应用数学初步

陈晓平　主编
汤　娟　李伯华　副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

应用数学初步

主　编　陈晓平
副主编　汤　娟　李伯华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用数学初步/陈晓平主编. —北京:北京理工大学出版社,2010. 8
ISBN 978 - 7 - 5640 - 3380 - 4

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①应用数学 - 职业教育 - 教材
Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 134081 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http: // www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 ×960 毫米　1/16
印　　张 / 18
字　　数 / 363 千字
版　　次 / 2010 年 8 月第 1 版　　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~6500 册
定　　价 / 32. 50 元

责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 边心超

编写说明

时代在发展，数学教育也在与时俱进。

近30年来，数学飞速发展，其成果超过前几千年的总和，数学应用已广泛渗透进各个领域，并发挥着极其重要的作用。特别是微型电脑的普及，使并不从事数学专业的各行各业的人利用电脑解决实际工作中出现的计算问题成为可能。过去最被人引以为豪的解题能力在电脑面前显得那么微不足道，这就不能不引起我们深深地思考，现在数学课应该教什么？尤其是我们的职教数学课应该教什么？

数学源于实践，又指导实践、服务实践，传统数学教育过于侧重解题，这样就容易忽视数学教育更应该关注的问题，即数学的思想方法。生动活泼的数学思想和方法是人类思想发展的重要组成部分，它对指导人们的生活、工作都有重要作用，而不是仅仅局限于解数学题。不能把学生引入这样的误区：学数学就是套公式解题。如果说过去仅依赖手工解题，不得不把教学重心放在解题训练上的话，那么在今天，计算器、计算机充分普及的情况下，适时转变教学重心、改变教学方法就显得格外重要。

职业教育必须把应用放在突出位置，数学的思想方法应通过教师的教学贯穿于始终。淡化解题训练，充分使用计算器、计算机（简化了过程），整个教学理念与模式应与传统教法有很大改变。如先提出问题，看看数学家是怎么分析思考的，由特例引出一般，得到结论再指导应用，整个教学过程就是模仿、学习、实验、探索的过程。通过这样的训练，有望使学生在生活、工作中遇到实际问题时，自觉或不自觉地运用数学思想方法去思考分析，从而达到职教数学教学的基本要求，如果学生通过学习，把生活、工作中遇到的部分问题能够数学模型化，并使用工具解决问题，那就是我们最理想的目标。

本书的专题，与传统数学教材内容差别很大，关键在于对“基础”的认识。过去手工计算，环环相扣，差一点点就无法通过，现在借助工具，只要你能正确写出数学关系，就能解决问题，因此学生必须掌握的基础知识就是些基本概念，而无需大量进行计算练习。教学的重心是分析问题，理顺数学关系。

由于题材的内容迥异，各专题编写风格难以完全统一。各专题叙述力求简洁、通俗、浅显。问题的解法也不求全，一般选择直观、便于分析的解法，实际问题多为数值解，全书都统一使用等号。

许多专题从程度上说，虽仅是入门读物，但相信它仍可以给学生展示数学的丰富内容，让学生体会到数学的魅力。过去习惯于套公式解题的学生接触本书以后，一定会有“数学原来是这样！”的感慨。

我们的知识水平有限，虽经努力，肯定存在不少问题，恳请各位老师批评指正，我们更祈盼广大教师能为本教材的进一步完善提出建设性的意见。

本书由陈晓平任主编，汤娟、李伯华任副主编，参加编写的有陈晓平、汤娟、李伯华、顾德进、单晨、吴萍、石英、李维、钱又章、蒋大峰、张立志、许萍、韩红霞、瞿娟、李霞、陆勇等老师。

《应用数学初步》编写组

目　录

第一章　基本运算

第一节　集　　合

§1.1.1　集合的表示

一、集合与元素

一般地,我们把一些能够确定的对象看成一个整体,则这个整体就是由这些对象的全体构成的集合(简称集). 构成集合的每一个对象都叫做元素. 例如,由 1,2,3,4,5 五个数组成的集合,其中的对象 1,2,3,4,5 都是这个集合的元素.

集合通常用英文大写字母 $A,B,C,\cdots$表示,元素通常用英文小写字母 $a,b,c,\cdots$表示.

如果 a 是集合 A 的元素,称 a 属于 A,记作 $a\in A$.

如果 a 不是集合 A 的元素,称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

关于集合概念有如下说明:

(1) 确定性:作为集合的元素,必须是能够确定的. 如接近"1"的数字全体,到底有多少个?"接近"不能确定,所以就不能构成集合.

(2) 互异性:对于一个给定的集合,集合中的元素是互异的,即集合中的元素不得重复出现.

(3) 无序性:集合中元素的书写次序不受限制.

二、集合的表示法

1. *列举法*

将集合中的元素一一列举出来,并用逗号隔开,写在一个大括号内,这种表示集合的方法叫做列举法.

例如,由 1,2,3,4,5 组成的集合可表示为$\{1,2,3,4,5\}$.

有些集合的元素比较多,在不引起混淆的情况下可列出部分元素作为代表,其他元素用省略号表示. 例如,不大于 100 的自然数的全体构成的集合可表示为$\{0,1,2,3,\cdots,100\}$.

一个集合可以只有一个元素,如:$\{-3\}$. 一个集合也可以没有元素,不含任何元素的集合叫做**空集**,记作 ϕ.

【例 1-1】 用列举法表示下列集合:

(1) 大于 3,且小于 10 的奇数构成的集合 A;

(2) 方程 $x^2-5x+6=0$ 的解构成的集合 B.

解 (1) $A=\{5,7,9\}$.

(2) $B=\{2,3\}$.

2. 描述法

把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做描述法.

用描述法表示集合通常有两种形式:{元素的公共属性}或$\{x|x$ 具有的公共属性$\}$,例如,集合$\{1,2,3,4,5\}$可表示为{不大于5的正整数},也可表示为$\{x|x$ 是不大于5的正整数$\}$.

【例1-2】 用描述法表示下列集合:

(1) 第一象限点的集合 A;

(2) 大于3的全体实数构成的集合 B.

解 (1) $A=\{(x,y)|x>0$ 且 $y>0\}$;

(2) $B=\{x|x>3,x\in\mathbf{R}\}$.

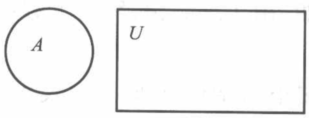


图1-1

3. 韦恩(Venn)图表示法

用一个封闭的平面图形(圆形或矩形)的内部表示一个集合,这种图称为韦恩图(图1-1). 这是集合的一种直观形象的表示法,通常在对集合进行一般性讨论使用.

三、数集及其表示

元素都是数的集合称为数集. 基本数集有以下几种:

自然数集 $\mathbf{N}=\{$自然数$\}=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

整数集 $\mathbf{Z}=\{$整数$\}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$;

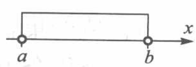
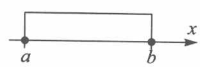
有理数集 $\mathbf{Q}=\{$有理数$\}=\{$整数或分数$\}$;

实数集 $\mathbf{R}=\{$实数$\}$.

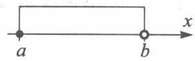
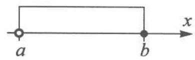
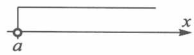
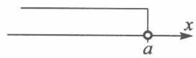
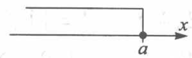
此外,一些与基本数集相近的常用数集可表示为:$N_+=\{$正整数$\}$,$R_+=\{$正实数$\}$等.

一般集合可以用列举法、描述法和画维恩图等方法表示. 有一类数集还有一种更为简单的方法,叫**区间表示法**,根据表示元素属性的不等式,共有表1-1所示几种基本区间.

表1-1

数集	数轴表示	区间表示
$\{x\|x\in\mathbf{R},a<x<b\}$		(a,b)
$\{x\|x\in\mathbf{R},a\leqslant x\leqslant b\}$		$[a,b]$

续表

数　　集	数轴表示	区间表示
$\{x\mid x\in\mathbf{R},a\leqslant x<b\}$		$[a,b)$
$\{x\mid x\in\mathbf{R},a<x\leqslant b\}$		$(a,b]$
$\{x\mid x\in\mathbf{R},x>a\}$		$(a,+\infty)$
$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\geqslant a\}$		$[a,+\infty)$
$\{x\mid x\in\mathbf{R},x<a\}$		$(-\infty,a)$
$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\leqslant a\}$		$(-\infty,a]$

§1.1.2　集合的关系与运算

一、集合的关系

1. 包含关系

两个集合,如

$$A=\{1,3,5\}\text{ 与 }B=\{1,2,3,4,5,6\},$$

可以看出,集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素．如果集合 A 的任一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

由于任意集合 A 中任何一个元素都属于集合 A 本身,所以 $A\subseteq A$,即任何一个集合都是它本身的子集．

我们规定,空集是任何集合的子集,即 $\phi\subseteq A$.

【例 1-3】　写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集．

解　集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集是:

$$\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}.$$

注意　ϕ 与 $\{0\}$ 是不同的集合．

如果 $A\subseteq B$,且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

显然,空集是任何非空集合的真子集.

2. 相等关系

对于两个集合 A 与 B,如果它们的元素完全相同,那么这两个集合**相等**,记作 $A=B$.

例如,设 $A=\{0,1\}$,$B=\{x\mid x^2-x=0\}$,则 $A=B$.

【例 1－4】 说出以下两个集合之间的关系:

(1) $A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{2,5\}$;

(2) $P=\{x\mid x^2=1\}$,$W=\{-1,1\}$;

(3) $C=\{$奇数$\}$,$D=\{$整数$\}$.

解 (1) $A\supset B$;

(2) $P=W$;

(3) $C\subset D$.

二、集合的运算

1. 交集

由给定集合 A、B 的所有公共元素构成的集合,叫做 A 与 B 的**交集**,记作 $\boldsymbol{A\cap B}$.

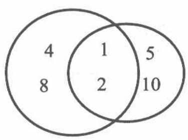


图 1－2

例如,$A=\{1,2,4,8\}$,$B=\{1,2,5,10\}$,则

$$A\cap B=\{1,2,4,8\}\cap\{1,2,5,10\}=\{1,2\}.$$

集合 A 与 B 的交集可用图 1－2 表示.

由交集的定义可知,对于任意两个集合 A、B,都有

$$A\cap B=B\cap A,A\cap A=A,A\cap\phi=\phi\cap A=\phi.$$

【例 1－5】 设 $A=\{$奇数$\}$,$B=\{$偶数$\}$,求 $A\cap Z$,$B\cap Z$,$A\cap B$.

解 $A\cap Z=\{$奇数$\}\cap\{$整数$\}=A$;

$B\cap Z=\{$偶数$\}\cap\{$整数$\}=B$;

$A\cap B=\{$奇数$\}\cap\{$偶数$\}=\phi$.

【例 1－6】 设 $A=\{x\mid x\geqslant 0\}$,$B=\{x\mid x<3\}$,求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid x\geqslant 0\}\cap\{x\mid x<3\}=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$.

用数轴表示 A、B,能容易地求出 $A\cap B$,如图 1－3 所示.

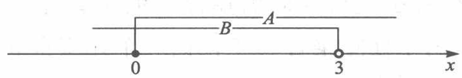


图 1－3

【例 1－7】 设 $A=\{(x,y)\mid x-2y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid 2x+y=2\}$,求 $A\cap B$.

解
$$A\cap B=\{(x,y)\mid x-2y=1\}\cap\{(x,y)\mid 2x+y=2\}$$
$$=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-2y=1\\2x+y=2\end{cases}\right.\right\}=\{(1,0)\}$$

2. 并集

由给定集合 A,B 的所有的元素并在一起构成的集合,叫做 A 与 B 的**并集**,记作 $\boldsymbol{A\cup B}$.

例如，$A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,2,5,10\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,4,8\}\cup\{1,2,5,10\}=\{1,2,4,5,8,10\}.$$

注　在求集合的并集时，同时属于 A 和 B 的公共元素，在并集中只列举一次．在上例中，1 和 2 在并集中只列一次(元素的互异性).

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A、B，都有

$$A\cup B=B\cup A,A\cup A=A,A\cup\phi=\phi\cup A=A.$$

【例 1－8】　(1) 已知 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{c,b,f,g\}$，求 $A\cup B$；

(2) 已知 $A=\{-1,-2,-3,-4\}$，$B=\{0,1,2\}$，求 $A\cup B$.

解　(1) $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}\cup\{c,b,f,g\}=\{a,b,c,d,e,f,g\}$；

(2) $A\cup B=\{-1,-2,-3,-4\}\cup\{0,1,2\}=\{-1,-2,-3,-4,0,1,2\}$.

3. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一给定集合的子集，那么这个给定的集合叫做这些集合的全集，通常用 U 表示．

如果 A 是全集 U 的一个子集，由 U 中的所有不属于 A 的元素构成的集合，叫做 A 在 U 中的**补集**，记作 $\complement_U A$. 图 1－4 中的阴影部分表示 A 在 U 中的补集 $\complement_U A$.

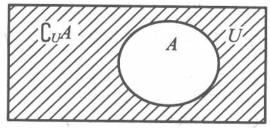


图 1－4

由补集定义可知，对于任意集合 A，有

$$A\cup\complement_U A=U,A\cap\complement_U A=\phi,\complement_U(\complement_U A)=A.$$

【例 1－9】　已知 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5,\}$　求 $\complement_U A$，$A\cap\complement_U A$，$A\cup\complement_U A$.

解　$\complement_U A=\{2,4,6\}$，$A\cap\complement_U A=\phi$，$A\cup\complement_U A=U$.

【例 1－10】　已知 U 为实数集合，$A=\{x|x>5\}$，求 $\complement_U A$.

解　$\complement_U A=\{x|x\leqslant 5\}$.

【习题 1－1】

1. 下列语句能否确定一个集合？

(1) 大于 10 的自然数全体；

(2) 某职校高一(2)班性格开朗的男生全体；

(3) 10 以内的质数集合；

(4) 高一(1)班高个子同学的全体．

2. 用列举法表示下列集合：

(1) {大于 3 且小于 11 的偶数}；

(2) {平方等于 1 的数}；

(3) {大于 0 且小于 5 的整数}.

3. 用描述法表示下列集合：

(1) $\{2,4,6,\cdots\}$;

(2) 方程 $x^2-2x+3=0$ 的解集;

(3) 不等式 $4x-6<5$ 的解集.

4. 用区间表示下列集合,并在数轴上表示这些区间:

(1) $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$ (2) $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$ (3) $\{x\mid x\geqslant 0\}$ (4) $\{x\mid x<0\}$

5. 用区间表示下列不等式的解集,并在数轴上表示这些区间:

(1) $-2\leqslant x\leqslant 3$ (2) $-3<x<4$

(3) $-2\leqslant x<3$ (4) $-3<x\leqslant 4$

(5) $x>3$ (6) $x\leqslant 4$

6. 用适当的符号($\in,\notin,=,\subset,\supset$)填空:

(1) a ________ $\{a,b,c\}$; (2) $\{a\}$ ________ $\{a,b,c\}$;

(3) 0 ________ $\{0\}$; (4) $\{a,b,c\}$ ________ $\{b,c\}$;

(5) ϕ ________ $\{1,2,3\}$; (6) $\{4,5,6\}$ ________ $\{6,5,4\}$;

(7) ϕ ________ $\{0\}$.

7. 写出下列集合$\{a,b,c\}$的所有子集合.

8. 已知 $A=\{1,2,3,4,\}$,$B=\{3,4,5\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

9. 已知 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{b,d,e,f\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

10. 已知 $A=\{x\mid x^2-9=0\}$,$B=\{x\mid x-3=0\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$(用列举法表示).

11. 已知 $A=\{(x,y)\mid 2x+3y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid 3x-2y=3\}$,求 $A\cap B$,(用列举法表示).

12. 设全集 $U=\{$小于9的正整数$\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,求$\complement_U A$,$\complement_U B$.

13. 若 U 为实数集,$A=\{x\mid -1<x<1\}$,求$\complement_U A$, $\complement_U A\cap U$, $A\cup U$, $A\cap\complement_U A$,$A\cup\complement_U A$.

14. 设全集 U 为整数集,$A=\{x\mid x=2k,k\in Z\}$,$B=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$,求$\complement_U A$,$\complement_U B$.

阅读材料

罗素悖论

1874年,数学家康托尔(1845—1918年)创立了集合论,使得五花八门的各种数学分支有了一个统一的基础。数学大厦在集合论的基础上迅速挺立。大数学家庞加莱在1900年世界数学家大会上兴奋地宣布:"我们可以说,现在数学已经达到了绝对的严格。"然而事情并不那么简单。

所谓集合就是某些个体所构成的整体。通俗的说法,"集合"就是乌合之众,不考虑怎样"乌合","众"可以具体,也可以抽象,但必须确定,组成"众"的个体称为元素。虽然欧拉常数 $C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 是否属于有理数集 $\mathbf{Q}$? 这个问题至今尚未解决,但是元素对于

某个集合来说，要么属于它、要么不属于它，两者必居其一，这是必须明确的。

1901 年，哲学家罗素（1872—1970 年）提出了“罗素悖论”，为了便于大众理解，1919 年罗素举了一个通俗的例子。某村刮胡子的人可分成两个集合：

$A=\{$自己给自己刮胡子的人$\}$；$B=\{$自己不给自己刮胡子的人$\}$。

村里的理发师自己约定：“给且只给村里自己不给自己刮胡子的人刮胡子”。也就是说，他只给 B 集合的村民刮胡子。

同学们想一想：这位理发师的胡子谁刮？

这个问题无法回答！问题陷入怪圈：

如果理发师自己刮胡子，那么他属于 A 集合，理发师就违反了自己的约定。

如果理发师不给自己刮胡子，那么他属于 B 集合，按约定他又必须给自己刮胡子，如此他又属于 A 集合……。

这是一个死循环。庞加莱不得不改口：“我们设置栅栏，围住羊群，抵御狼的侵袭，但是在围栅栏时，很可能把一只狼围在其中了。”

集合论是如此的脆弱，号称天衣无缝的数学陷入自相矛盾的危机，数学大厦的基础出现了严重的裂痕，引起了数学界的恐慌。这就是第三次数学危机。

数学家们迎难而上，经过许多人的攻关，终于在 1983 年建立了公理化集合论，即要求集合必须满足某些公理的限制。虽然第三次数学危机过去了，然而数学大厦基础的裂痕并没有完全消除。

1931 年年轻的数学家哥德尔（1906—1978 年）发表了“哥德尔不完备性定理”，指出：任何人都不可能建立一套完备的数学公理体系。

数学就是这么奇妙：基础理论的不完善，并不妨碍数学的广泛应用性，也不影响计算的正确性。一切都包含在矛盾之中！

同学们，请展开思维的翅膀，充分发挥你的想象力，设计一个产生自相矛盾的悖论，给紧张的学习生活增添一些乐趣。

第二节　指　　数

§1.2.1　整数指数

在初中我们已经知道，几个相同的因数相乘的运算叫乘方，即

$$a\cdot a\cdot\cdots\cdot a=a^n\ (n\text{ 为正整数})$$

其中，a 称为**底数**，n 称为**指数**，a^n 叫做 a 的 n 次**幂**，此时这样的幂也叫做正整数指数幂．显然，你对正整数指数幂的运算是比较熟悉的：正数的任何次幂均为正数；负数的偶次幂为正数；负数的奇数幂为负数；$0^n=0$（n 为正整数）．

容易验证,正整数指数幂的运算满足如下法则:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}(m>n, a\neq 0)$;

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(4) $(ab)^m = a^m b^m$;

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}(b\neq 0)$.

在法则(2)中,有 $m>n$ 的限制,若 $m=n$ 或 $m<n$,则正整数指数幂可以推广到整数指数幂,例如,当 $a\neq 0$ 时,

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0;\ \frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}.\ \text{即}:a^0 = 1;\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

于是我们规定:

$$a^0 = 1 \quad (a\neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0, n\in \mathbf{N}^+)$$

由此规定了零指数幂和负整数指数幂的意义,我们把正整数指数幂推广到整数指数幂,同时正整数指数的运算法则对整数指数运算仍然成立,例如,

$$(-0.8)^0 = 1;\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001;\ \frac{a^2}{b^2 c} = a^2 b^{-2} c^{-1}$$

注:对于零指数和负整数指数幂,底数不能为零.

§1.2.2 根式

在初中我们还学习了方根的概念,如果

$$x^n = a \ (n>1, n\in \mathbf{N}).$$

则 x 叫做 a 的 n 次方根,正数的偶次方根有两个,它们互为相反数,分别表示为$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$(n 为偶数),负数不能开偶次方;正数的奇次方根是一个正数,负数的奇次方根是一个负数,都表示为$\sqrt[n]{a}$(n 为奇数).

正数 a 的正 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根.

当$\sqrt[n]{a}$有意义的时候,$\sqrt[n]{a}$叫做根式,n 叫做根指数.

§1.2.3 指数的推广

根据 n 次方根的定义,根式具有性质:

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a.\quad (a\geqslant 0)$

$a^1=a$
$a^0=1$

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,(a\geqslant 0)\\ -a,(a<0)\end{cases}$

例如：

$$(\sqrt[4]{5})^4=5;(\sqrt[3]{-5})^3=-5;\sqrt{5^2}=5;\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$$

我们还可以把整数指数幂推广到正分数指数幂，例如：

$$(a^{\frac{1}{3}})^3=a^{\frac{1}{3}\times 3}=a;(a^{\frac{5}{4}})^4=a^{\frac{5}{4}\times 4}=a^5$$

这些运算又都不能用整数幂的定义来解释，但如果规定：

$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a};a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^5}.$$

则上述分数指数幂就能像整数指数幂那样运算了．我们约定底数 $a>0$．于是，当 $a>0$ 时，可定义：

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(n,m\in\mathbf{N}^+,\text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数}).$$

负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相同，即对负分数指数幂，我们可定义：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\quad(n,m\in\mathbf{N}^+,\text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数}).$$

至此，我们把整数幂推广到有理数幂．进一步还可以推广到实数指数幂．在 $a^{\alpha}(a>0)$ 中，α 可以为任意实数．

实数指数幂有如下三条运算法则：

（1）$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$；

（2）$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$；

（3）$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$

其中 $a>0,b>0$．α，β 为任意实数．

【例 1－11】　计算下列各式（式中字母均为正数）：

（1）$3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$；　（2）$\sqrt[4]{\left(\frac{16a^{-4}}{81b^4}\right)^3}$

解　（1）$3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}=3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^2=9$

（2）$\sqrt[4]{\left(\frac{16a^{-4}}{81b^4}\right)^3}=\left(\frac{2^4a^{-4}}{3^4b^4}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{(2^4)^{\frac{3}{4}}(a^{-4})^{\frac{3}{4}}}{(3^4)^{\frac{3}{4}}(b^4)^{\frac{3}{4}}}=\frac{2^3a^{-3}}{3^3b^3}=\frac{8}{27a^3b^3}$

【例 1－12】　利用函数计算器计算（精确到 0.001）．

（1）$0.2^{1.52}$；　（2）3.14^{-2}；　（3）$3.1^{\frac{2}{3}}$

解　（1）$0.2^{1.52}=0.087$；

（2）$3.14^{-2}=0.101$；

（3）$3.1^{\frac{2}{3}}=2.126$.

【例 1－13】 某市 2001 年底的人口为 121.5 万．根据统计，发现该市人口数量以平均每月 0.2% 的增长率增长．那么依次推算，到 2006 年年底该市的人口数量大约将达多少？

解 如果每月的人口增长率为 0.2%，那么经过 5 年（即 60 个月）后，到 2006 年年底该市的人口数量将达到 $121.5\times(1+0.2\%)^{60}\approx136.9745$（万）.

【习题 1－2】

1. 填空：

$2^3=$________，$3^2=$________，$(-2)^3=$________，$(-3)^2=$________，$-2^3=$________，$-2^4=$________.

2. 填空：

27 的 3 次方根为________，16 的 2 次方根________，2 次算术根为________，－32 的 5 次方根为________，$\pm\sqrt[4]{81}=$________，0 的 n 次方根（n 为正整数）为________.

3. 求值：

$\sqrt[3]{8^2}$

（1）$8^{\frac{2}{3}}$；（2）$100^{\frac{1}{2}}$；（3）$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$；（4）$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$；（5）$4^{-\frac{1}{2}}$；（6）$\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{100}$

4. 计算：

（1）$2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$；（2）$3\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$；（3）$\sqrt[6]{\left(\frac{8}{125}\right)^4}$

5. 利用计算器计算下列各题（精确到小数点后 5 位）：

（1）$\sqrt[100]{2}$；（2）$100\sqrt{3}$；（3）$3^{\frac{8}{25}}$；

（4）$0.4012^{-\frac{1}{4}}$；（5）$1.414^{1.12}$；（6）$\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$

6. 一台机器的价值是 50 万元，如果每年的折旧率是 4.5%，经过 5 年，机器的价值降为多少？

第三节　对　　数

§1.3.1　对数的概念和性质

一、对数的定义

已知 $3^x=5$，如何求 x 呢？也就是已知底数和幂的值，求指数的问题.