力学和电磁学中的变分原理及其应用

LIXUE HE DIANCIXUE ZHONG DE
BIANFENYUANLI JIQI YINGYONG

梁立孚◎著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

力学和电磁学中的
变分原理及其应用

梁立孚 著

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书对一般力学、线性弹性静力学与动力学、线性电磁场理论及压电材料力学的变分原理及其应用(包括有限元法及各种变分直接方法、离散分析等)作了相当深入的研究,系统总结了作者本人长期从事这方面研究的创新成果。

本书既是一部力学和电磁学变分原理方面的创新性专著,可供有关科研人员参考,同时又因推导过程及文字解说详尽,也很适合作大学有关专业的教师、研究生及本科高年级学生的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

力学和电磁学中的变分原理及其应用/梁立孚著.
—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5661-0044-3

Ⅰ.①力…　Ⅱ.①梁…　Ⅲ.①力学变分原理-研究
Ⅳ.①O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 020275 号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　　真	0451-82519699
经　　销	新华书店
印　　刷	哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本	787mm×1 092mm　1/16
印　　张	13.75
字　　数	325 千字
版　　次	2011 年 4 月第 1 版
印　　次	2011 年 4 月第 1 次印刷
定　　价	26.00 元

http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

总　　序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就。研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料,以“两弹一星”、“神舟”号载人航天器为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,生产和传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版200种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的100多位专家、学者,对经各单位精选的近550种教材

和专著进行了严格的评审，评选出近200种教材和学术专著，覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者，他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等，具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中，国防特色专业重点教材和专著的出版，将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出，进入21世纪，我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标，对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展，提升国防实力，需要造就宏大的人才队伍，而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务，落实科教兴国和人才强国战略，推动国防科技工业走新型工业化道路，加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华、实现志向提供了缤纷的舞台，希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识，树立正确的世界观、人生观、价值观，努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任，创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好，国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝

序　言

各种自然现象和过程(特别是力学现象)通常由一组数理方程(偏微分方程、积分－微分方程或积分方程)及初边值条件来描述,但人们通过长期的探索研究,发现这些现象和过程常常使系统的某一整体量(泛函)取驻值或极值,因而又可以用相应的变分原理来描述。后一描述法的突出优点是:(1)数学形式简单紧凑,但内涵却甚丰富(包含了全部数理方程及初边值条件组);(2)是整体性描述,包括各种物理间断面上的相容条件;(3)有“变域变分”、“自然边界条件”等特殊工具,能够自动捕获各种未知边(分)界面;(4)是各种变分直接解法和有限元法的理论基础。可见,变分原理既体现了数学形式上的简洁优美,又体现了物理内容上的丰富深刻,更具有工程应用上的价值,确实代表了数学与物理的交融与贯通以及理论与实用的结合与统一。特别是自上世纪60年代起,有限元法的兴起与蓬勃发展,使作为其主要理论基础的变分原理又重新焕发了青春,取得了长足的发展。

梁立孚教授潜心从事力学及电磁学变分原理的研究20余年,卓有成效,现将其研究心得写成本书,笔者有幸得以先睹为快。本书对一般力学、线性弹性静力学与动力学、线性电磁场理论及压电材料力学的变分原理及其应用(包括有限元法及各种变分直接方法、离散分析等)作了相当系统和深入的研究,系统总结了作者本人长期从事这方面研究的创新成果。就笔者体会,主要体现下列几个方面:

1.首创变积法,通过定义一个“变积”作为传统“变分”的逆运算,首创了变积法,是求解变分学反命题的一个适用性较广的新方法,是贯穿全书的理论基干;

2.广泛地、详细地同时应用变积法和乘子法推导了上述力学等问题的各种变分原理及广义变分原理。使读者可以从两法的对比中全面、深入地体会它们的实质、异同和优缺点;

3.灵巧地应用乘子法,成功地消除了变分临界状态(乘子恒为零);

4.把变积同拉氏变换结合起来,成功地导得了更简单(只含单重卷积)的Gurtin型初值问题变分原理,可以简化其数值求解;

5.详细论述了变分原理各类条件的完备性及其应用。

本书既是一部力学变分原理方面的创新性专著,同时又因推导过程及文字解说详尽,因此不但值得向有关科研人员推荐,而且也很适合作大学有关专业的教师、研究生及本科高年级学生的教材或参考书。

中科院院士

刘高联

2004年10月

修订版序言

自从拙著《变分原理及其应用》2005年出版以后，得到多位专家和广大读者的赞同，考虑到作者关于变分原理研究的新进展和广大读者的新要求，特将《变分原理及其应用》修订为《力学和电磁学中的变分原理及其应用》。其修订内容主要体现在以下几个方面：

1.拙著的书名修订为《力学和电磁学中的变分原理及其应用》，与刘高联院士的如下论述吻合：本书对一般力学、线性弹性静力学与动力学、线性电磁场理论及压电材料力学的变分原理及其应用（包括有限元法及各种变分直接方法、离散分析等）作了相当系统和深入的研究。

2.在弹性动力学初值问题的变分原理和广义变分原理相关的章节中，增加了在原空间中推导卷积型变分原理的驻值条件的内容，这一修订可以解决一个重要的问题：以前有些学者认为，Ritz方法不能应用于卷积型变分原理。随着在原空间中推导卷积型变分原理的驻值条件的进展，可以推论出Ritz方法能够应用于卷积型变分原理，这对于应用卷积型变分原理和广义变分原理进行近似计算建模，具有重要意义。

3.在应用变积方法建立各个学科领域的变分原理和广义变分原理时，经常将问题的控制方程乘上相应的虚量，然后积分，并代数相加，经过变分运算建立相应的变分原理和广义变分原理。在附录中加强了这种方法的数学基础的论述，更加体现了变积方法的合理性和有效性。

4.刘高联院士指出，在专著《变分原理及其应用》中灵巧地应用拉氏乘子法，成功地消除了变分临界状态（乘子恒为零）。在此基础上，拙著对拉氏乘子法的基本原理进行了更加深入的研究，为合理应用拉氏乘子法提供了参考。

此外，还有一些局部的修订，兹不赘述。

编　者

2010年9月26日

目　　录

绪　　论

变分原理作为有限元素法和其他近似计算方法的理论基础，随着电子计算机的广泛应用，越来越得到学术界的重视。我国学者十分重视变形体力学中广义变分原理的研究。文献[1]研究余能理论，从理论上和应用上为研究广义变分原理奠定了基础。文献[2]建立了弹性力学和塑性力学的广义变分原理，为后来发展起来的混合有限元素法提供了理论依据，并获得重要的应用。文献[3]倡导 Lagrange 乘子法，为建立各个学科领域的广义变分原理提供了一个有效方法。在这些开创性研究成果的指导和带动下，我国一大批学者在这一学科领域作出重要贡献。文献[4]肯定了我国学者在变分原理方面的研究在国际学术界的领先地位。

由于变分原理的重要性，国内外已有一些名著出版[5-9]，本书的内容不应当是它们的重复，而应当是它们的继续和发展。按照这样的写作原则，本书包括以下几方面的内容。

一般力学是基础力学，有些学者认为一般力学是一些发明和创造的策源地，而专著[10]则认为经典分析力学体系是力学最根本的体系。这些论述，都说明了一般力学的重要性，因此，本书的第 1 章研究一般力学中的经典变分原理和广义变分原理。一般力学是基础力学，这一章也是本书的基础。在这一章中，介绍了推导经典变分原理驻值条件的局部代入法和全部代入法，介绍了 Lagrange 乘子法的两种程式——Lagrange 乘子参加变分程式和 Lagrange 乘子不参加变分程式。全部代入法有两个作用：其一是消除约束条件，即将全量形式的约束条件代入泛函中，泛函外不再存在约束条件；其二是放松约束条件对变分的限制，使原来不独立的变分变换为独立的变分。而局部代入法的作用，仅能放松约束条件对变分的限制作用。在泛函的全量式中引入 Lagrange 乘子，并且 Lagrange 乘子参加变分的程式，不仅可以放松约束条件对变分的限制作用，而且可以消除约束条件，即将泛函的约束条件转化为泛函的自然条件。无论在全量式中引入 Lagrange 乘子还是在变分式中引入 Lagrange 乘子，只要 Lagrange 乘子不参加变分，它们的作用都是只能放松约束条件对变分的限制，或者说，使原来不独立的变分变换为独立的变分。在这一章中，还介绍了一般力学中的广义变分原理和推导广义变分原理的两种方法——变积方法和 Lagrange 乘子法。这里指出，一般力学中的广义变分原理是近年来我国学者率先建立的，本书仅涉及完整系统的变分原理和广义变分原理[11]。

本书的第 2 章研究弹性静力学中的经典变分原理和广义变分原理。研究表明，推导经典变分原理的驻值条件难，推导广义变分原理的泛函难。本章抓住这两个难点进行深入研究。在本章第 2 节中，应用局部代入法和 Lagrange 乘子不参加变分方法推导出最小势能原理的各种表达形式的驻值条件。最小余能原理的内容相当丰富，仅仅针对最小余能原理的驻值条件的问题，便有多篇文献各自从不同的角度进行了研究。本章第 4 节，应用局部代入法和 Lagrange 乘子不参加变分方法顺利地推导出最小余能原理的驻值条件，证明了这些方法的正确性和有效性。本章后半部分，应用变积方法和 Lagrange 乘子法推导出两类变量和三类变量的广义变分原理，在应用 Lagrange 乘子法推导三类变量的广义变分原理的时候，由于灵活应用 Lagrange 乘子法，巧妙地避开了出现 Lagrange 乘子为零的情况。还通过灵活应用 Lagrange 乘子法，推导了有先决条件的广义变分原理。按照“检验变分原理的最好方法是推导其驻值条件”的原则，检验

了各类变分原理的异同，进而对变分原理进行了分类。

本书在第1章中研究了一般力学的经典变分原理和广义变分原理，在第2章中研究了弹性静力学的经典变分原理和广义变分原理。有了以上的基础，研究弹性动力学的经典变分原理和广义变分原理就很方便了，只要将一般力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函写成适合研究弹性动力学的形式，再将弹性静力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函代入相应的一般力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函的外力势能一项中，便可建立相应的弹性动力学的经典变分原理和广义变分原理泛函，本书第 3 章前半部分就是应用这种方法建立了弹性动力学边值问题的经典变分原理和广义变分原理泛函。本书第 3 章后半部分研究弹性动力学初值问题的变分原理和广义变分原理。建立弹性力学的初值问题的经典变分原理和广义变分原理的工作是由 Gurtin 首先完成的，针对弹性动力学的初值问题，Gurtin 建立了一组卷积型变分原理(包括经典变分原理和广义变分原理)。我国学者罗恩为完善和发展卷积型变分原理作出了突出贡献[12]。本书应用变积方法建立卷积型变分原理，具体作法是：首先将弹性动力学的基本方程进行 Laplace 变换，按照广义力和广义位移之间的对应关系，将经过 Laplace 变换的基本方程乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，进而建立像空间的各类经典变分原理和广义变分原理，然后将之反演到原空间，得到各类卷积型经典变分原理和广义变分原理，最后在原空间推导各类卷积型经典变分原理和广义变分原理的驻值条件。本书给出的卷积型的变分原理和广义变分原理只有单重卷积，这对研究卷积型的变分原理和广义变分原理的性质和建立计算模型都是有利的。

在电磁场理论中，由于在处理双本构关系、电磁耦合和边界条件方面有困难，使得建立这一领域的变分原理相当困难。如何克服上述几个方面的困难，建立电磁场理论的变分原理和广义变分原理便是本书第 4 章的任务。第 4 章的内容分为 3 个部分：第 1 部分，应用变积方法和 Lagrange 乘子法，建立了电磁场理论边值问题的变分原理和广义变分原理，并且进行验证。作为特例，得到了静电场和稳定磁场中的变分原理和广义变分原理。这里需要说明一个问题，建立广义变分原理主要有两种方法，一个是凑合法(变积方法便是一种凑合法)，一个是 Lagrange 乘子法，本书作者认为这两种方法是相辅相成的，所以，尽管仅用变积方法便可以建立电磁场理论边值问题的变分原理和广义变分原理，这里还是应用了两种方法。第 2 部分，应用变积方法建立电磁场理论初值问题的变分原理和广义变分原理，即建立电磁场理论的卷积型的变分原理和广义变分原理。推导电磁场理论的卷积型的变分原理和广义变分原理的方法，大体上和推导弹性动力学的卷积型变分原理和广义变分原理的方法相同，不赘述。第 3 部分是建立压电材料力学的经典变分原理和广义变分原理，包括压电材料动力学边值问题的变分原理、压电材料动力学初值问题的变分原理、线性弹性压电材料准静态场的变分原理，这里仅应用了变积方法，表明这种方法的正确性和有效性。可以看出，压电材料力学可以视为力学和电磁学的交叉学科，它被称赞为新世纪中力学的新的生长点，因此，研究压电材料力学的变分原理和广义变分原理应当作为本书的主要内容[13]。

本书第 5 章是变分原理在有限元素法中的应用。有些学者认为，有限元法的基本概念是数学家 Courant 首先提出的，当时力学界忽视了 Courant 开创性的工作。本书作者认为，从 Ritz 方法过渡到有限元法的思想是可取的。Ritz 方法是变分直接方法。人们在研究 Ritz 变分直接方法时发现，在问题的整个选值域上选择坐标函数，由于区域大，选择一个合适的坐标函数有时相当困难，于是人们产生一个想法：是否可以将选择域划小，从而使选择坐标函数变得容易些呢？于

是有限元法便应运而生了。我国学者注意到,研究有限元既要注意研究计算技巧,又要注意研究基本原理[14]。本书把如何应用变分原理来建立有限元素法的计算模型放在重要地位。应用最小势能原理和修正的最小势能原理建立了位移协调元和位移杂交元;应用最小余能原理和修正的最小余能原理建立了应力协调元和应力杂交元;应用 Hellinger—Reissner 势能原理和修正的 Hellinger—Reissner 势能原理建立了位移协调的混合元和位移杂交的混合元;应用 Hellinger—Reissner 余能原理和修正的 Hellinger—Reissner 余能原理建立了应力协调的混合元和应力杂交的混合元;应用胡海昌 —— 鹫津久一郎势能原理和修正的胡海昌 —— 鹫津久一郎势能原理建立了位移协调的三场混合元和位移杂交的三场混合元;应用胡海昌 —— 鹫津久一郎余能原理和修正的胡海昌 —— 鹫津久一郎余能原理建立了应力协调的三场混合元和应力杂交的三场混合元。最后,讨论了有限元的收敛性问题。

离散分析覆盖了数值分析的一个宽广的领域,它的作用是将具有无限多个计算自由度的问题处理为只具有有限多个计算自由度的问题[15]。在离散分析中,能够将连续体建立的微分方程或积分方程转化为有限数目的代数方程。按照如上的论述,我们可以将上一章研究的基于 Ritz 方法的有限元素法纳入离散分析的范畴。这一章我们将研究另外一些离散分析的方法,并且将这些离散分析方法都归结为加权残数法[16,17]。我们把加权残数法也纳入本书第 6 章中来研究,表明我们除了要研究加权残数法外,还要研究加权残数法和变分原理的关系。本章综述了加权残数法的几种基本方法:配点法、子域配置法、Galerkin 法和最小二乘法。研究了 Ritz 方法与 Galerkin 法的关系,这里涉及了非保守系统的能量原理[18]。还研究了罚函数法。为了研究加权残数法与变分原理的关系,论述了变分原理各类条件的完备性。最后讨论了积分方程法与加权残数法的关系。

在本书的附录中,研究了以下几方面的问题。(1) 论述了在变分学中基本上存在三级变量 —— 自变量、可变函数和泛函。简单函数和泛函的区别在于简单函数是自变量的函数,而泛函是可变函数的函数,独立自主地变化的可变函数称为自变函数。明确指出几类变量指的是一个变分问题中的可变函数的种类,扼要说明了几类变量的(经典) 变分原理和几类变量的广义变分原理的区别。(2) 本书借助函数的驻极值问题来研究 Lagrange 乘子法的一般原理。论述了将 Lagrange 乘子法的一般原理应用于变分学中时,一般说来,有两种程式,一种是 Lagrange 乘子参加变分的程式,一种是 Lagrange 乘子不参加变分的程式。从数学上论述了:从一个角度看问题,Lagrange 乘子是唯一的;从另一个角度看问题,Lagrange 乘子又是不唯一的;两种观点反映了同一事物的两个不同的侧面。(3) 本书从变分的基本运算出发,探讨变分学中的逆问题,提出变分的逆运算 —— 变积的概念。作为应用的实例,应用变积方法,将三类典型微分方程的边值问题和初值问题化为了泛函的驻(极) 值问题,为全书应用变积方法建立各类变分原理和广义变分原理奠定了基础。(4) 从 Hölder 原理出发来研究非等时变分。证明了所谓非等时变分实际上是变分和微分的组合。定量地研究了可变函数接近度的概念,初步论述了可变函数接近度的概念在近似计算中的应用。总之,附录的内容分为两个方面,一方面深入研究了变积方法和 Lagrange 乘子法的理论基础,一方面从变分学的角度研究了本书涉及的一些基本概念。

第1章　一般力学的变分原理和广义变分原理

一般力学是基础力学,有些学者认为一般力学是一些发明和创造的策源地,有些学者认为经典分析力学体系是力学最根本的体系,说明一般力学的重要性,因此,本书的第1章研究一般力学中的经典变分原理和广义变分原理。在这一章中,介绍了推导经典变分原理驻值条件的局部代入法和全部代入法,介绍了 Lagrange 乘子法的两种程式 ——Lagrange 乘子参加变分程式和 Lagrange 乘子不参加变分程式。由于变形体力学中的广义变分原理在有限元素法和其他近似方法中获得巨大成功,随着数字电子计算机的广泛应用,广义变分原理的研究越来越受到学术界的重视。国际和国内学者努力将广义变分原理的研究推广到一般力学中去,但是,由于这一研究课题的难度很大,长期以来进展比较缓慢。近年来,文献[127] 翻译介绍了国外学者研究一般力学中的变分原理的情况,将我国学者对一般力学中的变分原理的研究引导到世界性研究的前沿。文献[192] 引入广义 D'Alembert-Lagrange 原理,进而建立了完整系统和非完整系统的第二类变分原理,并且将之写成正则形式。文献[88] 应用对合变换推导出两类变量的 Hamilton 原理,进而应用 Lagrange 乘子法推导出完整系统和非完整系统的两类变量的广义变分原理。文献[7] 应用对合变换,将两类变量的广义变分原理的驻值条件变换为三类变量的基本方程,按照广义力和广义位移之间的对应关系,将各基本方程乘上相应的虚量,代数相加,然后积分,进而建立了完整系统的三类变量的广义变分原理和非完整系统的三类变量的广义变分原理(这种方法称为变积方法)。可见,一般力学中的广义变分原理是我国学者率先建立的。关于变积方法的梗概,请参阅本书附录中“F.3” 一节。

1.1　一般力学的经典变分原理

一般力学的经典变分原理主要是指 Hamilton 原理。研究表明,推导广义变分原理的泛函难,推导经典变分原理的驻值条件难。本章的第1节,以推导完整约束系统的 Hamilton 原理的驻值条件为例,介绍推导经典变分原理的驻值条件的一般方法。

设有一个动力学系统,该系统由 Lagrange 函数和完整的约束方程

$$F_\beta(q_s,t)=0\quad s=1,2,\cdots,n;\beta=1,2,\cdots,g;n>g \tag{1.1.1}$$

来描述。这里 q_s 为广义坐标,$\dot{q}_s$ 为广义坐标对时间 t 的导数。

按照变分学,人们总是希望将有约束条件的变分问题转化为无约束条件的变分问题来处理,一般来说,实现这种转化的方法有两种:一是代入法,一是 Lagrange 乘子法。

1.1.1　局部代入法和全部代入法

自从 Lagrange 的不朽著作《Mecanique analytique》问世以来,分析动力学的先驱者们,总是

这样应用代入法：

Hamilton 原理的泛函为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t \tag{1.1.2a}$$

其约束条件为

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \tag{1.1.2b}$$

由约束条件式(1.1.2b) 解得不独立的广义坐标

$$q_{\varepsilon+\beta} = \Phi_\beta(q_\sigma, t) \quad \sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g \tag{1.1.3}$$

将式(1.1.3) 代入式(1.1.2a)，可得

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)\mathrm{d}t \tag{1.1.4}$$

将式(1.1.4) 变分，并令 $\delta\pi = 0$；经分部积分，并按惯例在时域边界 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 处取 $\delta q_s = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \delta q_\sigma \mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.5}$$

由于 δq_σ 的任意性，由上式可得

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0 \tag{1.1.6}$$

这便是著名的 Lagrange 方程。

以下我们对代入法作进一步的分析和研究。

1.全部代入法

将 Hamilton 原理的泛函展开写为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \cdots, q_\varepsilon, q_{\varepsilon+1}, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_\varepsilon, \dot{q}_{\varepsilon+1}, \cdots, \dot{q}_n, t)\mathrm{d}t \tag{1.1.7}$$

其约束条件为

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \quad 或者 \quad q_{\varepsilon+\beta} = \Phi_\beta(q_\sigma, t) \tag{1.1.8}$$

将 π 变分，并令 $\delta\pi = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma \right) + \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} \right) \right] \mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.9}$$

考虑到约束条件的变分式为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \tag{1.1.10}$$

$$\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \tag{1.1.11}$$

将式(1.1.8) 代入式(1.1.9) 的$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$，$\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$ 和$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$ 中，并将之记为$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\sigma}$，$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}$，$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$ 和$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$。将式(1.1.10) 和式(1.1.11) 代入式(1.1.9) 的 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 和 $\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 中，经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial\bar{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial\bar{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\right]\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t = 0 \quad (1.1.12)$$

由于 δq_σ 的任意性,由上式可得

$$\frac{\partial\bar{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial\bar{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right) = 0 \quad (1.1.13)$$

式(1.1.13) 的 ε 个微分方程构成封闭的微分方程组。

这种方法和分析力学的先驱者们的方法是一致的,我们称之为全部代入法。

2.局部代入法

如果我们仅将式(1.1.10) 和式(1.1.11) 代入式(1.1.9),经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$,可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\right]\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t = 0 \quad (1.1.14)$$

由于 δq_σ 的任意性,由(1.1.14) 可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right) = 0 \quad (1.1.15)$$

式(1.1.15) 与约束条件式(1.1.8) 一起,构成封闭的微分方程组。

这种方法仅将约束条件的变分式代入 Hamilton 原理的泛函中,而约束条件的全量式仍然保留在泛函之外,我们称之为局部代入法。

由上面的分析可见,全部代入法有两个作用:其一是消除约束条件 ,即将全量形式的约束条件代入泛函中,泛函外不再存在约束条件;其二是放松约束条件对变分的限制,使原来不独立的变分变换为独立的变分。而局部代入法的作用,仅能放松约束条件对变分的限制作用。

1.1.2 Lagrange 乘子法的两种程式

Hamilton 原理的泛函为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t \quad (1.1.16\mathrm{a})$$

其约束条件为

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \quad (1.1.16\mathrm{b})$$

或者

$$q_{\varepsilon+\beta} = \Phi_\beta(q_\sigma, t) \quad (1.1.16\mathrm{c})$$

以下用 Lagrange 乘子法的两种程式来处理问题。

1.Lagrange 乘子不参加变分

(1) 在泛函的全量式中引入 Lagrange 乘子

引入 Lagrange 乘子 λ_β,将约束条件(1.1.16b) 纳入泛函(1.1.16a) 中

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left[L(q_s, \dot{q}_s, t) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta F_\beta(q_s, t)\right]\mathrm{d}t \quad (1.1.17)$$

将 π 变分,并令 $\delta\pi = 0$,Lagrange 乘子不参加变分,可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.18}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$,则式(1.1.18) 可变换为

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\right)\delta q_s\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.19}$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_s 相互独立,故由式(1.1.19) 可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} = 0 \tag{1.1.20}$$

式(1.1.20) 与约束方程(1.1.16b) 一起构成封闭的微分方程组。

如果将式(1.1.16c) 乘上 Lagrange 乘子 λ_β,纳入泛函中,则有

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left\{L(q_s,\dot{q}_s,t) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta[\,q_{\varepsilon+\beta} - \Phi_\beta(q_\sigma,t)]\right\}\mathrm{d}t \tag{1.1.21}$$

将 π 变分,并令 $\delta\pi = 0$,则有

$$\begin{aligned}\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[&\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right) + \\ &\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} + \lambda_\beta\delta q_{\varepsilon+\beta}\right)\Bigg]\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$,则有

$$\begin{aligned}\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[&\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma + \\ &\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} + \lambda_\beta\right)\delta q_{\varepsilon+\beta}\Bigg]\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{1.1.23}$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_σ 和 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 相互独立,故由式(1.1.23) 可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\dfrac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} + \lambda_\beta = 0\end{cases} \tag{1.1.24}$$

式(1.1.24) 与约束方程(1.1.16c) 一起构成封闭的微分方程组。

(2) 在泛函的变分式中引入 Lagrange 乘子

将 π 变分,并令 $\delta\pi = 0$,式(1.1.16a) 变换为

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.25a}$$

其约束条件式(1.1.16b) 和式(1.1.16c) 变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s = 0 \tag{1.1.25b}$$

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma = 0 \tag{1.1.25c}$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β，将式(1.1.25b) 纳入泛函变分式(1.1.25a) 中，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.26}$$

经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$，则有

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\right)\delta q_s\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.27}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_s 相互独立，故由式(1.1.27) 可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} = 0 \tag{1.1.28}$$

式(1.1.28) 与约束方程(1.1.16b) 一起构成封闭的微分方程组。

如果引入 Lagrange 乘子，将约束条件式(1.1.25c) 纳入泛函的变分式(1.1.25a) 中，则得

$$\begin{aligned}\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[&\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right) + \\ &\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} + \lambda_\beta\delta q_{\varepsilon+\beta}\right)\Bigg]\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$，故有

$$\begin{aligned}\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[&\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma + \\ &\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} + \lambda_\beta\right)\delta q_{\varepsilon+\beta}\Bigg]\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_σ 和 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 相互独立，故由式(1.1.30) 式可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\dfrac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma} = 0 & (1.1.31\text{a}) \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} + \lambda_\beta = 0 & (1.1.31\text{b})\end{cases}$$

式(1.1.31) 与约束方程(1.1.16c) 一起构成封闭的微分方程组。

我们注意到，式(1.1.31) 与式(1.1.24) 相同，式(1.1.28) 与式(1.1.20) 相同。这便说明不管在全量式中引入 Lagrange 乘子还是在变分式中引入 Lagrange 乘子，只要 Lagrange 乘子不参加变分，它们的作用都是放松约束条件对变分的限制，或者说，使原来不独立的变分变换为独立的变分。因此，把它们归纳为 Lagrange 乘子法的同一种程式。

2. Lagrange 乘子参加变分

引入 Lagrange 乘子 λ_β，将约束条件式(1.1.16b) 纳入泛函中，可得式(1.1.17)。

将 π 变分，并令 $\delta\pi = 0$(注意 Lagrange 乘子也作为独立变量参加变分)，可得

$$\begin{aligned}\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[&\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s + \\ &\sum_{\beta=1}^{g}F_\beta(q_s, t)\delta\lambda_\beta\Bigg]\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{1.1.32}$$