21世纪本专科规划课改教材

高等数学导学教程

熊德之 陈 君 主编

科学出版社

21 世纪本专科规划课改教材

高等数学导学教程

熊德之　陈　君　主编

科学出版社

北　京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

本书系高等数学课程的辅导教材，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、空间解析几何与向量代换、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和全国硕士研究生入学考试数学（一）试题. 各章由内容提要、疑难解析、典型例题精讲与方法归纳、解题能力训练四个部分组成. 全书紧扣教学大纲，叙述详尽，富有启发性和很强的实用性.

本书可作为本、专科学生学习高等数学的辅导书和考研人员的复习参考书，也可供教师教学时参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导学教程/熊德之，陈君主编. —北京：科学出版社，2011.8
21 世纪本专科规划课改教材
ISBN 978-7-03-031963-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①熊… ②陈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 154671 号

责任编辑：曾 莉 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2011 年 8 月第一次印刷　印张：23 1/2
印数：1—4 000　字数：464 000

定价：39.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

高等数学是高等学校理工类各专业的一门重要基础课，它不仅是众多后续课程的基础，而且在现代科学技术和经济建设中的应用越来越广泛. 在当代大学生的知识能力结构中，数学知识和能力已经成为不可缺少的部分. 但是，由于高等数学是大学生入学后的第一门数学课，与中学数学的连接有一定跨度，又由于该课程涉及内容广泛，知识点多且有一定难度，教学速度也比中学快很多，因此许多学生常常感到难以适应这门课程的学习. 为了帮助读者学好高等数学这门课程，同时也为了准备报考研究生的朋友有一本自己熟悉的复习参考资料，我们编写了这本《高等数学导学教程》.

本书根据教育部制定的《工科类本科数学基础课程基本要求》，并参照全国硕士研究生入学考试数学考试大纲进行编写. 内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、空间解析几何与向量代换、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等，还选录了近几年全国硕士研究生入学考试的高等数学试题，并进行了详细解答. 各章由内容提要、疑难解析、典型例题精讲与方法归纳、解题能力训练（含参考答案与提示）四个部分组成. “内容提要”系统归纳了各章的主要概念、定理、公式和解题方法，帮助读者总结、复习所学的内容，使读者在没有教材的情况下也能复习、掌握高等数学的基本知识. “疑难解析”分析各章的难点、疑点，剖析常见错误，对读者可能遇到的一些疑难问题进行解答. 读者在这里可根据提问，先主动思考，再参阅解答，

感受到犹如与老师在面对面地交流."典型例题精讲与方法归纳"是本书的精髓部分,按照知识点或解答方法分类选题讲解,在解题过程中启发读者分析理解题意,力求解题思路清晰,步骤要领翔实,并适时对相关知识进行凝练提高."解题能力训练"是配套习题,并附有习题的答案与提示,可使读者通过练习,达到巩固所学知识的目的.

本书由熊德之、陈君主编,参加编写的人员分工为:第一章、第二章、第三章由熊德之编写;第四章、第五章由丁勇编写;第六章、第七章和研究生入学考试试题部分由陈君编写;第八章、第九章由陈里编写;第十章、第十一章由赵跃辉编写;最后由熊德之、陈君统稿、定稿.在编写过程中,我们还参阅了有关高等数学辅导资料,武汉大学严戎教授也为本书做了很多工作,在此一并表示感谢.

由于编者水平所限,书中难免存在未尽和不妥之处,敬请广大读者批评指正.

编　　者

2011年3月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第一章　函数与极限

一、内 容 提 要

(一) 函数概念

定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果按照某个法则 f，对于每个数 $x \in D$，变量 y 都有唯一确定的值和它相对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数，记为 $y = f(x)$. 数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

(二) 函数特性

1. *有界性*　设 $f(x)$ 的定义域为 D，$X \subset D$. 如果存在 $M > 0$，使得 $\forall x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

$f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 X 上有上界且有下界.

2. *单调性*　设 $f(x)$ 的定义域为 D，$X \subset D$. $\forall x_1, x_2 \in X$，且 $x_1 < x_2$，若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调增；若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 严格单调增. 反之，若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调减；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 严格单调减.

3. *奇偶性*　设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. *周期性*　设 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $T > 0$，使得 $\forall x \in D$，有 $x \pm T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期.

通常把 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期.

(三) 极限定义

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

一般，$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 时刻，从该时刻以后，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 且 $\lim f(x) = A$.

(四) 极限的性质

1. 唯一性

(1) 若数列$\{x_n\}$的极限存在,则极限值唯一;

(2) 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限值唯一.

2. 有界性

(1) 若极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,则数列$\{x_n\}$有界;

(2) 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则$f(x)$在$x_0$的某个去心$\delta$邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有界.

3. 保号性

(1) 若极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,且$a>0$(或$a<0$),则$\exists N>0$,当$n>N$时,恒有$x_n>0$(或$x_n<0$);

(2) 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),则$f(x)$在$x_0$的某个去心$\delta$邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

(五) 极限的运算法则

1. 设$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

$$\begin{cases}\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\\ \lim f(x)g(x)=AB,\\ \lim f(x)/g(x)=A/B\ (B\neq 0).\end{cases}$$

2. $\lim f(x)=0$,$g(x)$有界$\Rightarrow \lim f(x)g(x)=0$.

3. 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$且$u=\varphi(x)\neq a\ (x\in\mathring{U}(x_0))$,又$\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a} f(u)=A.$$

(六) 无穷小与无穷大

1. 无穷小与极限的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)\quad (\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0).$$

2. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数为无穷小,恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

3. 无穷小的比较　设α,β均为同一过程 lim 的无穷小.

(1) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小,记为$\beta=o(\alpha)$,或称$\alpha$是$\beta$的低阶无穷小;

(2) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\ (c\neq 0)$,则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小;

(3) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 是 α 的等价无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$；

(4) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\ (c\neq 0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

4. 无穷小替换定理

设 α,β 均为无穷小，$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，如果 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A$(或 ∞)，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A\ (\text{或}\ \infty).$$

5. 常用等价无穷小　当 $x\to 0$ 时，有

$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq 0).$

(七) 两个准则和两个重要极限

1. 准则 I(夹逼准则)　若数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 准则 II(单调有界准则)　单调有界数列必有极限.

3. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

(八) 函数连续概念

1. $f(x)$ 在点 x_0 处连续的等价定义

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

2. 左连续与右连续

左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$；右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

(九) 间断点的类型

间断点 $\begin{cases}\text{第一类间断点：左、右极限均存在的间断点}\begin{cases}\text{可去间断点：左、右极限相等的间断点}\\ \text{跳跃间断点：左、右极限不相等的间断点}\end{cases}\\ \text{第二类间断点：不是第一类间断点的其他间断点(在间断点处左、右极限至少有一个不存在)}\end{cases}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(十) 连续函数的运算

1. 四则运算　若 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处连续.

2. 复合运算　若 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$u_0 = \varphi(x_0)$, $f(u)$ 在 u_0 处连续，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

(十一) 闭区间上连续函数的性质

1. 有界性和最大值、最小值定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必可取得最大值和最小值.

2. 零值定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

3. 介值定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 c, $\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = c$.

二、疑 难 解 析

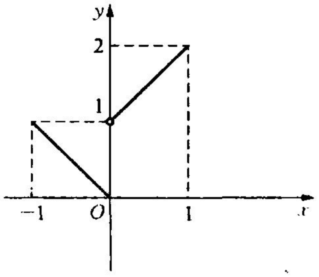
1. 单调函数必存在反函数，不单调的函数是否一定没有反函数？

答　不是的. 函数 f 是否存在反函数，取决于 f 是否为 D 到 $f(D)$ 的一一映射. 如果是，则存在反函数，否则就不存在反函数. 函数 f 在 D 上单调只是 f 为一一映射的一个充分而非必要条件. 例如，函数

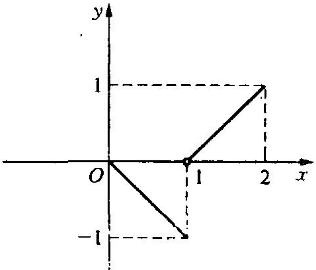
$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x+1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 不单调(图 1-1(a))，但它存在反函数(图 1-1(b))

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$



(a)



(b)

图 1-1

2. 如何理解类似 $f(x+2)$，$f(\sin x)$这样的函数记号？

答　$f(x+2)$，$f(\sin x)$都是表示复合函数的记号. 如果令 $u=x+2$，则 $f(x+2)$ 表示由 $f(u)$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 例如，若设 $f(x+2)=x^2-2x+4$，则

$$x^2-2x+4=(x+2)^2-6(x+2)+12=u^2-6u+12,$$

即 $f(u)=u^2-6u+12$. 这就是说，$f(x+2)=x^2-2x+4$ 是由 $f(u)=u^2-6u+12$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 此时 $f(\sin x)=\sin^2 x-6\sin x+12$.

3. 数列 x_n 与数列 $|x_n|$ 的敛散性是否相同？

答　一般说它们的敛散性是不同的.

若数列 x_n 收敛，则数列 $|x_n|$ 也收敛，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 这是因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，又因为

$$\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|,$$

从而有 $\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$ 成立.

反之不成立. 例如，数列 $|(-1)^n|$ 是收敛的，但数列 $(-1)^n$ 发散.

4. 如何掌握不同极限过程中极限的定义？

答　所谓极限过程，指的是自变量的变化趋势. 一般有 7 种情形：$n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$.

虽然当自变量的变化过程不同的时候，极限定义的表述略有差别，但它们的本质是相同的. $\lim f(x)=A$，即 $\forall\varepsilon>0$，总存在一个时刻，使得该时刻后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 例如，$\forall\varepsilon>0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，存在的时刻是指存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，存在的时刻是指存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，存在的时刻是指存在正数 δ，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 掌握了极限定义的实质，在表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

5. 求函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？

答　(1) 若 x_0 是分段函数的分段点，且 x_0 的左、右两侧函数的表达式不一样，则求分段点 x_0 的极限时一定要先考察左、右极限是否存在，再确定 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 但是，并不是所有分段函数在分段点的极限都要求左、右极限. 如果分段点 x_0 的左右两侧函数表达式相同，且当 $x\to x_0$ 时，x_0 的左右两侧 $f(x)$ 的变化趋势也一样，则不必求左、右极限，可直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

有
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

(2) 一般来说，求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时，如果$f(x)$在$x_0$两侧变化趋势一致，则不必分开讨论；如果发现两侧变化趋势可能有差别，则应分别研究左、右极限. 例如，求$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，由于$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以需要考察左、右极限. 这时$\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以极限不存在. 类似的例子还有$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{1}{x}$等.

6. 无穷大量与无界量有什么联系和区别?

答 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则根据无穷大的定义，$\forall M>0$(不论$M$多么大)，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|>M$. 这表明对于$x_0$的去心邻域里的一切点$x$，都必有$|f(x)|>M$.

若$f(x)$在x_0的去心邻域内无界，则对于无论多么大的正数M，在该去心邻域内存在点x，使得$|f(x)|>M$. 这表明$\exists x_1\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得$|f(x_1)|>M$，但不是$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得$|f(x)|>M$.

对比上述定义可知，在自变量的同一变化过程中，无穷大量一定是无界量，但无界量未必是无穷大量. 例如，当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$是无界量，但不是无穷大量.

7. 利用等价无穷小代换求极限时，应该注意什么问题?

答 根据等价无穷小代换定理，用等价无穷小代换求极限时，是将分子和分母的整体分别代换成与它们各自等价的无穷小. 若将分子(或分母)中的和(或差)中的某项用与之等价的无穷小作代换，则不能保证代换后的新分子(或分母)与原来的分子(或分母)是等价无穷小. 例如，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$，若将$\tan x$，$\sin x$分别换成$x$，则分子为0，从而极限为0，显然0与$\tan x-\sin x$不等价，所以这个极限结果是错误的. 事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2/2}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

这说明，当$x\to 0$时，$\tan x-\sin x$与$\dfrac{1}{2}x^3$是等价的.

特别指出的是，若分子(或分母)为若干因子的乘积，则可对其中的一个或多个

无穷小因子作等价无穷小代换，这时可保证所得的新分子(或分母)的整体为原分子(或分母)的整体的等价无穷小.

8. 关于初等函数的连续性，结论为“初等函数在其定义区间内都是连续的”，为什么不表述成“初等函数在其定义域内都是连续的”?

答　我们知道基本初等函数在其定义域内是连续的，但初等函数在其定义域的某些点处却不一定能定义连续性. 例如，初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$，它的定义域 $D=\{x \mid x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$f(x)$在 D 中任一点的小去心邻域无定义，按连续性定义，就不能讨论 $f(x)$在这些点处的连续性，因此不能说 $f(x)$在这些点处连续.

但由连续函数的运算法则(四则运算法则和复合运算法则)可知，初等函数在其定义区间内是连续的. 以连续函数的复合运算法则为例，如果初等函数的定义域 $D_{f\circ g}$ 内的某点 x_0 的某个邻域包含在 $D_{f\circ g}$ 内: $U(x_0)\subset D_{f\circ g}$ (即 x_0属于 $f[g(x)]$的某一定义区间)，则 $f[g(x)]$在点 x_0必定连续. 即初等函数 $f[g(x)]$在其定义区间内是连续的.

9. 如果不是初等函数，在定义区间是否可以处处不连续呢?

答　如果函数 $f(x)$不是初等函数，那么 $f(x)$在定义区间内可能是连续的，也可能有间断点，更特殊的情形，可以在定义区间内处处不连续. 例如，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在定义区间$(-\infty,\ +\infty)$连续，$g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在定义区间$(-\infty,\ +\infty)$有间断点 $x=0$，而狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 在定义区间$(-\infty,\ +\infty)$处处不连续. 因为对于任何点 x_0，$D(x)$在 x_0的任意邻域既有有理点，又有无理点，当 $x\to x_0$ 时，$D(x)$的值在 0 与 1 两数之间交替变换，故没有极限. 因此定义区间$(-\infty,\ +\infty)$中所有点都是 $D(x)$的第二类间断点.

10. 函数 $f(x)$在闭区间$[a,\ b]$上连续时，则它具有几个重要性质. 如果 $f(x)$在开区间$(a,\ b)$连续，或是在无穷区间$[a,\ +\infty)$连续，这些性质还能成立吗?

答　一般来说不一定成立. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,\ 1)$连续，但它在该区间上无最大值和最小值，且无界，也不一致连续. 又如，函数 $y=x$ 在$[a,\ +\infty)$连续，但它在该区间上无最大值，也无界.

对于无穷区间，有时通过适当加强条件，可以使某些性质成立. 例如，设 $f(x)$在$[a,\ +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，则 $f(x)$在$[a,\ +\infty)$上有界. 又如，$f(x)$在$[a,\ +\infty)$连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在且与 $f(a)$异号，则 $f(x)$在$(a,\ +\infty)$内必存在零点.

三、典型例题精讲与方法归纳

(一) 求函数的定义域

例1 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{x-7}+\lg(9-x)$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-28}+\arcsin\dfrac{2x-1}{9}$;

(3) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$, $[x]$表示不超过 x 的最大整数.

解 (1) 要使 $f(x)$有意义,x 应满足

$$\begin{cases}x-5\geqslant 0,\\ x-7\neq 0,\\ 9-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 5,\\ x\neq 7,\\ x<9.\end{cases}$$

故 $D_f=\{x\mid 5\leqslant x<7 或 7<x<9\}$.

(2) $f(x)$的自变量 x 应满足

$$\begin{cases}x^2+3x-28\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{2x-1}{9}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 4 或 x\leqslant -7,\\ -4\leqslant x\leqslant 5.\end{cases}$$

故 $D_f=[4,5]$.

(3) 要使 $f(x)$有意义,x 应满足

$$-1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1 \quad 且 \quad [x]\neq 0.$$

由于 $x-1<[x]\leqslant x$,因此,当 $x<0$ 时,$0<\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$;当 $0\leqslant x<1$ 时,$\dfrac{x}{[x]}$无意义;当 $x\geqslant 1$ 时,$1\leqslant\dfrac{x}{[x]}$(当 $x\in\mathbf{N}^+$ 时,等号成立). 故

$$D_f=\{x\mid x<0 或 x=1,2,3,\cdots\}.$$

例2 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -e^x, & x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\ln x$,求 $f[\varphi(x)]$的定义域.

分析 求复合函数 $f[\varphi(x)]$定义域的方法是解不等式组$\begin{cases}x\in D_\varphi,\\ \varphi(x)\in D_f.\end{cases}$

解 由于 $D_f=(-\infty,+\infty)$，$D_\varphi=(0,+\infty)$，因此，$\forall x\in D_\varphi$，即 $0<x<+\infty$ 时，有 $-\infty<\varphi(x)=\ln x<+\infty$，即 $\varphi(x)\in D_f$. 故 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(二) 求函数的表达式

例 3 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解 为了求 $f(x-2)$，需要先求 $f(x)$.

方法一 $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$，故

$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2.$$

方法二 令 $x=t-2$，代入原式，得

$$f(t)=2^{(t-2)^2+4(t-2)}-(t-2)=2^{t^2-4}-t+2.$$

由上述两种方法的结果，得

$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4.$$

例 4 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f[f[\cdots f}_{n次}(x)]]$.

解 因为

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(x/\sqrt{1+x^2})^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f(x)}{\sqrt{1+2[f(x)]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+2(x/\sqrt{1+x^2})^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

由数学归纳法，可得

$$\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n次}(x)]\}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 5 求函数 $f(x)$ 的表达式.

(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+2$，且 $f(x+1)-f(x)=2x-1$；

(2) 设 $y=\dfrac{1}{2x}f(t-x)$，且 $y\,|_{x=1}=\dfrac{t^2}{2}-t+5$.

解 (1) 由 $f(x+1)-f(x)=2x-1$，得

$$a(x+1)^2+b(x+1)+2-(ax^2+bx+2)=2x-1,$$

即
$$2ax+a+b=2x-1.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com