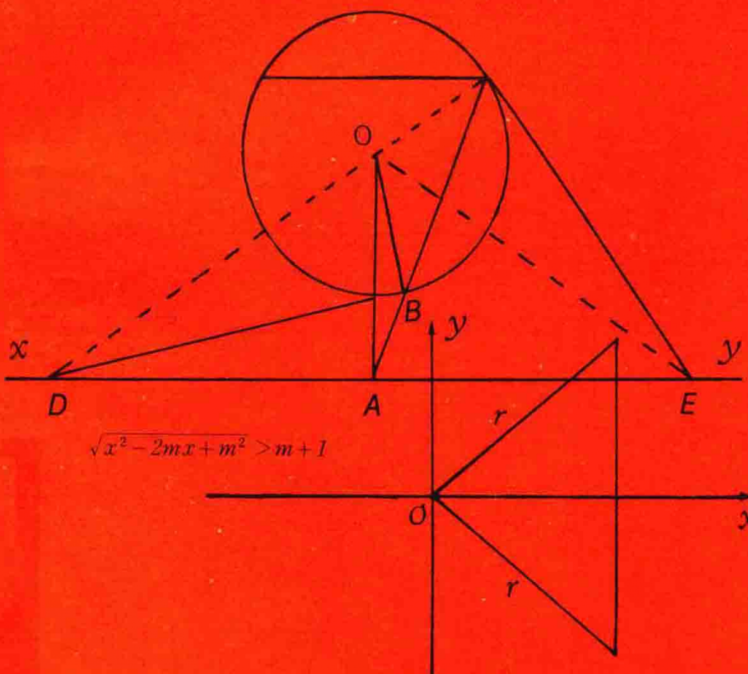
高中

数学精编

微积分初步



浙 江 教 育 出 版 社

高中数学精编

微积分初步

丁宗武　谢玉兰　钱孝华
许纪传　陶敏之　江焕棣

浙江教育出版社

高中数学精编
微积分初步
丁宗武　谢玉兰　钱孝华
许纪传　陶敏之　江焕棣
*
浙江教育出版社出版
(杭州武林路125号)
浙江台州印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
*
开本787×1092　1/32　印张4.5　字数98,000
1986年9月第一版
1987年2月第二次印刷
印数：28301—128300
统一书号：7346·296
定　价：0.55元

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》(共四册)，主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便．出版以后印行四次，较受读者欢迎．这回吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制高中数学教材，对原书经过一番认真的筛选和修改，编为《高中数学题精编》．

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯的综合运用．与原书比较，在形式上，增加了选择题和填充题等类型题目；在每节习题前增加了〔分析与要点〕，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己学习的体会，以期对教与学都能稍有裨益．亦望以此与同志们共同探讨．

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用．其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习．读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律．

一九八五年一月

目　　录

第一章 极 限

[分析与要点]

1 数列的极限是微积分中最基本的概念和最重要的工具. 对于数列极限的 ε-N 定义, 需注意:

(1) ε 是任意给定的正数, 它主要用于反映 a_n 和常数 A 的接近程度. 因为 ε 可以任意小, 所以 a_n 与 A 可以任意地接近.

(2) N 是一个自然数, 其功能是: 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 显然, 对一个 ε, 与其相应的 N 并不是唯一的. 我们一般以解题简便为原则来确定 N.

(3) 在运用数列极限的运算法则时必须注意, 参与运算的每一个数列的极限都是存在的, 而且数列的个数应是确定的有限个. 否则就不能运用该法则.

2 函数的极限定义至关重要, 因为微积分中的重要概念, 如连续、导数、定积分等的定义, 都有赖于极限这个重要工具.

(1) 函数极限的主要含义是: 当 $x\to\infty$ (或者 $x\to x_0$) 时, $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A, 则当 $x\to\infty$ (或者 $x\to x_0$) 时, $f(x)$ 的极限是 A, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或者} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=A;$$

(2) 函数极限的运算法则与数列极限的运算法则相类似. 特别需要指出的是, 对于初等函数 $f(x)$, 如果 x_0 是定义区间内的一点, 那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

3 函数连续的概念是用极限的概念定义的. 它有三层含

义：

(1) $f(x)$在x_0邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

三个条件缺一不可，否则，$f(x)$就在x_0不连续．由此可见，如果$f(x)$在x_0连续，那么在x_0处一定有极限，反之却未必成立．

4 对两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

或

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

要求能够正确、灵活、熟练地运用．利用它们求函数的极限时，一定要注意化成相应的形式．在第一个极限中，应以$\sin x$中的x为标准，在第二个极限中，则应以$\frac{1}{x}$为准．例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim_{mx\to 0} m\cdot\frac{\sin mx}{mx}=m\quad (m\neq 0);$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x=\lim_{\frac{3x}{2}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

（A）

一、选择题(1～18)

1．已知数列$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$，$\varepsilon=0.01$，若此数列第$N$项之后所有的项与0的差都小于$\varepsilon$，则$N$应是

(A) 49;　　(B) 5;

(C) 取 50, 51, 52, … 中的任何一个自然数均可;

(D) 以上结论都不对.

答: (C)

[注意] 无穷数列 $\{a_n\}$ 极限定义中的 N, 并不是唯一的. 对于预先给定的 $\varepsilon>0$, 如果第 100 项后面所有的项与常数 A 之差的绝对值都小于 ε, 那么 N 可取 100, 也可取大于 100 的任何一个自然数.

2. 已知数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, 对于任意小的正数 $\varepsilon>0$, 若此数列第 N 项之后所有的项与 0 的差都小于 ε, 则 N 的最小值为

(A) $\frac{1}{\varepsilon^2}$;　(B) $\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+1\right]$;　(C) $\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$;

(D) $\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right]$.

答: (C)

3. 已知四个数列的通项公式分别是

$$a_n=1+(-1)^n,\qquad b_n=2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n,$$

$$c_n=(-1)^n\operatorname{tg}\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad d_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}. = (-1)^n\frac{1+\frac{1}{n}}{1}$$

当 $n\to\infty$ 时, 这四个数列中极限为 -1 的数列是

(A) $\{a_n\}$;　(B) $\{b_n\}$;　(C) $\{c_n\}$;　(D) $\{d_n\}$.

答: (C)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$ 等于

(A) 0;　(B) 1;　(C) -1;

(D) 极限是否存在, 需由 m 的值决定.

答: (D)

5. 记 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n=0$ $(m>1)$,

$B=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n$, $(n\in Z)$,则

(A) $A=B$; (B) $A>B$; (C) $A=0$, $B=1$;

(D) $A=1$, $B=0$. 答：(C)

6. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ $(q\in R)$等于

(A) 0; (B) 1; (C) 0 或者 1;

(D) 极限是否存在,需由 q 的值决定.

答：(D)

[注意] "若 $|q|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$"这个结论今后常被引用.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$ 的值是

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) 0; (C) 1;

(D) 因为当 $n\to\infty$ 时,分母为 0,因此极限不存在.

答：(C)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=-1$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的条件是

(A) $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; (B) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$;

(C) $\theta\in\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$; (D) 以上结论都不对.

答：(A)

9. $\lim\limits_{n\to3}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{3}}{\sqrt{n^2-9}}$ 的值是

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$; (B) 0; (C) $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{27}}$; (D) 极限不存在.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{9}{n^2}}}$ 答：(B)

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\beta)-\sin\beta}{x}$ 的值是

(A) $\sin\beta$; (B) $\cos\beta$; (C) 1; (D) 极限不存在.

答: ( )

11. 当 $m<0$, $n<0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{m^2+x^2}+m}{\sqrt{n^2+x^2}+n}$ 的值是

(A) $\dfrac{m}{n}$; (B) 0; (C) 1; (D) $\dfrac{n}{m}$.

答: ( )

12. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 的值是

(A) 不存在; (B) 1; (C) 0; (D) 无法确定.

答: ( )

[注意] 容易证明,若 $f(x)$是有界函数,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)=0$, 那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\cdot\varphi(x)]=0$. 这个结论在求数列与函数的极限时,应用甚广.

13. 函数 $f(x)$在 x_0 连续是函数在 x_0 处存在极限的

(A) 充分条件但不是必要条件;

(B) 必要条件但不是充分条件;

(C) 充要条件; (D) 既不是充分条件也不是必要条件.

答: ( )

14. 当 m、$n\in N$ 时, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ 的值是

(A) $\dfrac{m}{n}$; (B) $\dfrac{n}{m}$; (C) $(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$;

(D) $(-1)^{n-m}\dfrac{n}{m}$.

答: ( )

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ 的值是

(A) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) 1; (D) 0.

答: (   )

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x}\right)^x$ 的值是

(A) $e^{\frac{5}{2}}$; (B) $e^{\frac{2}{5}}$; (C) e; (D) e^{-1}.

答: (   )

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+mx)}{x}$ 等于

(A) $\dfrac{1}{m}\log_a e$; (B) $m\log_a e$; (C) $\log_a(me)$;

(D) $\log_a(1+me)$.

答: (   )

18. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 等于

(A) $\dfrac{1}{x^2}$; (B) x; (C) $-\dfrac{1}{x^2}$; (D) $-x$.

答: (   )

二、填空题(19～25)

19. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n^2}=$ ___0___; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^{10}}{n^{10}}=$ ______;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+5}{3n^2-4}=$ ___$\frac{1}{3}$___;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)=$ ___1___.

20. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{4n^2+n}}=$ ______;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=$ ______;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}=$ ________;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lg\sqrt{n}-\lg\sqrt{10n+3})=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{10n+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\lg\dfrac{1}{\sqrt{10+\frac{3}{n}}}=$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=$ ________.

21. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}+5^n}{1+9^n}=$ ________;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2n^2-1}=$ ________;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=$ ________.

22. (1) $\lim\limits_{x\to 2}e^{\frac{1}{x}}=$ ________;

(2) $\lim\limits_{x\to e}\ln x=$ ________;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}=$ ________;

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x}{1+x^2}=$ ________;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x^2-\sin x+\cos x)=$ ________;

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}[\cos(\sin x)+\sin(\cos x)]=$ ________.

23. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=$ ________;

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{4^t}{4^t-1}=$ ________;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}=$ ________;

(4) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=$ ________;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=$ ________.

24. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=$________;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x}=$________ $(a\neq b)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}=$________.

25. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-2x}=$________;

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$________;

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}=$________;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=$________;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}=$________.

三、基本技能训练题(26～45)

26. 已知数列的通项公式为：① $a_n=\dfrac{1}{n}$， ② $a_n=-\dfrac{1}{n}$，

③ $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$， ④ $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

(1) 将这些数列的前五项在数轴上表示出来;

(2) 计算它们的第 n 项与零的差的绝对值;

(3) 用数列极限的定义分别确定它们的极限;

(4) 比较它们趋向于零的“方式”有何不同.

27. 利用定义证明:

(1) 数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，…，$\dfrac{n}{n+1}$，… 的极限是 1;

(2) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots$ 的值是 2;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg} n=\dfrac{\pi}{2}$.

[注意] (1) 只有对无穷数列才能讨论其有无极限：

(2) 从 26 题可以看到：趋近于同一个极限值的数列是很多的，即趋近于某一极限值的"方式"可以是多种多样的.

28. (1) 写出四个公差不是零的无穷等差数列，并且说明它们有没有极限；

(2) 写出公比的绝对值大于 1 与小于 1 的无穷等比数列各两个，并且说明它们有没有极限.

[注意] 公差$\boxed{\text{不为}}$零的无穷等差数列没有极限，而公比的绝对值不为 1 的无穷等比数列可以有极限(公比绝对值小于 1)，也可以没有极限(公比绝对值大于 1).

29. (1) 试举出满足下列条件的数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的例子：① 对于所有自然数 n，$a_n>1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$，② 数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2=1$，③ 对任意自然数 n，$a_n<b_n<1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 有极限，数列 $\{b_n\}$ 没有极限，问数列 $\{a_n+b_n\}$、$\{a_nb_n\}$ 有没有极限？试举例说明之. 没有

(3) 若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都没有极限，问数列 $\{a_n+b_n\}$、$\{a_nb_n\}$ 有没有极限？试举例说明之； 没有 不能 ∴非断定 $\{a_n\}$. $\{b_n\}$ 中有一个是

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$，能否断定 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的极限是零？

30. 指出下面解题的错误，并给出正确的解答：

(1) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$.

证明：$\because 0=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n-\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a-\lim\limits_{n\to\infty} y_n$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$； 不一定成立 ∵不知 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 有无极限

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+\cdots+n)}{n^2}$.

解：

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+\cdots+0=0.$$ X ∵n是一不确定的值，有无限多个，不能用公式

31．计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}$；$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3^n}{2^{2n}}}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{4n^2-2}$；$=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n+1}-n\right)$；$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}-3-n}{n+1}=-1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{3})^n-(1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}\left[(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n\right]}$；$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt3}{1+\sqrt3}\right)^n}{\sqrt3\left[1+\frac{1-\sqrt3}{1+\sqrt3}\right.}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{-2n^2+n+1}$；$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{-2n^2+n+1}=-\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a-\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)$。$=a$

32．求下列各无穷等比数列的和：

(1) $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \cdots$；

(2) $16,\ -4,\ 1,\ -\frac{1}{4},\ \cdots$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}},\ \cdots$；

(4) 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005, …；

(5) 0.36, 0.0036, 0.000036, …；

(6) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ \frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \cdots$。

33．求：

(1) $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$;

(2) $0.\dot{1}\dot{5}+0.0\dot{1}\dot{5}+0.00\dot{1}\dot{5}+0.000\dot{1}\dot{5}+\cdots$. $=\frac{15}{99}+\frac{15}{990}+\frac{15}{9900}$

［注意］ 先判定是等比数列，且其公比的绝对值小于1，再求和.

34. (1) 若实数 a、b 满足 $|a-2|+\sqrt{2b+1}=0$. 求无穷等比数列 ab, b, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a^2}$, $\cdots$ 的和; $\begin{cases}|a-2|=0\\ \sqrt{2b+1}=0\end{cases}$

(2) 若 $\log_2 x+\log_2\left(x-\frac{3}{8}\right)+2^{\log_2 4}=0$, 求无穷等比数列 $1, x, x^2, x^3, \cdots$ 的和;

(3) 若实数 x、y 满足 $y=\sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}+\sqrt{\frac{2x+1}{3-4x}}+1$, 求 $y+xy+x^2y+\cdots+x^{n-1}y+\cdots$ 的和. 由定义域得 $x=-\frac{1}{2}$ $\therefore y=1$

35. (1) 若无穷等比数列 $\log_8 x$, $\log_8^2 x$, $\log_8^3 x$, $\cdots$ 各项的和是 $\frac{1}{2}$, 求 x; $S_n=$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=$

(2) 一公比的绝对值小于1的无穷等比数列中，已知所有奇数项的和比所有偶数项的和多27, 若去掉这个数列的前两项后,它的和是60. 求这个数列.

36. (1) 求证：公比绝对值小于1的无穷等比数列各项平方所得数列也是一个公比绝对值小于1的无穷等比数列;

(2) 若一个公比绝对值小于1的无穷等比数列的各项和是2, 它的各项平方所组成的等比数列的各项和是 $\frac{4}{3}$, 写出这两个数列的前3项. $\begin{cases}\frac{a_1}{1-q}=2\\ \frac{a_1^2}{1-q^2}=\frac{4}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}q_1=\frac{1}{2}\\ q_2=1 \text{(舍)}\end{cases}$

37. 计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x+\alpha)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^4-1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$.

38．指出下面解题中的错误，并给出正确的解答：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1.$$

39．求证：函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=3$ 处连续.

40．作出下列函数的图象，并且根据图象指出它们在哪些点不连续：

(1) $f(x)=\begin{cases}0 & (|x|\leqslant1),\\ \dfrac{1}{x} & (|x|>1);\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}1 & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \sin x & \left(|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right),\\ -1 & \left(x<-\dfrac{\pi}{2}\right);\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x & (x>1),\\ \sqrt{1-x^2} & (|x|\leqslant1),\\ -x & (x<-1).\end{cases}$

41．指出下列函数的不连续点，并说明理由：

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq1),\\ 2 & (x=1);\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0),\\ x+1 & (x\leqslant0).\end{cases}$

42．(1) 函数 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1),\\ 1 & (x=1)\end{cases}$ 在 $x=1$ 连续否？