21世纪

ZISHIJI
GAOZHONG
SHUXUE JINGBIAN

高中数学

第二册（下B）

（高二第二学期用）

精编

浙江教育出版社

21世纪高中数学精编

GAOZHONG SHUXUE JINGBIAN

第二册(下B)

人民教育出版社数学室审阅

主　　编　岑　申(特级教师)　王而冶(特级教师)

副 主 编　金才华(特级教师)　许芬英

编 写 者　金才华　胡建军　潘　青　吕雪清
　　　　　朱承信　吴　迪　谢敏光　张　霞
　　　　　戴三红

浙江教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

21世纪高中数学精编．第2册.(下B)／金才华等编写．
杭州：浙江教育出版社，2003.2

ISBN 7-5338-4733-4

Ⅰ.2...　Ⅱ.金...　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第006021号

责任编辑 华　琼
封面设计 韩　波

21世纪高中数学精编　第二册(下B)

主　　编：岑　申　王而冶
审　　阅：人民教育出版社数学室
出版发行：浙江教育出版社
印　　刷：杭州出版学校印刷厂
开　　本：850×1168　1/32
印　　张：10.5
字　　数：210000
版　　次：2003年2月第1版
印　　次：2003年2月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5338-4733-4/G·4703
定　　价：12.00元

第九章　直线、平面、简单几何体

学习导引

无论从课程的目的要求、内容和方法方面看，立体几何都是平面几何课程的继续和发展. 立体几何是运用几何方法或向量代数方法研究空间图形（由空间的点、线、面构成，也可以看成是空间点的集合）的性质、画法、计算以及它们的应用的学科. 立体几何是在生产实际、科学试验（例如：土木建筑、机械设计、航行测绘等）中有广泛应用的一门基础学科. 本章的学习将使我们的逻辑思维能力、运算能力，特别是空间想像能力，得到进一步提高.

本章的主要内容有空间的直线与平面；空间向量（包括空间向量及其运算、空间向量的坐标运算等内容）；夹角与距离；简单多面体与球（包括棱柱与棱锥、多面体欧拉定理的发现、球等内容）等.

学习本章的要求是：

1. 掌握平面的基本性质；了解空间两条直线、直线和平面、两个平面的位置关系；掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；掌握直线和平面垂直的判定定理；理解直线和平面垂直的概念；了解三垂线定理及其逆定理.

2. 理解空间向量、空间向量坐标的概念；了解空间向量基本定理；掌握空间向量的运算以及空间向量的坐标运算；理解直线的方向向量、平面的法向量、向量在平面内的射影等概念. 能运用空间向量的运算以及空间向量的坐标运算解决有关问题.

3. 掌握直线和直线、直线和平面、平面和平面所成的角以及距离的概念；掌握直线和平面垂直的性质定理；掌握两个平面平行、垂直的判定定理和性质定理.

4. 了解简单几何体的有关概念；掌握简单几何体的性质，以及它们的表面积、体积的计算公式；会画直棱柱、正棱锥的直观图.

本章的重点是：

平面的基本性质，两条直线、直线和平面、两个平面的平行和垂直关系，空间向量的运算、坐标运算及其运用，棱柱、棱锥、球的性质. 空间几何图形中点、线、面位置的判定和论证是本章的主要难点.

学习本章时应注意以下几点：

1. 搞清立体图形问题与平面图形问题的联系与区别，建立正确的空间观念. 对平面图形的研究是讨论立体图形的基础，立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决，但考虑问题时要着眼于整个空间，而不能局限于一个平面.

2. 要运用从特殊到一般、再从一般到特殊的思想方法，可通过从模型到图形、再从图形到模型的两个过程，帮助自己认识空间图形，逐步提高自己的空间想像能力. 要积极运用立体几何知识解决生活和生产中的实际问题，通过数学应用，提高自己分析问题和解决问题的能力.

3. 要正确认识用向量解决几何问题并不是弱化推理，而是推理过程的呈现形式更多地表现为运算，由此推理变得更加简练，但每一步运算都要搞清所依据的运算法则.

本章的主要公理、定理和公式：

1. 平面的基本性质

公理 1 如果一条直线的两点在同一平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是过这个公共点的一条直线.

公理 3 经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面(不共线的三点确定一平面).

推论 1 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行直线有且只有一个平面.

2. 空间的平行直线与异面直线

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

异面直线的判定定理 连结平面内一点与平面外一点的直线,和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

3. 直线和平面平行与平面和平面平行

直线和平面平行的判定定理 如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

直线和平面平行的性质定理 如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线和交线平行.

平面和平面平行的判定定理 如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

推论 如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线,那么这两个平面平行.

平面和平面平行的性质定理 如果两个平行平面同时与第三个平面相交,那么它们的交线平行.

4. 直线和平面垂直

直线和平面垂直的判定定理 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

三垂线定理 在平面内的一条直线,如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线,如果它和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直.

5. 空间向量及其运算

空间向量运算律

(1) 加法交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 加法结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) 数乘分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

共线向量定理 对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq 0)$, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

推论 如果直线 l 为经过已知点A 且平行于已知非零向量$\boldsymbol{a}$的直线,那么对任一点 O,点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数t,满足等式$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$,其中向量 $\boldsymbol{a}$ 叫做直线 l 的方向向量.

共面向量定理 如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在实数对x,y,使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

推论 空间一点 P 位于平面MAB 内的充要条件是存在有序实数对x,y,使$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$;或对空间任一定点 O,有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\cdot\overrightarrow{MA}+y\cdot\overrightarrow{MB}$.

空间向量基本定理 如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$,存在一个惟一的有序实数组 x,y,z,使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

推论 设 O,A,B,C 是不共面的四点,则对空间任一点,都存在惟一的三个有序实数 x,y,z,使$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

6. 空间向量的坐标运算

一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},$$

$$d_{A,B}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

直线和平面垂直的性质定理 如果两条直线同垂直于一个平面，则这两条直线平行.

7. 直线和平面所成的角与二面角

已知 AO 是平面 α 的斜线，A 是斜足，AB 是 AO 在平面 α 上的射影，AC 是 α 内任意一条直线. 设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1，AB 与 AC 所成的角为 θ_2，AO 与 AC 所成的角为 θ，则

$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

平面的斜线和它在平面的射影所成的角，是这条斜线和这个平面内任一条直线所成的角中最小的角.

两个平面垂直的判定定理 如果一个平面过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

两个平面垂直的性质定理 如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

8. 距离

任意两条异面直线有且只有一条公垂线.

两条异面直线的公垂线段长是分别连结两条异面直线上两点的线段中最短的一条.

9. 棱柱与棱锥

棱柱的性质：

(1) 棱柱的各个侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；直棱柱的各个侧面都是矩形；正棱柱的各个侧面都是全等的矩形.

(2) 棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形.

(3) 过棱柱不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形.

定理 平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分.

定理 长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.

棱锥的性质：

定理 如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

正棱锥的性质：

(1) 正棱锥的各侧棱都相等，各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等.

(2) 正棱锥的高、斜高和斜高在底面内的射影组成一个直角三角形，正棱锥的高、侧棱、侧棱在底面内的射影也组成一个直角三角形.

10. 多面体欧拉定理的发现

欧拉定理 简单多面体的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 间有关系：$V+F-E=2$.

11. 球

球的截面的性质：球心到截面的距离 d 与球的半径 R，截面圆的半径 r 有下面的关系：

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

定理 半径是 R 的球的体积是 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

定理 半径是 R 的球的表面积是 $S=4\pi R^2$.

基础例说·基本训练

9.1 平面的基本性质

【例说】

例 1 用符号表示下列语句,并画出图形.

(1) 点 A 在直线 a 上, a 在平面 α 内;

(2) 平面 β 过直线 b 及 b 外一点 M,点 N 在平面 β 外,直线 c 过点 M,N;

(3) 平面 α 过平行直线 m 与 l,平面 β 过直线 l 和平面 α 外一点 P.

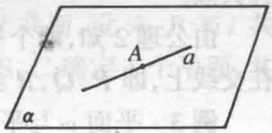

图 9-1

解 (1) 如图 9-1 所示,$A\in a$,$a\subset\alpha$.

(2) 如图 9-2 所示,$M\notin b$,$M\in\beta$,$b\subset\beta$,$N\notin\beta$,$M\in c$,$N\in c$.

(3) 如图 9-3 所示,$m\parallel l$,$m\subset\alpha$,$l\subset\alpha$,$P\notin\alpha$,$P\in\beta$,$l\subset\beta$.

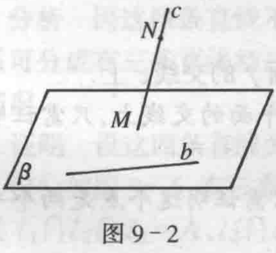

图 9-2

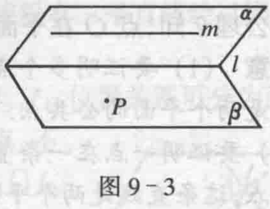

图 9-3

注意 (1) 点与直线的关系、点与平面的关系是元素与集合的关系,只能用符号$\in$或$\notin$表示,直线与平面的关系是集合与集合之间的关系,只能用符号$\subset$或$\not\subset$表示.

(2) 画图形一般先画平面,再画线、点.

例 2 如图9-4,$\triangle ABC$ 三边所在的直线分别交平面 α 于点 P,Q,R.求证:P,Q,R 三点在同一直线上.

证明 $\because$ 点 C 在直线 AB 外,

$\therefore$ C 与直线 AB 确定平面 β.

$\because$ $P\in AB, AB\subset\beta$,

$\therefore$ $P\in\beta$,P 是平面 α 与平面 β 的一个公共点.

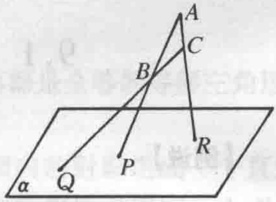

图 9-4

同理,Q,R 也是平面 α 与平面 β 的公共点.

由公理 2 知,两个平面有且只有一条交线,所以,P,Q,R 都在交线上,即 P,Q,R 共线.

例 3 平面 α 与平面 β 交于直线 a,平面 α 与平面 γ 交于直线 b,且 a,b 交于点 O.求证:点 O 在平面 β 与平面 γ 的交线 c 上.

分析 由公理 2 知,要证明点 O 在交线 c 上,只需证明点 O 在平面 β,γ 内.

证明 $\because$ $a\cap b=O$, $\quad\therefore$ $O\in a, O\in b$.

$\because$ $\alpha\cap\beta=a$, $\alpha\cap\gamma=b$,

$\therefore$ $a\subset\beta, b\subset\gamma$.

$\therefore$ $O\in\beta, O\in\gamma$,即 $O\in\beta\cap\gamma$.

由公理 2 知,点 O 在平面 β 与平面 γ 的交线 c 上.

注意 (1) 要证明多个点在两个平面的交线上,只需证明这些点都是两个平面的公共点.

(2) 要证明一点在一条直线上,只需证明这个点是两个平面的公共点,这条直线是两个平面的交线.

例 4 (1) 同一平面内的三条直线可把平面分成几个部分?

(2) 三个平面可把空间分成几个部分?

解　(1) 同一平面内三条直线可把平面分成 4,6 或 7 个部分.

(2) 三个平面可把空间分成 4,6,7 或 8 个部分.

注意　通过"类比",可以把平面几何中的图形性质在立体几何中加以拓宽."类比"是数学中的重要推理方法之一,也是我们学习数学的一种重要方法.

例 5　一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点,可以确定多少个平面?说明理由.

解　设直线为 l,直线 l 外不共线三点为 A,B,C.

(1) 若 A,B,C 三点与 l 共面,只能确定 1 个平面.

(2) 若 A,B,C 三点中恰好有两点与 l 共面,设 A,B 与 l 共面,另有点 C 与 l 确定 1 个平面,三点 A,B,C 确定 1 个平面,共有 3 个平面.

(3) 若 A,B,C 三点无任何两点与 l 共面,这时点 A 与 l,点 B 与 l,点 C 与 l 分别确定 1 个平面,三点 A,B,C 确定 1 个平面,共有 4 个平面.

综上所述,可以确定平面的个数是 1 个或 3 个或 4 个.

例 6　已知四条直线两两相交,且不经过同一点.求证:这四条直线共面.

分析　因这四条直线不经过同一点,所以这四条直线的位置关系可分成有三条直线经过同一点或没有三条直线经过同一点两种情况.

证明　设这四条直线为 l_1,l_2,l_3,l_4,位置关系可分为两类:

(1) 如图 9-5,有三条直线共点,不妨设 $l_1\cap l_2\cap l_3=A$, $l_4\cap l_1=B$, $l_4\cap l_2=C$, $l_4\cap l_3=D$.

$\because$ $l_4\cap l_1=B$,

$\therefore$ l_1 与 l_4 确定一个平面,记为 α.

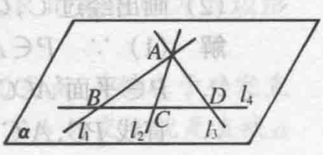

图 9-5

$\because\ C\in l_4, A\in l_1$,且 $l_1\subset\alpha, l_4\subset\alpha$,

$\therefore\ A, C\in\alpha$, $\quad\therefore\ l_2\subset\alpha$.

同理,$l_3\subset\alpha$.则 l_1, l_2, l_3, l_4 共面.

(2) 如图 9-6,若已知四条直线中任三条直线都不交于同一点,设 $l_1\cap l_2=A, l_1\cap l_3=B, l_1\cap l_4=C, l_2\cap l_3=D, l_2\cap l_4=E, l_3\cap l_4=F$.

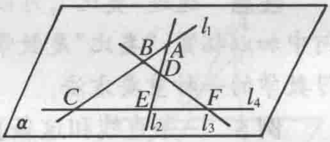

图 9-6

$\because\ l_1\cap l_2=A$,

$\therefore\ l_1, l_2$ 确定一个平面,记为 α.

$\because\ B\in l_1, D\in l_2$,且 $l_1, l_2\subset\alpha$, $\quad\therefore\ B, D\in\alpha$.

又$\because\ B, D\in l_3$, $\quad\therefore\ l_3\subset\alpha$.

同理,$l_4\subset\alpha$.故 l_1, l_2, l_3, l_4 共面.

综上所述,这四条直线共面.

注意 证明空间的若干个点或若干条直线都在同一平面内的问题称为共面问题.证明共面问题常用的方法有:

①先由给定的点和直线中的某些元素确定一个平面,再证其余元素在这个平面内;

②先过有关的点、线分别确定若干个平面,再证明这些平面都重合.

例 7 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,点 P, Q, R 分别在棱 AA', BB', DD' 上.

(1) 画出直线 CP 与平面 $A'B'C'D'$ 的交点;

(2) 画出经过 C, Q, R 三点的截面.

解 (1) $\because\ P\in AA', AA'\subset$面 $ACC'A'$,

$\therefore\ P\in$平面 $ACC'A'$.

$\therefore$ 直线 $PC, A'C'\subset$平面 $ACC'A'$.

延长 CP,与直线 $C'A'$相交于点 M(如图 9-7).

$\because$ $M \in C'A'$，$C'A' \subset$ 平面 $A'B'C'D'$，

$\therefore$ $M \in$ 平面 $A'B'C'D'$，点 M 就是直线 CP 与平面 $A'B'C'D'$ 的交点.

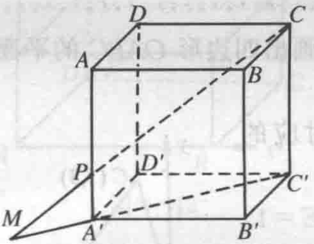

图 9－7

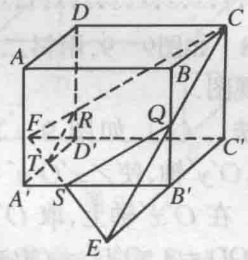

图 9－8

(2) 记过点 C, Q, R 的平面为 α.

$\because$ $Q \in BB'$，$BB' \subset$ 平面 $BCC'B'$，

$\therefore$ $Q \in$ 平面 $BCC'B'$，

$\therefore$ $CQ, B'C' \subset$ 平面 $BCC'B'$.

延长 CQ，与直线 $C'B'$ 相交于点 E（如图9－8）.

$\because$ $E \in CQ$，$E \in B'C'$，且 $CQ \subset$ 平面 α，$C'B' \subset$ 平面 $A'B'C'D'$，

$\therefore$ E 是平面 α 与平面 $A'B'C'D'$ 的公共点.

同理，延长 CR，与直线 $C'D'$ 相交于点 F，F 为平面 α 与平面 $A'B'C'D'$ 的公共点.

由公理 2 知，直线 EF 为平面 α 与平面 $A'B'C'D'$ 的交线.

在平面 $A'B'C'D'$ 内，直线 EF 与 $A'B'$，$A'D'$ 交于 S, T，则 S, T 为平面 α 与直线 $A'B'$ 与 $A'D'$ 的交点.

连结 QS, ST, TR，则过三点 C, Q, R 的截面即为五边形 $CQSTR$.

注意　(1) 要确定直线 a 与平面 α 的交点，关键在于确定直线 a 所在平面与平面 α 的交线 b，直线 a 与 b 的交点就是直线 a 与平面 α 的交点.

(2) 作截面时,要注意截面的完整性,应画出截面与正方体各面所在平面的交线.要确定两个平面的交线,关键在于确定两个平面的两个公共点,这两个公共点的连线就是两个平面的交线.

例 8 如图9-9,用斜二测画法画出四边形 $OABC$ 的平面图形的直观图.

画法 (1) 如图 9-10,画对应的 $O'x'$轴,$O'y'$轴,使$\angle x'O'y'=45°$.

(2) 在 $O'x'$轴上,取 $O'E'=OE=1$,$O'D'=OD=3$,$O'B'=OB=4$,分别过点 E',D'作$E'C' \parallel y$ 轴,$D'A' \parallel y$ 轴,并且使 $E'C'=\frac{1}{2}EC=\frac{3}{2}$,$D'A'=\frac{1}{2}DA=1$.

(3) 连结 $O'A'$,$A'B'$,$B'C'$,$C'O'$,所得的四边形 $O'A'B'C'$ 就是四边形 $OABC$ 的直观图(如图 9-11).

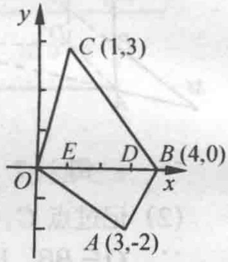

图 9-9

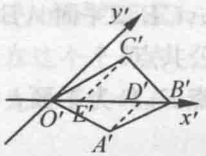

图 9-10

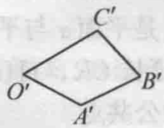

图 9-11

例 9 画长、宽、高分别为4 cm,4 cm,2 cm 的长方体的直观图.

画法 (1) 作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$(如图 9-12),使$\angle BAD=45°$,$AB=4$ cm,$AD=2$ cm.

(2) 过 A 作 z'轴,使$\angle BAz'=90°$.分别过点 A,B,C,D,沿 z'轴的正方向取$AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm.

(3) 连结 $A'B'$,$B'C'$,$C'D'$,$D'A'$.