CHUZHONG SHUXUE JIETI FA SHOUCE

初中数学解题法手册

上

科技教育出版社

初中数学解题法手册(上)

张曾漪　李俊明　陈汝作　姜宝坤　编

上海科技教育出版社

前　言

《全日制中学数学教学大纲》(1987年版，以下简称《大纲》)规定，中学数学的教学目的是：使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力，…….而目前一般中学生的实际情况与《大纲》要求还有距离，表现在他们的解题能力较差．究其原因，主要有两个：一是不善于根据已知条件及有关的基本知识来寻找解题途径；二是不重视对解题的方法和技能、技巧的总结．伟大数学家笛卡尔曾经说过：“我所解决的每个问题都成为以后解决其他问题的规则可．”见，要提高学生的分析和解决问题的能力，就要帮助他们克服上述解题中的两个弱点．基于此，我们考虑编写一套“中学数学解题法手册”，作为课堂教学的辅助读物．其主要读者对象是一般中学具有中等以上水平的学生，企图通过它来配合课堂教学，使他们尽快地学会在解题中“怎样想”、“怎样解”、“怎样总结规律”，以提高他们的分析和解决问题的能力．

《初中数学解题法手册》是参照《大纲》规定的教学目的、要求、内容编写而成的，分上、下两册．本手册是上册，其内容包括全部“初中代数”、“解三角形”；下册内容是“平面几何”．

本手册内容的编排是将全部内容分为六个部分，就是将初中代数内容分为“数”、“代数式”、“方程和方程组”、“不等式和不等式组”、“函数”，连同“解三角形”共六个部分．每部分

作为一个单元，其内容都是按照现行初中数学课本中有关部分的例题、习题的内容和要求，归类整理出的若干类问题，每个单元中设有若干例题及解这类问题所必需的基本知识．每个例题基本上包括三方面的内容：一是“分析”，企图通过它引导读者怎样根据已知条件及学过的有关知识来寻找解题途径（即解题思路）；二是“解”，企图通过它指导读者怎样循着“分析”中所得的“思路”，寻求解题方法；三是例题后面的“说明”，企图通过它指引读者怎样总结解题方法及一般规律．此外，多数单元最后还有“小结”，主要是对解题的基本思想，解题方法及其理论根据，有关知识的补充等作系统的归结、整理．

在编写中注意了以下两点：

第一，分清主次，循序前进．全书的例题就其要求分三类．第一类是“紧扣大纲”；第二类是“靠近大纲”；第三类是“超过大纲”．其中，以第一类为主要内容，所占篇幅最多．为了醒目起见，对于第三类例题都加上星号．例题的编排次序注意了“层次”，力求做到由浅入深，由简到繁，循序前进．这样安排也便于读者查考，并有利于读者配合课堂教学进行研讨、参考．

第二，确保基本，因材施教．如上所述，本手册中绝大多数的例题都属于基本的，主要供读者研讨解题方法时参考；但为了贯彻因材施教的原则，还安排了一些“靠纲”、“超纲”的例题，以帮助学有余力的学生扩大眼界，增长知识，开拓思路，提高解题能力．

限于水平，本手册难免存在一些问题，我们殷切地希望广大读者提出宝贵意见，以便修改、补充，使之不断趋于完善．

编者

1989 年 12 月

目　录

一、数

数是数学中主要研究对象之一，内容非常丰富．在初中阶段，我们研究的只是有理数和实数．

关于有理数、实数，常见的问题有以下几类：

（一）关于数的概念的判别；

（二）数的几何表示；

（三）数的大小比较；

（四）数的运算．

下面逐一地举例说明，对于这类问题，怎样根据学过的有关知识并结合已知条件来寻找解题途径，然后怎样根据所得的解题途径（即思路）来作出问题的解答，简言之，即对这类问题是"怎样想"、"怎样解"的．

§1．关于数的概念的判别

表示物体的个数或事物出现的先后次序的数，叫做**自然数**．全体自然数的集合简称**自然数集**．

在自然数集中，能被 2 所整除的数叫做**偶数**；不能被 2 所整除的数叫做**奇数**．这样，自然数就可以按照能否被 2 所整除分为偶数和奇数两类，即

$$\text{自然数}\begin{cases}\text{偶数，如 } 2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\\ \text{奇数，如 } 1,3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots\end{cases}$$

在大于 1 的自然数中，除了它本身和 1 外，不能被其他自

然数整除的数叫做**质数**(或**素数**)；除了能被 1 和它本身整除外，还能被其他自然数整除的数叫做**合数**．这样，自然数又可以分为质数、合数和 1 三类，即

$$\text{自然数}\begin{cases}\text{质数，如 } 2,3,5,7,\cdots\\ \text{合数，如 } 4,6,8,9,\cdots\\ 1\end{cases}$$

零是一个特殊的数，它不是自然数；在引进负数、正数的概念以后，我们又说，零既不是正数，又不是负数；它小于任何正数，而大于任何负数．

把单位"1"分成若干等份，表示其中一份或几份的数，叫做**分数**．分数也可以看成两个自然数的商．一个分数，如果它的分子大于或等于分母，这样的分数叫做**假分数**；如果分数的分子小于分母，这样的分数叫做**真分数**．这样，分数就可以分为假分数和真分数两类，即

$$\text{分数}\begin{cases}\text{真分数，如 } \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\cdots\\ \text{假分数，如 } \frac{3}{2},\ \frac{4}{4},\cdots\end{cases}$$

一个真分数，如果它的分子和分母没有公约数，这样的真分数叫做**最简分数**(或**既约分数**)．

十进小数简称**小数**，是十进分数(以 10 的幂为分母的特殊分数)的另一种表示形式．

有限小数和无限循环小数都可以化为分数．

在引进负数概念以后，自然数也叫做**正整数**；分数也有正分数和负分数之分．

正整数、零、负整数，统称为**整数**．全体整数的集合简称**整数集**．

整数和分数统称为**有理数**．全体有理数的集合简称**有理**

数集.

任何一个有理数都可以用分数来表示.

无限不循环小数叫做**无理数**.

有理数和无理数统称为**实数**. 全体实数的集合简称**实数集**. 这样,实数就可以分类如下:

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

实数也可以分为正数、零、负数这三类. 正数和零统称为**非负数**.

1. 按照要求把已知数归类

例 1 下列一些数中,哪些是自然数?哪些是分数?哪些是整数?哪些是有理数?哪些是非负数?为什么?

$+3$, $-\frac{1}{3}$, 0, -7, π, $3.10\dot{1}$, -0.03,

$\frac{3}{7}$, 1, $|-4|$, $-|-5|$.

分析 这里,要求从这些数中辨认出属于指定数集的数. 而要知道一个数是不是某一个数集的数, 就要看这个数的特性是否符合于这个数集中数的的定义. 因此, 只要根据这几个数集中数的定义来逐一地考察就是了.

解 根据自然数的定义,可以知道, $+3$, 1 都是自然数;

又因为 $|-4|=-(-4)=4$，所以 $|-4|$ 也是自然数.

根据分数的定义，可以知道：$-\frac{1}{3}$，$\frac{3}{7}$ 是分数；又因为 $3.10\dot{1}$ 是一个循环小数，-0.03 是一个有限小数，它们都是分数的一种特殊形式，所以这两个数实际上也都是分数.

根据整数的定义，可以知道：$+3, 0, -7, 1$ 都是整数；又因为 $|-4|=4, -|-5|=-5$，所以 $|-4|$、$-|-5|$ 也都是整数.

根据有理数的定义，可以知道，$+3, -\frac{1}{3}, 0, -7, 3.10\dot{1}$，$-0.03$，$\frac{3}{7}, 1, |-4|, -|-5|$ 都是有理数.

根据非负数的定义，可以知道：$+3, 0, \pi, 3.10\dot{1}$，$\frac{3}{7}$，1，$|-4|$ 都是非负数.

说明 解这类问题，只要根据数的概念，按照题目的要求，“对号入座”就可以了.

例 2 把下列各数填入相应的集合里：

$-\frac{1}{2}$，3^{-1}，$\sqrt[3]{3}$，$\operatorname{tg}30^\circ$，$\sin30^\circ$，

$\sqrt{0.16}$，$\lg3$，$\lg0.1$，$2^{\frac{2}{3}}$，$-8^{\frac{2}{3}}$，

有理数集合：{　　　　　　　　　　　　}；

正数集合：{　　　　　　　　　　　　}.

分析 这里，所给出的数中，有些从形式上来看，很难判定它们是属于哪一个数集的数，如 $\sin30^\circ$，但如果改变它们的形式，如 $\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，即用 $\frac{1}{2}$ 来代替 $\sin30^\circ$，就可以知道它是有理数，也是正数.

解 ∵ $3^{-1}=\frac{1}{3}$，$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，$\sqrt{0.16}$

$\doteq 0.4$，$\lg 0.1=-1$，$2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$，$-8^{\frac{2}{3}}=-4$，

∴ 根据有理数和正数的定义，可以把这些数中的有理数和正数分别填入相应的集合里，即：有理数集合：

$$\left\{-\frac{1}{2},\ 3^{-1},\ \sin 30^{\circ},\ \sqrt{0.16},\ \lg 0.1,\ -8^{\frac{2}{3}}\right\};$$

正数集合：

$$\{3^{-1},\ \sqrt[3]{3},\ \mathrm{tg}30^{\circ}, \sin 30^{\circ}, \sqrt{0.16},\ \lg 3,\ 2^{\frac{2}{3}}\}.$$

例 3 下面各个说法是否正确？为什么？

(1) 0 是最小的有理数.

(2) 一个有理数，如果不是负数，就是正数.

(3) 一个有理数，如果不是分数，就一定是整数.

解 (1) 不正确. 因为根据有理数的定义可知，正整数、正分数、零、负整数、负分数都是有理数，其中零小于任何正数，而大于任何负数，例如$0>-1$，所以0不是有理数中最小的一个数.

(2) 不正确. 根据有理数的定义可知，0 是有理数，但 0 既不是正数，又不是负数.

(3) 正确. 因为这个说法是符合有理数的定义的，即整数和分数总起来叫做有理数.

说明 要判断一种说法是否正确，只要根据有关概念的定义来判定. 对于一个不正确的说法，也可以举出一个不正确的例子来说明. 这种例子常称为“反例”. 举反例也是数学中说明错误结论的一种方法.

例 4 选择题：

下列说法中，错误的个数是(　　).

(1) 自然数就是正整数；

(2) 正整数和负整数统称为整数；

(3) 有理数可以分成偶数和奇数两类；

(4) 有理数可以分成正数和负数两类.

(A) 4； (B) 1； (C) 2； (D) 3.

分析 题中给出的四种说法，都是涉及有关数的概念及其分类的问题，所以只要根据有关数的定义及其分类加以考察，就可判定其说法是否正确，然后进行选择.

解 根据正整数的定义，可知 (1) 的说法是正确的；根据整数的定义及其分类，可知 (2) 的说法是错误的；根据有理数的分类，可知 (3) 和 (4) 的说法都是错误的.

因此，应选择 (D).

说明 选择题是一种常见的题型. 它由两部分组成：一是题设条件(如例 4 中的四种说法)和要求 (如例 4 中要求回答错误说法的个数)；二是选择支[如例 4 中的 (A)～(D)]. 数学中的选择题，一般只有一个选择支是该选择题的正确结论. 解上例选择题的步骤是：首先，根据有关数的概念的定义、分类，判断题设条件是正确的，还是错误的；其次，根据要求，合计应得结论的总数(如例 4 中，根据要求，合计出错误的个数是 3)；最后，把所得的总数与各选择支比较，从而作出选择[如例 4 中，得出错误的个数是3，与各选择支比较后作出：应选择 (D)]. 这种解选择题的方法称为**直接法**. 此外，解选择题只需作出选择，把正确的选择支填入题中的括号内；所以，“解”的过程都可省略. 这里的“解”只是为了说明怎样作出选择而已.

2. 证明一个数不是有理数

***例 5** 证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.

分析 这里要证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数. 而任何一个有

理数都可以用分数来表示. 因此,只要设法证明 $\sqrt{3}$ 不是一个分数就可以了.

证明 假设 $\sqrt{3}$ 是有理数,那么不妨设

$$\sqrt{3}=\frac{n}{m}, \qquad ①$$

其中 m、n 都是自然数,且 m、n 互质.

把 ① 的两边分别平方,得

$$3=\frac{n^2}{m^2},$$

即
$$n^2=3m^2. \qquad ②$$

由此可得, n 一定是 3 的倍数.

设 $n=3k$(k 是自然数), 代入②, 得

$$9k^2=3m^2,$$

即
$$m^2=3k^2.$$

因此,m 也是3的倍数.

从而得出, m 和 n 有公约数 3. 这就和假设 m 和 n 互质相矛盾.

这就是说, $\sqrt{3}$ 不是有理数.

***例 6** 证明 lg5 不是有理数.

证明 假设 lg5 是有理数,那么不妨设

$$\lg 5=\frac{n}{m}, \qquad ①$$

其中 m、n 都是自然数.

由①, 得

$$m\cdot\lg 5=n,$$

即
$$\lg 5^m=n.$$

把上式化为指数式,得

$$10^n=5^m. \tag{②}$$

因为10的n次幂总是偶数，5的m次幂总是奇数，而偶数和奇数不可能相等，所以②式是不成立的。

这就是说，lg5不是有理数.

注意 例5、例6都是根据要求证明了某数不是有理数.但严格地说，这不等于就是证明了这个数是无理数.因为要证明一个数是无理数，就必须根据无理数的定义加以论证. 这种论证比较复杂，因此本书不予以讨论.

说明 例5、例6所采用的证明方法是**反证法**. 应用反证法证题的一般步骤是：

（1）否定结论：假设结论的反面成立；

（2）推出矛盾：从结论的反面成立出发，经过正确的逻辑推理，导出矛盾的结果；

（3）否定结论的反面，从而得出结论是成立的。

§2. 数的几何表示

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做**数轴**.

每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上每一个点都表示唯一的一个实数. 这就是说，实数集和数轴上的点集之间有着一一对应的关系.

只有符号(正、负号)不同的两个数叫做**互为相反数**；零的相反数是零. 在数轴上，表示互为相反数的两个非零的数的点，分别在原点的两旁，且离开原点的距离相等.

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。一个实数的绝对值的几何意义，是数轴上表示这个实数的点离开原点的距离。

1. 有理数的几何表示

例 1 在数轴上画出表示下列各个数和它们的相反数的点：

$$-1,\ 3,\ 4\frac{1}{2},\ -0.5.$$

解 如图 1-2-1 所示，在原点左边 1 个单位的点 A 表示 -1；在原点右边 3 个单位的点 B 表示3；在原点右边 $4\frac{1}{2}$ 个单位的点 C 表示 $4\frac{1}{2}$；在原点左边 0.5 个单位的点 D 表示 -0.5.

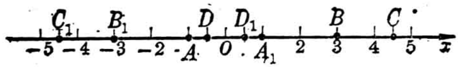

图 1-2-1

又因为 -1 的相反数是 1，3 的相反数是 -3，$4\frac{1}{2}$的相反数是 $-4\frac{1}{2}$，-0.5 的相反数是 0.5，所以，在原点右边 1 个单位的点 A_1 表示 -1 的相反数；在原点左边 3 个单位的点 B_1 表示 3 的相反数；在原点左边 $4\frac{1}{2}$ 单位的点 C_1 表示 $4\frac{1}{2}$的相反数；在原点右边 0.5 个单位的点 D_1 表示 -0.5 的相反数.

说明 在数轴上画出表示实数的点的方法是：

（1）根据题目中给出的数，适当地选取原点和单位长度，画出数轴.

（2）如果这个数是正数，那么表示它的点就在原点的右边，离开原点的单位长度的个数等于这个数；如果这个数是负