

修訂版

# 財務數學

## Mathematics of Finance

■ Petr Zima、Robert L. Brown、David M. Knox 合著

■ 施能仁、施純楨、施若竹 合譯

內容包含年金、房貸、個人融資、  
債券和未來投資計畫的評估等課題，  
對會計或商業類學子、  
會計工作者及投資者皆有極大助益。

Mc  
Graw  
Hill

美商麥格羅·希爾  
數學 系列叢書



五南

五南圖書出版公司  
財務金融書系

修訂版

# 財務數學

## Mathematics of Finance

■ David M. Knox 、 Petr Zima 、 Robert L. Brown 合著  
■ 施能仁、施純楨、施若竹 合譯

**Mc  
Graw  
Hill**

**Education**

US

Boston Burr Ridge, IL Dubuque, IA Madison, WI New York  
San Francisco St. Louis

International

Bangkok Bogotá Caracas Kuala Lumpur Lisbon London  
Madrid Mexico City Milan Montreal New Delhi Santiago  
Seoul Singapore Sydney Taipei Toronto

五南圖書出版公司 印行

財務數學 / David M. Knox, Petr Zima,  
Robert L. Brown 著 ; 施能仁, 施純楨, 施若  
竹譯. -- 修訂初版. -- 臺北市 : 麥格羅希爾,  
2008. 07

面 ; 公分

含索引

譯自 : Mathematics of finance, 4th ed.

ISBN 978-986-157-546-9 (平裝)

1. 商業數學

493.1

97011813

---

## 財務數學 修訂版

---

© 2008 年, 美商麥格羅·希爾國際股份有限公司台灣分公司版權所有。  
本書所有內容, 未經本公司事前書面授權, 不得以任何方式(包括儲存於  
資料庫或任何存取系統內)作全部或局部之翻印、仿製或轉載。

Original: Mathematics of Finance, 4e

By David M. Knox, Petr Zima, Robert L. Brown

ISBN: 978-0-07-551514-2

Copyright © 1983, 1984, 1987, 1993 by McGraw-Hill, Inc.

All rights reserved.

2 3 4 5 6 7 8 9 0 P H W 2 1 0 9

作 者 David M. Knox, Petr Zima, Robert L. Brown

譯 者 施能仁 施純楨 施若竹

合作出版 美商麥格羅·希爾國際股份有限公司 台灣分公司

暨發行所 台北市中正區博愛路 53 號 7 樓

TEL: (02) 2311-3000 FAX: (02) 2388-8822

<http://www.mcgraw-hill.com.tw>

五南圖書出版股份有限公司

台北市和平東路二段 339 號 4 樓

TEL: (02) 2705-5066 FAX: (02) 2706-6100

<http://www.wunan.com.tw>

總代理 五南圖書出版股份有限公司

出版日期 西元 2008 年 7 月 修訂初版一刷

西元 2009 年 3 月 修訂初版二刷

行政院新聞局出版事業登記證/局版北市業字第 323 號

印 刷 普賢王印刷有限公司

定 價 新台幣 500 元

---

ISBN : 978-986-157-546-9

---

給爺爺 奶奶

祈能永保安康

# 譯 序

本書係翻譯自澳洲 David M. Knox, Petr Zima 和 Robert L. Brown 三位教授所著之 *Mathematics of Finance*，譯成《財務數學》。其系統架構完整，範例說明深入淺出，圖表清晰，雖個案多以澳洲之情況為應用範例，但原理、計算、技巧相同，思維方式亦與我國雷同。

全文教材足供高等學府有關「商業計算」、「財務數學」、「財務工程」或「經濟行為」相關課程之金融分析工具，及一般商業活動之財務應用個案參考。

文承楊踐為、黃金生、胥愛琦、李春安、李明龍、吳榮振等六位老師諸多意見與刪補文辭，謹致謝意。並蒙國立彰化師範大學商業教育學系所及國際企業系所師生及國立雲林科技大學、國立虎尾科技大學之財務金融系所眾師友之指教與研習，教學相長，諸多增益，亦一併感恩。

施能仁、施純楨、施若竹譯

2008 年 4 月

# 序 言

利率影響層面甚廣，其效應涵蓋了如：眾生之銀行帳簿的各項存款利息、退休金的轉投資；信用卡和房貸利息的償付，或者多國籍企業在各國之長期資本市場的利息收益等等。

對每一位希望從事金融職場工作的人來說，必須先具備有相當的能力，且了解如何使用長、短期利率，應用在財務工程之精算。再者，當新世紀的來臨，我們都堅信，對於我們所擁有的財產，是如何受利率衝擊而影響到我們個人的生活，勢必要有更多的認知。

有了這樣的想法後，本文預定提供給讀者在廣泛的會計交易範疇內，關於利率上的使用有所理解，此內容將包含年金、房貸、個人融資、債券和未來投資計畫的評估等課題。

這些內容不僅會被會計類和商業類的大學生所引用及實務應用，連從事會計工作者和其他想對此類問題有更進一步了解的投資者都可適用。本書在這方面，可說是廣結了一些尚未發表或其他相關題材彙編而完成的作品。

本文也涵蓋了許多逐步分析的範例，其在財務計算上是非常有用的工具，例如，未來在發展出複雜的模式時，許多基礎計算工具必須快速地先具備了。因此，財務數學的基本原則，是未來更進一步發展、分析、決策釐訂前，必須先為讀者所理解與嫻熟的專業技術。

本文在開始之時，即假設讀者對數學上的知識已有相當程度的水準，因此，當在介紹各章節時，在代數方面均予省略。不過，針對本文相關數理內容，將以附錄方式，如對數、級數和線性規劃等，加以詳細補充說明。

財務數學較容易透過實例操作來詮釋和了解；因此，為了這個理由，

大部分教材是以實例操作、解說方式來編寫。

A 部分練習題之設計係幫助學生對主要觀念的理解。B 部分練習題則提供較深入的問題和一些進階題材。此外，每章也各附有一組總複習用的作業，供討論與模擬演算。

儘管經過嚴謹的編寫，但誤漏難免，作者願負全責，歡迎讀者不吝指正，賜教處為米勒波內大學。

文後，謹表：本文旨在幫助讀者對多數財務交易之計算內涵與理解，提供一個相當完整的教材範疇。

David M. Knox

Petr Zima

Robert L. Brown

# 致謝

本書之完成，首先感謝 Petr Zima 和 Robert Brown 對全文建立基礎架構之建議，次感謝廣泛的讀者提供各章相關建言，予豐富及改善本書題材。最後，仍得感謝 McGraw-Hill 書局之 Julie McNab 女士之專業，幫助完成這本佳作。

出版商和作者並向下列各先進之不吝指正，致以謝意：

David Allen 教授（伊地司・高文大學）

Margaret Atkinson（米勒波內大學）

Mary Dunkley（斯溫波內科技大學）

Lynette Ellis（蒙納斯大學）

Deirdre Keogh（查里司杜大學）

Elizabeth Walker（昆蘭科技大學）

David Westcott（馬克里大學）

Julianne Wright-Bartels（雪梨大學）

Ian McDermid（坎培拉大學）

David M. Knox

# 目錄

|    |  |
|----|--|
| 譯序 |  |
| 序言 |  |
| 致謝 |  |

|     |           |    |
|-----|-----------|----|
| 1   | 單利和單利貼現   | 1  |
| 1.1 | 單利        | 1  |
| 1.2 | 銀行的利息支付   | 7  |
| 1.3 | 現值        | 10 |
| 1.4 | 等值        | 16 |
| 1.5 | 分期付款      | 23 |
| 1.6 | 保證票據      | 25 |
| 1.7 | 總複習       | 31 |
| 2   | 複利        | 33 |
| 2.1 | 複利公式      | 33 |
| 2.2 | 等值率       | 41 |
| 2.3 | 複利現值      | 47 |
| 2.4 | 短期的終值或現值  | 52 |
| 2.5 | 求利率或相關期間  | 57 |
| 2.6 | 等值方程式     | 61 |
| 2.7 | 利率變動      | 68 |
| 2.8 | 其他複利理論的應用 | 73 |

|          |               |            |
|----------|---------------|------------|
| 2.9      | 總複習           | 77         |
| <b>3</b> | <b>年 金</b>    | <b>79</b>  |
| 3.1      | 定 義           | 79         |
| 3.2      | 普通年金的終值       | 80         |
| 3.3      | 普通年金的現值       | 91         |
| 3.4      | 屆期年金          | 101        |
| 3.5      | 終身年金          | 106        |
| 3.6      | 遞延年金          | 110        |
| 3.7      | 年金總結          | 113        |
| 3.8      | 總複習           | 119        |
| <b>4</b> | <b>進階年金問題</b> | <b>121</b> |
| 4.1      | 簡 介           | 121        |
| 4.2      | 找出分期付款        | 121        |
| 4.3      | 求出利率          | 127        |
| 4.4      | 求出年金期間        | 130        |
| 4.5      | 利率的改變         | 135        |
| 4.6      | 支付變動年金        | 139        |
| 4.7      | 總複習           | 148        |
| <b>5</b> | <b>普通年金</b>   | <b>151</b> |
| 5.1      | 簡 介           | 151        |
| 5.2      | 改變利率計算普通年金    | 152        |
| 5.3      | 找出分期付款        | 156        |
| 5.4      | 兩種選擇方法        | 159        |
| 5.5      | 總複習           | 167        |

|          |                 |            |
|----------|-----------------|------------|
| <b>6</b> | <b>房貸與個人借貸</b>  | <b>169</b> |
| 6.1      | 簡 介             | 169        |
| 6.2      | 抵押和其他可降低利率之貸款   | 171        |
| 6.3      | 應付貸款            | 179        |
| 6.4      | 貸款利率之改變         | 187        |
| 6.5      | 比較單一貸款的利息成本     | 196        |
| 6.6      | 固定利率貸款和第 78 條法則 | 202        |
| 6.7      | 總複習             | 217        |
| <b>7</b> | <b>債 券</b>      | <b>219</b> |
| 7.1      | 簡介及專有名詞         | 219        |
| 7.2      | 計算發行價格          | 220        |
| 7.3      | 計算與購買價格         | 229        |
| 7.4      | 計算利率            | 235        |
| 7.5      | 對債券課稅           | 243        |
| 7.6      | 溢價與折價           | 250        |
| 7.7      | 債券市場和其他證券       | 256        |
| 7.8      | 償債基金            | 267        |
| 7.9      | 總複習             | 273        |
| <b>8</b> | <b>商業決策和複利</b>  | <b>275</b> |
| 8.1      | 淨現值             | 275        |
| 8.2      | 內部報酬率           | 282        |
| 8.3      | 資本化成本           | 290        |
| 8.4      | 折 舊             | 295        |
| 8.5      | 總複習             | 305        |

|          |                             |            |
|----------|-----------------------------|------------|
| <b>9</b> | <b>或有負債的支付</b>              | <b>307</b> |
| 9.1      | 簡 介                         | 307        |
| 9.2      | 機 率                         | 308        |
| 9.3      | 數學期望值                       | 317        |
| 9.4      | 或有負債複利付款                    | 322        |
| 9.5      | 總複習                         | 331        |
| 附錄 A     | 指數與對數                       | 333        |
| 附錄 B     | 級 數                         | 345        |
| 附錄 C     | 線性插值 (Linear Interpolation) | 356        |
| 附錄 D     | 連續複利計算                      | 362        |
| 附錄 E     | 一年中每天的順序數值                  | 371        |
| 解 答      | 偶數題                         | 373        |
| 詞 彙      |                             | 383        |

# 1 單利和單利貼現

## 1.1 單 利 (Simple Interest)

假設某投資者借給你一筆錢，於合約到期時，你必須償還這筆錢和使用這筆錢的代價，即所謂的利息（Interest）。以投資者的觀點，利息是投資這筆錢（或本錢）所賺取的收入。原始本錢的投入叫作本金，而本金和利息的加總即稱為終值（Future Value）。衍生出之金額占本金之比例稱為利率，即在某一單位時間，從本金所賺取到利息的比例。

早期，借貸本金和利息的償付部分是有形物品（例如穀類）。但現在通常以「錢」的形式表示。而以本金賺取利息的慣例早被記錄在人類史裡，並陳列在巴比倫教條檔案中，至今已超過四千年之久。

使用單利的方法，貸款最終日的應付利息是基於原始本金、貸款期限和利息的比例來計算。

為了計算這些結果，須使用以下的標記：

$P$  = 表本金或  $S$  的現值

$I$  = 單利的總值

$S$  = 終值或  $P$  的到期值（或本利和）

$r$  = 每期利息的利率（通常以年計算）

$t$  = 每期的時間（通常以年計算）

單利之計算公式：

$$I = P \cdot r \cdot t \quad (1)$$

而對  $S$  總數的定義為：

$$S = P + I$$

套用  $I = P \cdot r \cdot t$ ，我們就  $P$ 、 $r$  和  $t$  而言， $S$  得：

$$S = P + P \cdot r \cdot t$$

$$S = P(1 + rt) \quad (2)$$

在公式(2)的  $(1 + rt)$  被稱為單利因子，而從公式(2)以  $P$  本金計算  $S$  的計算過程被稱為單利的累積。從公式(2)我們也可得知：

$$P = \frac{S}{1 + rt} = S(1 + rt)^{-1} \quad (3)$$

我們稱  $P$  為現值（Present Value，簡稱  $PV$ ）或  $S$  的貼現值。在公式(3)的  $(1 + rt)^{-1}$  被稱為現值在單利的貼現因子。在 1.3 節內，我們將更詳細地探索現值的問題。

在採用年利率時，時間 $t$ 須以年計算。既然如此，當時間條件為月份時，則須換算為：

$$t = \frac{\text{月數}}{12}$$

且，當時間條件是天數時，則換算為：

$$t = \frac{\text{天數}}{365}$$

我們還必須注意到一些國際商業的處置慣例，如有些是以1年360天（並非365天）來估計。澳洲慣例係以1年365天來計算。台灣之股市、債市、外匯市場之應用，亦統一用365天計息，或辦理交割結算。



**例 1** 試求出一筆貸款 90 天，本金\$500，年利率 8.5%的單利計息有多少？

**解：**已知  $P=500$ ， $r=0.085$ ，時間=90 天，單利計息

$$\begin{aligned} I &= 500 \times 0.085 \times \frac{90}{365} \\ &= \$10.48 \end{aligned}$$



**例 2** 一對夫妻借了\$10,000，每個月的利率是 1%。已知其每個月須償付\$210，則其第 1 次的付款中有多少是用來支付利息，又，其另償付了多少的貸款本金？

**解：**已知  $P=10,000$ ， $r=0.01$ ， $t=1$  且

$$\begin{aligned} I &= 10,000 \times 0.01 \times 1 \\ &= \$100 \end{aligned}$$

故第1個月支付的利息是\$100，即另\$110是用來償付貸款。  
 注意：在這個例題是以月來計算，而非年計。故我們採用  
 題目原本給訂的利率，是因為這題原本就以月份來表示。

**範例 3** 一個放高利貸者制訂了一貸款\$100，到月底就必須償還\$120。試問其單利的年利率是多少？

**解：**已知  $P=100$ ， $I=20$ ， $t=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{I}{P \cdot t} \\ &= \frac{20}{100 \times \frac{1}{12}} \\ &= 2.40 \text{ 或 } 240\% \text{ (按年計)} \end{aligned}$$

**範例 4** 某人借了錢，60 天之後剛好須償還\$200。如果這筆償款\$200 包括本金和單利為 9%（按年計），則此人共借了多少錢？

**解：**已知  $S=200$ ， $r=0.09$ ， $t=\frac{60}{365}$  套用公式(3)得：

$$\begin{aligned} P &= \frac{200}{1 + 0.09(\frac{60}{365})} \\ &= \$197.08 \end{aligned}$$

**範例 5** 問須多久才可用\$3,000 去賺取\$60 的利息，利率為 6%（按年計）？

**解：**已知  $P=3,000$ ， $I=60$ ， $r=0.06$ ，

$$t = \frac{I}{P \cdot r} = \frac{60}{3,000 \times 0.06}$$

$$= \frac{1}{3}, \text{或曰 } 4 \text{ 個月}$$

## 在時間和日期之間

在計算單利時，很重要的一點是必須準確的計測天數。基於這點，我們把借錢的當天計算在內（或儲存日），但是不包括還錢的當天（或提取日）即算頭日不算尾日。有一個簡單的方法來決定天數，就是請參照附錄 E 指示。這個表實際上是一個行事曆，提供一年中天數的排列順序。這些準確的時間與所提供的天數的順序有所差異。在閏年，這些天數的順序將會在 2 月 28 日之後增加 1 天。

如果這個表無法使用時，則另一個代替的方法就是列出每個有關聯的月份和包括執行的那個月的天數。這些數據的陳列加總後，即可以提供出所要求的答案。

**範例 6** 試找出 3 月 15 日到 9 月 3 日的計息天數。

**解：**(a)從附錄 E 可得，3 月 15 日是 1 年中的第 74 天，而 9 月 3 日是 1 年中的第 246 天，所以天數是  $246 - 74 = 172$  天。  
(b)直接加算。

| 月份  | 天數                                        |
|-----|-------------------------------------------|
| 3 月 | 17 (包括 3 月 15 日) (註: $31 - 15 + 1 = 17$ ) |
| 4 月 | 30                                        |
| 5 月 | 31                                        |
| 6 月 | 30                                        |
| 7 月 | 31                                        |
| 8 月 | 31                                        |
| 9 月 | 2 (不包括 9 月 3 日)                           |
| 總數  | 172                                       |