二集一

華氏中西算學全書二集

華氏中藏經

全書詩集

行素軒
校本

微積溯源八卷前四卷爲微分術後四卷爲積分術乃算學中最深之事也余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷更思求其進境故又與傅君譯此書焉先是咸豐年間曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書流播海內余素與壬叔相友得讀其書粗明微積二術之梗概所以又譯此書者蓋欲補其所略也書中代數之式甚繁校算不易則劉君省菴之力居多今刻工已竣矣故序之曰吾以爲古時之算法惟有加減而已其乘與除乃因加減之不勝其繁故更立二術以使之簡易也開方之法又所以濟除法之窮者也蓋算學中自有加減乘除開方五法而一切淺近易明之數無不可通矣惟人之心思智慮日出不窮往往以能人之所不能者爲快遇有窒礙難通之處輒思立法以濟其窮故有減其所不可減而正負之名不得不立矣除其所不受除而寄母通分之法又不得不立矣代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也惟每立一法必能使繁者爲簡難者爲易遲者爲速而算學之境界藉此得更進一層如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣微分積分者蓋又因乘除開方之不勝其繁且有窒礙難通之處故更立此二術以濟其窮又使簡易而速者也試觀圓徑求周眞數求對數等事雖無微分積分之時亦未嘗不可求惟須乘除開方數十百次其難有不可言喻者不如用微積之法理明而數捷也然則謂加減乘除開方代數之外更有二術焉一曰微分一曰積分可也其積分術爲微分之還原猶之開平方爲自乘之還原除法爲乘之還原減法爲加之還原也然加與乘其原無不可還而微分之原有可還有不可還是猶算式中有不可開之方耳又何怪焉如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣何必更究其精是舍舟車之便利而必欲負重遠行也其用力多而成功少蓋不待智者而辨矣同治十三年九月十八日金匱華蘅芳序

新學會校正賜書堂石印

英國華里司輯
英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線其中每有幾種數其大小恆有定率者 如橢圓之長短徑拋物線之通徑雙曲線之屬徑之類是也

又每有幾種數可有任若干相配之同數其大小恆不能有定率者 如曲線任一點之縱橫線是也

數既有此兩種分別則每種須有一總名以賅之故名其有定之數曰常數無定之數曰變數

凡常數之同數不能增亦不能損

凡變數之同數能變為大亦能變為小故其從此同數變至彼同數之時必歷彼此二數間最小最微之各分數

如平圓之半徑為常數而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線及各線與弧所成之面皆謂之變數

橢圓之長徑短徑皆為常數而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線並其形內形外所能作之任何線或面或角皆謂之變數

拋物線之通徑為常數而其曲線之任一段或任一點之縱橫線或弧與縱橫線所成之面皆謂之變數 他種曲線亦然

凡常數恆以甲乙丙丁等字代之凡變數恆以天地人等字代之

第二款 若有彼此二數皆為變數此數變而彼數因此數之變而亦變者則彼數為此數之函數

如平圓之八線皆為弧之函數 若反求之亦可以弧為八線之函數

又如重學中令物體前行之力與其物所行之路皆為時刻之函數

如有式 $地=\frac{甲丅天}{甲丄天}$ 此式中甲為常數天為自主之變數地為天之函數故地之同數能以天與甲明之

如有式 $天=\frac{地丄一}{甲(地丅一)}$ 此式中甲與一皆為常數地為自主之變數天為地之函數故天之同數可以地與甲及一明之

如有式 $戊=甲丄乙天丄丙天$ 或 $戊=\sqrt{(甲丄乙天丄天)}$ 或 $戊=\frac{丙丄天}{甲丄\sqrt{乙天}}$ 其甲乙丙為常數天為自變

之數而戊皆爲天之函數.

凡函數之中可以有數箇自主之變數.

如有式 戊＝甲天⊥乙天地⊥丙地″ 則天與地皆爲自主之變數戊爲天地兩變數之函數.

凡變數之函數其形雖有多種然每可化之使不外乎以下數類. 卯天 甲天 對天 正弦天 餘弦天 等類是也

凡函數爲″天之類其指數爲常數則可從天之卯方用代數之常法化之而以有窮之項明其函數之同數故謂之代數函數亦謂之常函數.

如有式 戊＝甲天⊥√卯天／乙天⊥丙天 此種函數其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之.

凡函數爲 甲天 對天 之類則其函數之同數不能以有窮之項明之故謂之越函數越者超越於尋常之意也.

凡函數爲 正弦天 餘弦天 及 正切天 正割天 之類則其函數之同數皆可以平圓之各線明之故謂之圓函數亦謂之角函數.

以上三種函數常函數越函數圓函數也若已知天之同數則其函數之同數卽可求得故名此三種函數爲陽函數因其顯而易明故謂之陽函數.

更有他種函數必先解其方程式令函數中之各變數分開然後能求其同數者.

如有式 戊天＝天／天 其戊爲天之函數如欲求其戊與天相配之同數必先解其二次方程式始能通.

此種之式名曰天之陰函數因其雜糅未明故謂之陰函數. 反之亦可云天爲戊之陰函數.

如解其方程式爲 戊＝二[丙天⊥天／(丙天⊥天)] 則戊變爲天之陰函數

昔代數之家凡遇須用開平方之處每于其式之左旁作一根字以記之如根天爲天之平方根後又變通其法而以根號記之如√天爲天之平方根此代數之例也.

玆可仿照此例凡遇某變數之函數亦用一號以記之所以凡有任何變數之函數皆可書一函字于其變數之旁以爲識別

如天之函數則作 $函天$ 或作 $函(天)$ 皆言天之函數也所以凡見變數之左旁有一函字者其函字並非代天之倍數其意謂是某變數之函數也

用此法則可將 $戌=天^{甲}$ $戌=甲^{天}$ $戌=對天$ $戌=正弦天$ $戌=餘弦天$ 各種之式以一語賅之謂之 $戌=函天$ 或 $戌=函(天)$

若函數從兩箇變數而成其天與地皆爲自主之變數其式如 $戌=甲天^{二}\perp乙天地\perp丙地^{二}$ 者則可以 $戌=函(天,地)$ 別之 函數爲多箇變數所成者仿此推之

惟函數只指其變數言之若其甲乙丙丁各常數雖多不論

第三款 凡觀此書者必先明變數與函數變比例之限如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小若其外切多等邊形之邊愈多則其面積愈近于平圓之面積 所以可設平圓之面積爲任何小而切其圓外爲多等邊形可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積 再設其多等邊形之面積爲級數而其邊之變率可每變多若干倍則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲其限 雖切于圓外之多等邊形其邊任變至若何多其面積總不能等于平圓之面積然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微其較數之小可小至莫可名言

若用此法于圓內容多等邊形則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限

總言之凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限

如代數術第二百六十六款言如令甲代平圓之任何弧則 $\frac{正弦甲}{甲}$ 恆大于半徑而 $\frac{正切甲}{甲}$ 恆小于半徑然合其弧爲任何小則其式之同數必甚近于半徑而其所差之數可小至不能以言語形容所以此兩數中間之數爲一(即半徑也)故其公限亦爲一

由此可見凡弧與弦切三者之中任取其二以相較其比例之限必相等

如代數術中亦曾證甲弧爲 $\frac{卯\,\text{正切}\,甲}{甲^{卯}}$ 與 $\frac{卯\,\text{正弦}\,甲}{甲^{卯}}$ 兩式之限惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例 $一+天+天^{二}+天^{三}+\cdots+天^{卯-一}$ 卽 $\frac{一-天^{卯}}{一-天}$ 若天變至小于一而卯大至無窮則 $天^{卯}=〇$ 而式變爲 $\frac{一}{一-天}$。所以任取其級數若干項之和必小于 $\frac{一}{一-天}$。惟其項愈多則與 $\frac{一}{一-天}$ 愈相近而其所差之數可小至莫可名言則可見 $\frac{一}{一-天}$ 必爲其諸級總數之限。

若依二項例之式 $\left(一+\frac{天}{卯}\right)^{卯}=一+天+\frac{\left(一-\frac{一}{卯}\right)天^{二}}{一\cdot二}+\frac{\left(一-\frac{一}{卯}\right)\left(一-\frac{二}{卯}\right)天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$ 其卯之同數無論如何必合于理惟卯若爲大數則其各項之乘數 $一-\frac{一}{卯}$、$一-\frac{二}{卯}$ 之類與一相較之差甚小若卯愈大則其差愈微。若令卯爲任何大則各乘數可略等于一所以得 $\left(一+\frac{天}{卯}\right)^{卯}=一+天+\frac{天^{二}}{一\cdot二}+\frac{天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$ （甲）。曾在代數術第一百七十七款中證（甲）式之右邊爲由函數 $戊^{天}$ 而成其戊之同數爲 $一+一+\frac{一}{一\cdot二}+\frac{一}{一\cdot二\cdot三}+\cdots=二\cdot七一八二八一八$ 卽訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則 $\left(一+\frac{天}{卯}\right)^{卯}$ 必愈與 $戊^{天}$ 相近而其限爲 $戊^{天}$。

如令 $天=一$ 則 $\left(一+\frac{一}{卯}\right)^{卯}$ 之限爲戊卽 $\left(一+\frac{一}{卯}\right)^{卯}=戊=二\cdot七一八二八一八$ 故其函數爲常數

第四款　惟因函數之同數本從變數而生故變數之同

數變則函數之同數亦必因之而變。設天爲自變之數，戌爲函數，而 $戌=天^{2}$。若令天之變大之數爲辛，則天變至 $天+辛$ 之時，其函數戌亦必因此變大。若以 $戌'$ 代其函數之新同數，則 $戌'=(天+辛)^{2}=天^{2}+二天辛+辛^{2}$，即 $戌'=戌+二天辛+辛^{2}$，而 $戌'-戌=二天辛+辛^{2}$。故可見天之長數若爲辛，則戌之長數必爲 $戌'-戌$，即 $二天辛+辛^{2}$。若以天之長數與函數之長數比，則爲 $\frac{戌'-戌}{辛}=二天+辛$。

設函數之式爲 $戌=天^{3}$，令天之長數爲辛，而以函數之新同數爲 $戌'$，則

$$戌'=(天+辛)^{3}\begin{cases}=天^{3}+三天^{2}辛+三天辛^{2}+辛^{3}\\=戌+三天^{2}辛+三天辛^{2}+辛^{3}\end{cases}$$

而 $\frac{戌'-戌}{辛}=三天^{2}+三天辛+辛^{2}$。可見天變爲 $天+辛$ 之時，其函數戌必變爲 $戌+三天^{2}辛+三天辛^{2}+辛^{3}$，其所長之數爲 $三天^{2}辛+三天辛^{2}+辛^{3}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲 $三天^{2}+三天辛+辛^{2}$，其初項 $三天^{2}$ 與天之長數辛無相關。

設函數之式爲 $戌=天^{4}$，令天之長數爲辛，而以 $戌'$ 爲函數之新同數，則 $戌'=戌+四天^{3}辛+六天^{2}辛^{2}+四天辛^{3}+辛^{4}$，而 $\frac{戌'-戌}{辛}=四天^{3}+六天^{2}辛+四天辛^{2}+辛^{3}$。

由此可見天若變爲 $天+辛$，則其各函數之新同數如左：

如 $戌=天^{2}$，則 $戌'=戌+二天辛+辛^{2}$。

如 $戌=天^{3}$，則 $戌'=戌+三天^{2}辛+三天辛^{2}+辛^{3}$。

如 $戌=天^{4}$，則 $戌'=戌+四天^{3}辛+六天^{2}辛^{2}+四天辛^{3}+辛^{4}$。

其餘類推。

總言之若以卯爲天之任何整指數而令天之長數爲辛又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數則函數 $戌=天^{卯}$ 之新同數必爲 $戌'=戌\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp申辛^{四}\perp\cdots\cdots$ 由是知函數之新同數必爲級數其初項戌爲函數之原同數其餘各項爲天之長數辛之各整方以巳午未申之類爲各倍數其各倍數皆爲天之別種函數其式亦從本函數而生

由以上各式又可見函數爲 $戌=天^{二}$ $戌=天^{三}$ $戌=天^{四}$ 之類則其變數與函數之變比例必爲

$$\frac{辛}{戌'\top戌}=二天\perp辛$$

$$\frac{辛}{戌'\top戌}=三天^{二}\perp三天辛\perp辛^{二}$$

$$\frac{辛}{戌'\top戌}=四天^{三}\perp六天^{二}辛\perp四天辛^{二}\perp辛^{三}$$

之類總之若以卯爲天之整指數則 $戌=天^{卯}$ 之變比例必爲

$$\frac{辛}{戌'\top戌}=巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$$

由此可見變數天之長數與函數 $戌=天^{卯}$ 之長數其變比例 $\frac{辛}{戌'\top戌}$ 之同數 $巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$ 可分之爲兩式 其一式爲 巳 此式與天之長數辛無相關 又一式爲 $午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$ 即 $辛(午\perp未辛\perp申辛^{二}\perp\cdots\cdots)$ 此式因以辛爲乘數故辛若變小其數亦必隨辛而變小如令辛爲任何小則此式之數可小至甚近于〇故此數可以不計而以巳爲變比例之限

設有繁函數之式 $戌=甲\perp乙天\perp丙天^{二}$ 令天之長數爲辛則天變爲 $天\perp辛$ 之時其函數之同數必變爲

$$戌'\begin{cases}=甲\perp乙(天\perp辛)\perp丙(天\perp辛)^{二}\\=甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}\end{cases}$$

故

$$戌'\top戌=(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}$$

而

$$\frac{辛}{戌'\top戌}=乙\perp二丙天\perp丙辛$$

其 $乙\perp二丙天$ 爲本函數變比例之限

以此法徧試各種時設之函數見其皆有相類之性情所以設例如左

例曰命任何自主之變數為天而令天之任何函數等于戊則天變為$天+辛$之時函數之新同數為$戊'=戊+巳辛+午辛^{2}+未辛^{3}+\cdots\cdots$其變數與函數之變比例為$\frac{戊'-戊}{辛}=巳+午辛+未辛^{2}+申辛^{3}+\cdots\cdots$此式中之初項巳為變比例之限

無論何種函數其限皆可依此例求之

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理可于算學中開出兩種極廣大極精微之法

其第一種為有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限

其第二種為有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式

此兩種法若細致其根源即奈端所謂正流數反流數也亦即來本之所謂微分算術積分算術也又即拉果闌諸所謂函數變例也

論各種函數求微分之公法

第五款

若函數之式為$戊=天^{二}$令天變為$天+辛$則函數之新同數必為$戊'=戊+二天辛+辛^{二}$其與原同數之較為$戊'-戊$即$二天辛+辛^{二}$此式之初項$二天辛$名之曰溢率

依同理推之若函數之式為$戊=天^{三}$令天變為$天+辛$則函數之新同數為$戊'=戊+三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$其與原同數之較為$戊'-戊$即$三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$其初項$三天^{二}辛$為溢率

若函數之式為$戊=天^{四}$而天變為$天+辛$則函數之新同數與原同數之較為$四天^{三}辛+六天^{二}辛^{二}+四天辛^{三}+辛^{四}$而其溢率為$四天^{三}辛$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

總言之凡天之函數無論為某方恆可以$天丄辛$代其天而變其函數之同數為$戊丄巳辛丄午辛^{2}丄未辛^{3}丄\cdots\cdots$乃以原同數戊減之得$巳辛丄午辛^{2}丄未辛^{3}丄\cdots\cdots$而取其初項$巳辛$為滋率

準此推之則知天之滋率即為其長數辛惟因函數之滋率每藉天之長數而生故微分術中恆以$彳天$代天之滋率其彳號者非天之倍數不過謂是天之滋率耳滋率之名本為流數術中所用而彳號者即微字之偏旁故微分之術用之

如有式$戊=天^{2}$則$彳戊=二天彳天$此式之意謂戊之微分等于$二天$乘天之微分猶言函數戊之滋率等于以$二天$乘其天之滋率也

如有式$戊=天^{3}$則$彳戊=三天^{2}彳天$此式之意謂戊之微分等于$三天^{2}$乘天之微分猶言函數戊之滋率等于以$三天^{2}$乘其天之滋率也

第六款

惟因每遇$戊=天^{2}$則$彳戊=二天彳天$所以可寫之如$\frac{彳戊}{彳天}=二天$此為天微分之倍數亦謂之微係數

又依前法推之如函數之式為$戊=天^{3}$則$彳戊=三天^{2}彳天$而$\frac{彳戊}{彳天}=三天^{2}$其$三天^{2}$為原函數$戊=天^{3}$之微係數

總言之無論何種函數之微係數皆可以$\frac{彳戊}{彳天}$代之而函數之新同數為$戊丄巳辛丄午辛^{2}丄\cdots\cdots$所以$\frac{彳戊}{彳天}=巳$其巳為天之他函數其形每隨函數之式而變如知戊之同數為何式則其巳之同數即易求得

凡函數之欲求微分者先于其式之左旁作一彳號以記之　如有$(甲丄天)(乙丄天)$式欲求其微分則可先作$彳(甲丄天)(乙丄天)$

凡函數之欲求微係數者于其式之左旁作彳號又以$彳天$為其分母　如有$(甲丄天)(乙丄天)$式欲求其微係數則作$\frac{彳(甲丄天)(乙丄天)}{彳天}$

從以上各款諸說易知求微分之公法

法曰無論天之任何函數欲求微分則以$天丄辛$代其原式

中之天而詳之依辛之整方數自小而大序之取其初有辛之項而以$彳天$代其辛即得

如有式$戊=甲天+乙天^2$欲求其微係數則以$天+辛$代其天而令函數之新同數為$戊'$則得

$$戊'\begin{cases}=甲(天+辛)+乙(天+辛)^2\\=甲天+乙天^2+(甲+二乙天)辛+乙辛^2\\=戊+(甲+二乙天)辛+乙辛^2\end{cases}$$

取其初有辛之項$(甲+二乙天)辛$以$彳天$代其辛即得$彳戊=(甲+二乙天)彳天$故其$\frac{彳戊}{彳天}=甲+二乙天$

第七款　上款之法必令天變為$天+辛$而詳其函數之同數為級數此乃論其立法之理當如是也惟求得級數之後所用者僅為其辛一方之項則但能求得此項已足用矣前于第四款中言此項之倍數為變數與函數變比限之限又于第六款中言此項之倍數謂之微係數然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限其法本無異也

如有式$戊=\frac{天^2}{甲}$則$戊'=\frac{(天+辛)^2}{甲}$而$戊'-戊=\frac{(天+辛)^2}{甲}-\frac{天^2}{甲}$即$戊'-戊=\frac{辛(二天+辛)}{甲}$故其變比例之式為$\frac{戊'-戊}{辛}=\frac{二天+辛}{甲}$惟此式可不待詳為級數而始得其變比例之限因可見辛愈小則其式愈近于$\frac{二天}{甲}$故此式必即為$\frac{彳戊}{彳天}$之同數所以得$彳戊=\frac{二天}{甲}彳天$

若以戊為任何函數之原同數而以$天+辛$代其天則其函數之新同數為$戊'=戊+己辛+庚辛^2+未辛^3+\cdots\cdots$即得$\frac{戊'-戊}{辛}=己+庚辛+未辛^2+\cdots\cdots$惟因$\frac{戊'-戊}{辛}$之限為己故得$\frac{彳戊}{彳天}=己$而$彳戊=己彳天$

由此得一解曰凡微分之術其意專為求任何變數與函數同時變大之限耳

凡求任何函數之微分不過將一尋常之代數式另用他法以變化之因其變化之法與代數中常用之法異

則不得不另有一名以別之故謂之微分術。

第八款 凡變數與函數變比例之限無論以何數為主其形必同。

如戊為天之函數若天變為$天+辛$則戊變為$戊+己辛+午辛^{2}+未辛^{3}+\cdots$其己午未各數俱為天之他函數從本函數所生。如令其$己辛+午辛^{2}+未辛^{3}+\cdots=子$則天與戊同時變大之數為辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數則得$辛=\frac{1}{己}子-\frac{午}{己^{3}}子^{2}+\cdots$故其變數與函數之公比例為$\frac{辛}{子}=\frac{1}{己}-\frac{午}{己^{3}}子+\cdots$故$\frac{辛}{子}$之限為$\frac{1}{己}$而$\frac{子}{辛}$之限為己。此即$\frac{1}{己}$也。

第九款 由此易知凡有相等之函數則其微係數亦必相等。

如戊與亥為兩函數而$戊=亥$其天變為$天+辛$之時戊變為戌亥變為亥則$戌=亥$而$戌-戊=亥-亥$故$\frac{戌-戊}{辛}=\frac{亥-亥}{辛}$如以己與午各為其變比例之限則$己=午$故$己彳天=午彳天$而$彳戊=彳亥$

由此可見凡函數之式無論如何改形若其同數無異者則其微係數必同。

如函數之原式為$天+甲$若改其形為$(天+甲)(天-甲)\div(天-甲)$則此式之微係數與原式之微係數必無異

惟此理若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生則不盡然。

如函數之式為$戊=甲+乙天$令天變為$天+辛$而戊變為戌則$戌=甲+乙天+乙辛$故得$\frac{戌-戊}{辛}=乙$觀此可知其常數之項甲不能入變比例之限內故其微係數必與$戊=乙天$之微係數無異惟微係數乙既能

屬于本函數 $甲+乙天$ 又能屬于他函數 $乙天$ 所以有下例

例曰凡變數與常數相加減之函數其微係數中不見其加減之常數惟變數與常數相乘除者則其微係數中有常數爲倍數

求兩函數相乘積之微分

第十款 凡變數之函數無論其形如何皆可以第六款之公法求其微分然不如每種異形之函數各設一專法以求之則更簡捷

如有式 $戌=未申$ 其未與申各爲天之函數今欲得一法專能求未申相乘積之微分若令天變爲 $天+辛$ 則未申二函數必變爲

$$未'=未+巳辛+午辛^2+\cdots$$

$$申'=申+巳'辛+午'辛^2+\cdots$$

其巳午爲由未函數所得之天之他函數其巳′午′爲由申函數所得之天之他函數

再令 $戌'=未'申'$ 則依法得

$$戌'=未'申'=未申+(未巳'+申巳)辛+(未午'+巳巳'+申午)辛^2+\cdots$$

以戌代其未申移項而以辛約之則得

$$\frac{戌'-戌}{辛}=未巳'+申巳+(未午'+巳巳'+申午)辛+\cdots$$

此式中之 $未巳'$ 與 $申巳$ 兩項乃天之他函數而與辛無涉者其餘各項俱有辛之各方爲乘數設辛爲甚微則其所乘之衆項亦甚微故其變比例之限爲 $\frac{戌'-戌}{辛}=未巳'+申巳$ 惟因 $巳=\frac{未'-未}{辛}$ $巳'=\frac{申'-申}{辛}$ 故可依第六款之法以 $\frac{彳戌}{彳天}$ 代其 $\frac{戌'-戌}{辛}$ 以 $\frac{彳未}{彳天}$ 代其 $\frac{未'-未}{辛}$ 以 $\frac{彳申}{彳天}$ 代其 $\frac{申'-申}{辛}$ 則得 $\frac{彳戌}{彳天}=未\frac{彳申}{彳天}+申\frac{彳未}{彳天}$ 而 $彳戌=未彳申+申彳未$ 故得專法如左

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分法將此函數乘

彼函數之微分又將彼函數乘此函數之微分而以乘得之兩式相加即得

求多函數連乘積之微分

第十一款

前款論函數之式爲 $戊=未申$ 則 $彳戊=申彳未⊥未彳申$ 所以 $\frac{彳戊}{戊}=\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳申}{申}$ 由此推之如戊爲三箇同變數之函數連乘如 $未酉亥$ 可令其 $申=酉亥$ 則亦能爲 $戊=未申$ 而 $\frac{彳戊}{戊}=\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳申}{申}$ 惟因 $申=酉亥$ 可依同例得 $\frac{彳申}{申}=\frac{彳酉}{酉}⊥\frac{彳亥}{亥}$ 所以 $\frac{彳戊}{戊}=\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳酉}{酉}⊥\frac{彳亥}{亥}$ 若仍將 $未申$ 代還其戊而以常法化之則爲 $彳戊=酉亥彳未⊥未亥彳酉⊥未酉彳亥$ 故得專法如左

凡求同變數之若干函數連乘積之微分法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘而以各乘得之式相加即得

此法易用一總式以明之無論其同變數之函數有若干數連乘皆可以一例推之

如多函數連乘之式爲 $未申酉亥$ 則其微分之式爲

$$彳(未申酉亥)=未申酉亥\left(\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳申}{申}⊥\frac{彳酉}{酉}⊥\frac{彳亥}{亥}\right)$$

求變數之分函數微分

第十二款

若有分數之式其母子爲同變數之各函數則欲得其求微分之專法可令 $戊=\frac{未}{申}$ 則 $未=戊申$ 而 $彳未=戊彳申⊥申彳戊$ 乃以其戊之同數 $\frac{未}{申}$ 代其戊則 $彳未=\frac{未彳申}{申}⊥申彳戊$ 而 $彳戊=\frac{申彳未丅未彳申}{申^{二}}$ 故得專法如左

凡同變數之函數若爲分數則求微分之法可將分母乘其分子之微分乃以分子乘分母之微分減之而以分母之平方約之

此法亦可用一總式以明之

惟因 $戌=\frac{申}{未}$ 之微分為 $\frac{戌}{彳戌}=-\frac{未}{彳未}+\frac{申}{彳申}$ 所以 $戌=\frac{玄地}{未申酉}$ 之微分為 $\frac{戌}{彳戌}=-\frac{未}{彳未}-\frac{申}{彳申}-\frac{酉}{彳酉}+\frac{玄}{彳玄}+\frac{地}{彳地}$ 由此推之則 $戌=\frac{玄地}{未申酉}$ 之微分當為 $\frac{戌}{彳戌}=-\frac{未申酉}{彳(未申酉)}+\frac{玄地}{彳(玄地)}$ 又依第十一款之例其 $\frac{未申酉}{彳(未申酉)}=\frac{未}{彳未}+\frac{申}{彳申}+\frac{酉}{彳酉}$ 而 $\frac{玄地}{彳(玄地)}=\frac{玄}{彳玄}+\frac{地}{彳地}$ 故得 $\frac{戌}{彳戌}=-\frac{未}{彳未}-\frac{申}{彳申}-\frac{酉}{彳酉}+\frac{玄}{彳玄}+\frac{地}{彳地}$ 由是知若有分數之函數其分母分子為任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{玄地}{未申酉}$ 者可以 $彳\left(\frac{玄地}{未申酉}\right)=\frac{玄地}{未申酉}\left[-\frac{未}{彳未}-\frac{申}{彳申}-\frac{酉}{彳酉}+\frac{玄}{彳玄}+\frac{地}{彳地}\right]$ 之式明之。

求變數諸乘方之微分

第十三款　茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法（其地或為自變之數或為他變數之函數皆可）

先設 $戌=地^{卯}$ 其卯為任何整數則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $戌=地\cdot地\cdot地\cdot地\cdots\cdots$ 則依第十一款之例 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{地}{彳地}+\frac{地}{彳地}+\frac{地}{彳地}\cdots\cdots$ 其項必有卯數 故即 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{地}{卯彳地}$ 而得 $彳戌=\frac{地}{卯彳地}戌=卯地^{卯-一}彳地$

設函數為分指數如 $戌=地^{\frac{卯}{寅}}$ 則 $戌^{卯}=地^{寅}$ 若依第九款之例則得 $卯戌^{卯-一}彳戌=寅地^{寅-一}彳地$ 而 $彳戌=\frac{卯}{寅}\times\frac{戌^{卯-一}}{地^{寅-一}}彳地$ 惟因 $戌=地^{\frac{卯}{寅}}$ $戌^{卯-一}=地^{\frac{卯}{寅(卯-一)}}$ 所以 $\frac{戌^{卯-一}}{地^{卯-一}}=地^{\frac{卯}{寅}-一}$ 而 $彳戌=\frac{卯}{寅}地^{\frac{卯}{寅}-一}彳地$

再設卯為負指數無論為整數為分數則 $戌=地^{-卯}$ 即 $戌=\frac{地^{卯}}{一}$ 若依第十二款之例因其分子為常數故其分子之微分當

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook