高等学校教材经典同步辅导丛书数学基础类(一)

配高教社《高等数学》(第六版)上册 同济大学数学系 编

高等数学

同步辅导及习题全解

同济·第六版 上册

华腾教育教学与研究中心

王建福 主编

深度学习,准确指导考研

◎ 联系考研 ◎ 习题全解 ◎ 应试必备

◎ 紧扣教材 ◎ 知识精讲 ◎ 网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典

高等数学

（第六版）上册

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
王建福　主编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，同济大学应用数学系编的《高等数学》(第六版)教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、学习导引、知识点归纳、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析、课后习题全解及备忘录等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校高等数学课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)同步辅导及习题全解/王建福主编.
徐州：中国矿业大学出版社，2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-395-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086956 号

书　　名　高等数学(上册)同步辅导及习题全解
主　　编　王建福
责任编辑　罗　浩
选题策划　孙怀东
特约编辑　王丽娜
出版发行　中国矿业大学出版社
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　880×1230　1/32　**本册印张** 14.75　**本册字数** 264 千字
印　　次　2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
总 定 价　114.00 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

主　任：王　飞

副主任：夏应龙　倪铭辰　李瑞华

编　委（按姓氏笔画排序）：

于志慧	王海军	王　焯	韦爱荣
甘　露	丛　维	师文玉	吕现杰
朱凤琴	朵庆春	刘胜志	刘淑红
严奇荣	李　丰	李凤军	李　冰
李　波	李炳颖	李　娜	李晓光
李晓炜	李雅平	李燕平	何联毅
邹绍荣	宋　波	张旭东	张守臣
张鹏林	张　慧	陈晓东	陈瑞琴
范亮宇	孟庆芬	高　锐	

前言

PREFACE

《高等数学》是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生理工专业入学考试的统考课。

同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等数学同步辅导及习题全解》(第六版)。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性，启发性，指导性和补充性的特点。

考虑到《高等数学》这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书中的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 学习导引　说明该章包括的主要内容，学习的侧重点，以及要掌握的知识点。

3. 知识要点及常考点　串讲概念，总结性质和定理，使知识全面系统，便于掌握。

4. 本节考研要求　简明扼要地说明本节的考研要求，明确学习任务。

5. 题型、真题、方法　对本章所涉及的知识点进行总结，划分题型，通过相应的例题及历年考研真题来深入、详细地讨论和分析，引导学生思考问题，拓展思路。

6. 课后习题全解　给出了同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)各章习题的答案。我们给出了详细的解题过程，而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

7.2008 年考研真题　本书在最后附有 2008 年研究生统考数学真题，并给出了相应的答案，便于学生对自己的学习效果进行考核。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：
http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件：
huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南

高等数学是理工类、经济管理类等各专业必修的一门重要的理论基础课，又是学习后续技术基础课程和专业课程的重要基础，也是有关各专业研究生入学考试的必考科目。

学习高等数学的目的是要掌握高等数学的基本概念、基本定理以及重要公式，进而提高分析问题与解决问题的能力，同时也为后续各专业课的学习打下基础。

高等数学具有很强的理论性和逻辑性，需要一定的初等数学基础。同时，高等数学具有很广泛的基础性和适用性，是电学、力学、化学、经济管理等许多专业最重要的先修课程。电学中电路理论、数学信号处理等课程中都广泛运用了微积分、傅里叶级数等相关知识。化学中物理化学、分析化学等课程都用到了高等数学中的微积分、导数等相关知识。力学中理论力学、材料力学等课程都用到了微积分、无穷级数等相关知识。同样在经济管理类学科中，高等数学也得到了广泛运用。

高等数学共分为五个部分。第一部分为函数与极限，主要讲述了函数与极限的基本概念、性质及定理；第二部分为一元微积分，主要讲述了导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分、微分方程及其应用；第三部分为空间解析几何与向量代数，主要讲述了向量的运算及曲线曲面方程；第四部分为多元微积分，主要讲述了多元函数微分法、重积分、曲线曲面积分；第五部分为无穷级数，主要讲述了常用级数的概念、性质以及判定方法。

为了加强读者对高等数学相关知识的掌握，为了帮助读者学好这门基础课程，建议在学习过程中按以下方法学习：

1. 掌握基本概念、理解基本定理、熟记重要公式。

2. 要注意前后联系，融会贯通，保持知识的连贯性。

3. 培养自己分析和解决问题的能力。

4. 培养自己抽象思考和逻辑推理的能力。

5. 要养成认真思考、细心推导的良好学习习惯。

此外，为了帮助学生在期末、考研等考试中取得好成绩，我们提出以下建议：

1. 爱思考、勤分析。准确判断问题所蕴含的数学知识，并能够建立对应的模型，想出解决方法。

2. 能抽象、会推导。把具体的、复杂的问题化为抽象的、简单的数学问题，并能合理运用相关公式进行推理、演绎。

3. 多做题、善归纳。要解答大量的相关题目，并归纳总结解题思路及技巧，做到举一反三。

第一章　函数与极限

学习导引

函数是高等数学的研究对象，极限的方法是研究函数的基本方法，本章主要学习函数及其相关概念，函数的基本性质和常见初等函数，函数极限，无穷小与无穷大等. 本章是初等数学到高等数学的过渡篇，是高等数学的基础.

第一节　映射与函数

知识要点及常考点

1. 函数

(1) 定义：设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 是自变量，y 是因变量，变域 D 为定义域，记作 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

注　函数概念的两要素：① 定义域：自变量 x 的取值范围（若函数是用解析式表示的，则定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合）. ② 对应法则：给定 x 值，求 y 值的方法.

当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数，否则表示两个不同的函数.

(2) 高等数学中研究的对象是函数. 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量或几个量定了，另一个量也就被唯一确定，前者是一元函数，后者是多元函数.

(3) 常量与变量、自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量，在另一过程中可以是变量，一个量在某个过程中是自变量，在另一过程中可以是因变量，这一点既简单又重要.

(4) 函数表示法与变量用什么字母表示无关，即 $y=f(x)$ 与 $g=f(t)$ 表示同一函数，此为函数表示法的“无关性”.

2. 反函数

(1) 定义：设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为：$x=\varphi(y)$，其中 $\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2) 性质：① $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形重合；$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

② 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数.

③ 严格单调函数必有反函数，且严格递增（减）的函数的反函数也必严格递增（减）. 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数.

3. 复合函数

(1) 定义：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

(2) g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件：函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 $f(x)$ 的定义域 D_f 中，即 $g(D)\subset D_f$.

(3) 结合律成立，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$.

4. 分段函数

(1) 定义：在自变量不同变化范围内，对应法则不同，即用不同式子来表示同一个函数称作分段函数.

(2) 常见的分段函数：

① 符号函数 $$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

② y 是 x 的最大整数部分，记为 $y=[x]$.

③ 狄利克莱(Dirichlet) 函数 $$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

5. 初等函数

(1) 定义：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

(2) 基本初等函数包括五类函数：幂函数：$y=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R})$；指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$；对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$；三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

6. 函数的基本性质

(1) 单调性

定义：设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若 $\forall x_1, x_2 \in D$，有 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 单调上升，若 $\forall x_1, x_2 \in D$，有 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 单调下降.

注 若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降).

(2) 奇偶性

① 定义：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

常考点 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

② 常见的奇函数和偶函数：

偶函数：$C, x^2, x^{2n}, |x|, \cos x, \sec x, e^{x^2}, \sin x^2$.

奇函数：$x, x^3, x^{2n+1}, \dfrac{1}{x}, \sqrt[3]{x}, \sin x, \tan x, \cot x, \arcsin x, \arctan x$.

③ 奇偶函数的运算性质：

(ⅰ) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(ⅱ) 偶数个奇(或偶) 函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数.

(ⅲ) 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

(3) 有界性

① 定义：设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于一切 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界；若不存在这样的 $M > 0$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

② 六个常见的有界函数：

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad |\cos x| \leqslant 1, \quad (-\infty, +\infty)$$

$$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad |\arccos x| \leqslant \pi, [-1, 1]$$

$$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}, \quad |\operatorname{arccot} x| < \pi, (-\infty, +\infty)$$

(4) 周期性

① 定义：设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使对于任一 $x \in X$，恒有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，把满足

上式的最小正数 T 称为函数 T 的周期.

易错点 ①(ⅰ)周期函数不一定存在最小正周期,如常数函数.

(ⅱ)定义中,并不要求函数的定义域有界.

② 常见的周期函数:

(ⅰ)$y = \sin x, y = \cos x$,最小正周期为 2π;

(ⅱ)$y = \tan x, y = \cot x$,最小正周期为 π.

③ 周期函数的运算性质:

(ⅰ)若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(ⅱ)若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(ⅲ)若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$,是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

(ⅳ)若 $f(x)$ 为周期函数,则复合函数 $g[f(x)]$ 也是周期函数.

本节考研要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

题型、真题、方法

题型 1 判断函数的等价性

题型分析:当且仅当给定的两个函数,其定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数.

例 1 判别下列各组函数是否相等:

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$;

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

【思路点拨】 当且仅当给定的函数,其定义域和对应法则完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为

$(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)\neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$，故 $f(x)=g(x)=h(x)$.

例2 在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y=x^0$ 与 $y=1$； (2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

【思路点拨】 看定义域和对应法则是否相同.

解 (1) $y=x^0$ 的定义域为 $\{x\neq 0\}$；$y=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x\geqslant 0\}$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

现学现练 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$ 是否等价.（是）

题型2 求函数的定义域

题型分析：初等函数的定义域有下列原则：(1) 分母不能为零. (2) 偶次根式的被开方数大于等于零. (3) 对数的真数大于零. (4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x\mid |x|\leqslant 1\}$. (5) $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$. (6) $\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

例3 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(x+1)+2^{\frac{1}{x-1}}$； (2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

【思路点拨】 求函数的定义域一般主要针对一些基本形式来确定其定义，然后综合考虑. 基本形式可分为 $\sqrt{A}$，$\dfrac{1}{A}$，$\ln A$，$\arcsin A$，$\arccos A$ 等，其相应的定义域为 $A\geqslant 0$，$A\neq 0$，$A>0$，$|A|\leqslant 1$，$|A|\leqslant 1$ 等.

解 (1) $\begin{cases}x+1>0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|,\\ x\neq -1,\end{cases}$ 定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

例4 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.（考研题）

【思路点拨】 先确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域.