取出等式两端的一阶无穷小量,则有

$$\delta V=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{1-10}$$

而 ΔV 的二阶小量部分称为 V 的二阶变分,记为 $\delta^2 V$,即

$$\delta^2 V=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right)\mathrm{d}x$$

设法将式(1-10)中的 $\delta y'$ 转变为 δy 。用如下分部积分法(Integration by Parts),即

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u \tag{1-11}$$

取 $u=\dfrac{\partial F}{\partial y'}$,$\mathrm{d}v=\delta y'\mathrm{d}x=(\delta y)'\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\delta y)$,则式(1-10)的第二项可作如下变换,即

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}(\delta y)=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{1-12}$$

于是式(1-10)为

$$\delta V=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b \tag{1-13}$$

由于函数 $y(x)$ 的两端为已知,因此 δy 在两端应为零,即在 $x=a$ 和 $x=b$ 处,有 $\delta y=0$。则式(1-13)化简为

$$\delta V=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x \tag{1-14}$$

要使 V 取极值,必须 $\delta V=0$,而 δy 在 $[a,b]$ 区间不可能处处为零,由变分法的预备定理可知,使 V 取极值的必要条件(Necessary Condition)为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1-15}$$

这个方程是函数 $y(x)$ 的微分方程,称为欧拉-拉格朗日方程(Euler-Lagrange Equation)。利用边界条件解此式,就能得到使泛函 V 取极值的函数 $y(x)$ 。

［例 1-1］　最速降线问题:前面已讲过这个问题可归结为确定一个函数 $y(x)$,使它满足边界条件 $x=0$ 时, $y=0$; $x=a$ 时, $y=b$,并使泛函

$$T=\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

取极小值。

解:最速降线问题就是本节所讲述的最简单定积分泛函的极值问题,其中被积函数为

$$F=\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}$$

其中 $p=y'$,同时

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+p^2}}{2y^{3/2}},\qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}$$

应用欧拉-拉格朗日方程式(1-15),简化后得

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{2y^{3/2}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}\right)=0$$

把上式化简为 p 对 y 的微分方程,即

$$1+\frac{2py}{1+p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=0$$

分离变量,有

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p=0$$

积分得

$$\ln y+\ln(1+p^2)=\ln 2c \quad 或 \quad y(1+p^2)=2c$$

式中:c 为积分常数。由上式可得

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{2c-y}{y}}$$

$$x=\int\frac{y}{\sqrt{2cy-y^2}}\mathrm{d}y=-\sqrt{2cy-y^2}+c\arccos\frac{c-y}{c}+D$$

曲线 $y(x)$ 要满足边界条件 $x=0$ 处 $y=0$,代入上式,得 $D=0$,则

$$x=-\sqrt{2cy-y^2}+c\arccos\frac{c-y}{c}$$

这个曲线适合用参数来表示。令 $\arccos\frac{c-y}{c}=\theta$,则

$$\begin{cases}x=c(\theta-\sin\theta)\\ y=c(1-\cos\theta)\end{cases}$$

这是一组圆滚线族,c 为滚轮半径。利用边界条件 $x=a$ 处 $y=b$,可以求出 c。

所以,最速降线为圆滚轮线。

［**例 1-2**］ 最小旋转面问题：如图 1-5 所示，求一条边界点为已知的曲线 $y(x)>0$，使之绕 x 轴旋转所形成的曲面面积为最小。

解：曲线 $y(x)$ 绕 x 轴旋转的表面面积为

$$S = 2\pi\int y\mathrm{d}s = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\right) - \left[y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\right] = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$$

应用欧拉-拉格朗日方程式(1-15)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

则

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

把 $F = y\sqrt{1+y'^2}$ 代入，整理后得

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

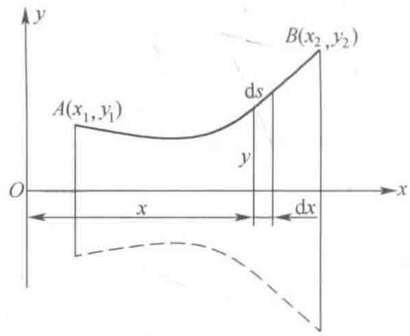

图 1-5

令 $y' = \mathrm{sh}\theta$，代入上式，得 $y = c_1\mathrm{ch}\theta$，而 $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{c_1\mathrm{sh}\theta\mathrm{d}\theta}{\mathrm{sh}\theta} = c_1\mathrm{d}\theta$，从而得

$$x = c_1\theta + c_2$$

得到曲线的参数方程解，即

$$\begin{cases} x = c_1\theta + c_2 \\ y = c_1\mathrm{ch}\theta \end{cases}$$

消去参数 θ，得

$$y = c_1\mathrm{ch}\frac{x-c_2}{c_1}$$

这是悬链线方程，积分常数 c_1 和 c_2 由端点条件 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 来确定。具有最小面积的旋转面即为悬链线绕 x 轴转一圈的悬链面。

1.4 可动边界的变分问题

上一节研究了固定边界的泛函极值问题，本节将研究可动边界的泛函极值问题。

1.4.1 可动边界变分问题的自然边界条件

以最速降线问题为例，设物体从 (0,0) 点下滑，下滑曲线的右下端只规定在 $x=a$ 直线上，而没有规定 $y(a)$ 值。这就属于可动边界的情况，如图 1-6 所示。

在 $0\leqslant x\leqslant a$ 区间内，确定一个函数 $y(x)$，使泛函

$$V = \int_0^a F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{1-16}$$

取极小值。

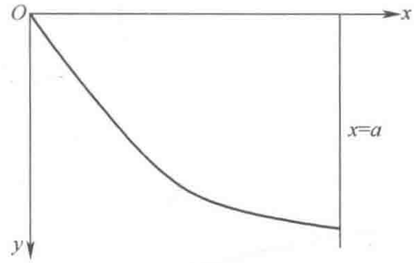

图 1－6

解题的步骤与上节一样，先求泛函 V 的一阶变分 δV，由式(1－13)可知

$$\delta V=\int_0^a\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_0^a \tag{1-17}$$

要使泛函 V 取极值，δV 必须为零。由于在 $x=0$ 时，$\delta y=0$；$x=a$ 时，边界可动 $\delta y\neq 0$。因此，由 $\delta V=0$ 可得

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1-18}$$

以及

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=a}=0 \tag{1-19}$$

可见，欧拉-拉格朗日方程仍必须成立，同时得到需满足的端点条件式(1－19)，这一端点条件称为自然边界条件(Natural Boundary Conditions)。

［**例 1－3**］　求如图 1－6 所示边界条件为 $x=0$ 时，$y=0$；$x=a$ 时 y 不给定情况下的最速降线问题。

解：最速降线的泛函及一阶变分已在前一节求得，其一阶变分可写为

$$\delta T=\int_0^a\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_0^a$$

要使 T 取极值，必须使 $\delta T=0$，由于 δy 任意，即可得

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1-20}$$

在边界 $x=a$ 上，可导出自然边界条件，即

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=a}=0 \tag{1-21}$$

在上节已由固定边界条件 $x=0$ 时，$y=0$，求得曲线的参数表达式为

$$\begin{cases}x=c(\theta-\sin\theta)\\ y=c(1-\cos\theta)\end{cases}$$

现应用式(1－21)可确定积分常数 c，其中

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=a}=\frac{1}{\sqrt{2gg}}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+g'^2}}\Bigg|_{x=a}=0$$

即

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{c\sin\theta\mathrm{d}\theta}{c(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}\Big|_{x=a}=0$$

容易得 $\theta=\pi$，代入曲线参数表达式的第一式，求得 $c=\dfrac{a}{\pi}$。因此，求得的曲线 $y(x)$ 的表达式为

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\pi}(\theta-\sin\theta)\\[2ex] y=\dfrac{a}{\pi}(1-\cos\theta)\end{cases}$$