CENTURY 21

高等学校研究生教材

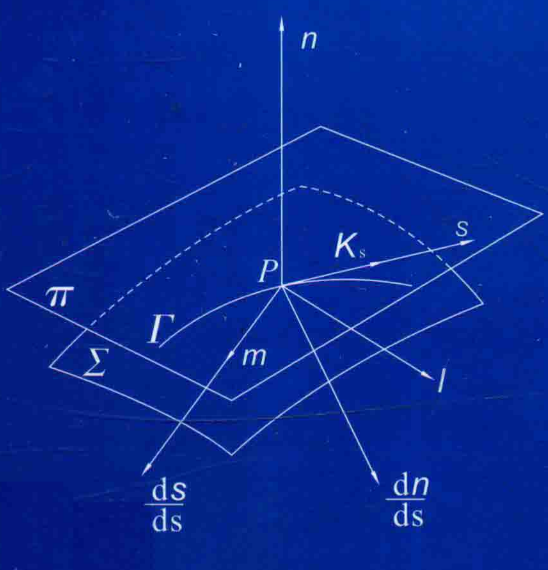
基础数学系列

张量分析

（修订版）

Tensor Analysis

田宗若 编著



$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{mn}\frac{dx^m}{ds}\cdot\frac{dx^n}{ds}=0$$

$k=1，2，\cdots，n$

西北工業大學出版社

高等学校研究生教材

ZHANGLIANG FENXI

张量分析

（修订版）

田宗若　编著

西北工业大学出版社

内容简介

本书内容包括：第一章张量及张量代数，介绍了仿射空间和仿射坐标系，研究了张量代数的性质；第二章张量分析，讨论了曲线坐标系的张量，研究了 Riemann 空间的张量微积分及 Riemann-Christoffel 曲率张量等；第三章曲面张量，讨论了曲面张量的微分和导数、测地线、半测地线及 S-族坐标系等；第四章张量的应用。

本书可作为理工科硕士、博士研究生相关基础数学课程的教材及广大科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

张量分析/田宗若编著．—2 版（修订本）．—西安：西北工业大学出版社，2016.3

ISBN 978-7-5612-4743-3

Ⅰ．①张…　Ⅱ．①田…　Ⅲ．①张量分析　Ⅳ．①O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 038469 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：029-88493844
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：727 mm×960 mm　1/16
印　　张：11.5
字　　数：165 千字
版　　次：2005 年 9 月第 1 版　2016 年 3 月第 2 版第 1 次印刷
定　　价：30.00 元

第 2 版前言

从出版社得知，本书第 1 版已售完。这说明此书除了我讲课使用外，还有不少读者对这门重要的基础数学很重视，我很高兴。在本书出版 10 年后，再重新审视它，觉得还有不足之处，决心对其进行修订完善。

随着 21 世纪复合材料被广泛应用，如复合材料在空客 A380 中的使用占 25%，在波音 B787 中的使用已占到 50%左右，这其中许多有关强度等问题的研究均属于数学、力学交叉前沿基础学科的研究。因此，张量分析是不可或缺的重要基础数学之一。因为张量分析在许多基础研究中，将逻辑过程可转变为积分方程及代数方程的运算。

田宗若

2015 年 11 月

第 1 版前言

本书是笔者在已使用 20 多年的讲义(《张量分析》上，下册，田宗若编著(1982))的基础上修订而成的，该讲义在 1982—2004 年期间印刷过三次。从 1982 年至今，笔者一直用上述讲义给西北工业大学硕士、博士研究生讲授本课程，并以此书给外校讲学，一贯受到普遍好评。

张量分析是用来研究固体力学、流体力学、几何学及电磁场理论等领域的一种有力的数学工具。特别是 Einstein 研究相对论时，发现张量分析在理论物理中占有显著位置。

当今，如果你对张量知识没有一定的通晓，也就不可能阅读许多有关的文献及著作。

应用张量分析，不改变物理、力学问题的本质，但将会使物理概念更明确，方程由复杂变得更清晰，且在任何坐标系下具有不变性，并有可能对诸多领域的问题开展进一步探讨、研究。

自 20 世纪 80 年代以来，笔者一直从事复合材料强度的数学、力学方法的研究，在这些复杂的研究中提出并发展了自己的独特思路，并在张量分析的基础上再结合多种数学方法，同时在所提出的"Equivalent Space"概念基础上，对以上研究取得了独特的系列的成果。

本课程对于应用数学、固体力学、流体力学、应用物理及控制、机电等领域的硕士、博士研究生是必要的、不可或缺的重要基础数学课程。

田宗若

2005 年 9 月

目　　录

第一章　张量及张量代数

本章的目的，是介绍 n 维仿射空间中的张量概念及其代数运算，特别是介绍仿射空间特例的欧氏（Euclid）空间中的张量及代数运算式。

我们这里是从一组独立的公理体系而导出仿射空间的概念，进而建立任意 n 维仿射空间的代数结构。Euclid 空间是作为仿射空间的特例而被引入的。

下面所介绍的公理体系仅仅是为了说明在 n 维仿射空间中，可类似于普通向量代数，运用点和向量的概念。

1.1　仿 射 空 间

仿射空间是点和向量的集合，点和向量是基本概念，不必用逻辑法再定义，其性质已被列入公理而确定。

满足以下公理 1°～10°的点和向量所构成的集合，称为 n 维仿射空间。

我们讨论一个点和向量的集合，它满足下列公理：

1°　至少存在一个点。

2°　在给定的一对有顺序的点 A 和 B，对应一个且仅对应一个向量。

公理 2°中的向量，通常记为$\overrightarrow{AB}$，向量可记为 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{a}$ 等。

3°　对任一点 A 及任一向量 $\boldsymbol{x}$，存在唯一的一个点 B，使得

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$$

4° 平行四边形公理：若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$。

在一定意义下，以上四个公理是完善的，它可以建立向量的加法、减法等。

下面，我们引用上述公理导出的几个定理。

定理 对任意两点 A,B，有

$$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$$

定义 向量$\overrightarrow{AA}$称为零向量，记为 $\mathbf{0}$。

对任一点 M，有唯一的方法作向量$\overrightarrow{MM}$(公理 3°)，使$\overrightarrow{MM}=\mathbf{0}$。

定理 若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$。

定义 向量$\overrightarrow{BA}$称为向量$\overrightarrow{AB}$的逆向量。

向量$-\boldsymbol{x}$称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的逆向量。

定理 任一向量 $\boldsymbol{x}$，存在唯一的逆向量$-\boldsymbol{x}$。

定义 在一定顺序下，若给定了向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，任选一点 A，从 A 点作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$，再从 B 点作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{y}$(公理 3°)，则点 A 和点 C 决定一个向量$\overrightarrow{AC}$(公理 2°)，$\overrightarrow{AC}$称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和，即

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\overrightarrow{AC}$$

或
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

定理 向量 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 不依赖于点 A 的选择，而且向量加法是一个单值运算。

定理 向量加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$$

定理 向量加法满足结合律，即

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$$

由加法运算可推出：

$$\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

实际上，设向量 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$，而向量 $\mathbf{0}=\overrightarrow{BB}$。

因为
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$$

所以 $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$，又由于 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$，则

$$-\boldsymbol{x}=\overrightarrow{BA}$$

而 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$，因而

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

定义　对于向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，若存在 $\boldsymbol{z}$，使得

$$\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$$

则称 $\boldsymbol{z}$ 为 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$。

定理　减法是恒可作的单值运算。

根据以上讨论，可知向量的加法和普通的向量代数一样，具有全部有关加法的性质。

但仅前面的四个公理，还不足以建立完备的系统。下面的公理，将建立向量和数量之间的乘法运算。

5°　与任一向量 $\boldsymbol{x}$ 和任一数 α 对应的一个定向量，称为 $\boldsymbol{x}$ 与 α 的乘积，记作 $\alpha\boldsymbol{x}$。

6°　$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

7°　$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$

8°　$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$

9°　$\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$

公理 7°～9°中，α,β 均表示数。

也可得到：

$$0\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\quad \alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}(\alpha\ 为任意数)$$

在上述公理及推论的基础上，即可按通常的法则对向量进行加法和向量与数的乘法运算。

下面再引进维数公理。

定义　给定任意 m 个向量，如存在 m 个不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m=\mathbf{0}$$

成立，则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是线性相关的。

当以上各向量线性相关时，其中必有一向量可用其余向量的线性组合来表示；也可以说，若某个向量能用其余向量线性组合表示时，则这些向量必定是线性相关的。

因此，各向量线性独立时，其中没有一个向量可由其余向量表示，那么，全部向量均为独立。

10° **维数公理**：当存在 n 个线性独立的向量时，任意 $n+1$ 个向量是线性相关的。

当 $n=0$ 时，只有一个点和一个向量 $\mathbf{0}$，所以通常总是设 $n>0$。

定义 满足公理 1°～10°的点和向量所构成的集合，称为 n 维仿射空间。

1.2 仿射坐标系(斜角坐标系)

1. n 维仿射坐标系与空间的几何性质有关

根据维数公理，设 n 维空间中，仿射坐标系由 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 确定，仿射空间中任意向量 $\boldsymbol{x}$，由于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性相关，则

$$\alpha\boldsymbol{x}+\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$$

若 $\alpha=0$，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 不全为零，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 则线性相关，这与原来所设矛盾。

所以，只有 $\alpha\neq0$，则有

$$\boldsymbol{x}=\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n$$

或
$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

改写为
$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n \tag{1.1}$$

因此，n 维仿射空间中任一向量，可用 n 个独立向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的线性组合来表示。而任意一点 o 和 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\cdots\boldsymbol{e}_n$ 组成一个

仿射标架，由(1.1)式可知，任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可在仿射标架中展开，系数 $x^i(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 称为 n 维空间的向量 $\boldsymbol{x}$ 对于已知标架的仿射标架。

注意：仿射标架的选择可以有无限多种，而任意向量 $\boldsymbol{x}$ 表示成为按确定的仿射标架的线性组合，其系数即被唯一确定。

若此种表示不是唯一的，如有

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n=\tilde{x}^1\boldsymbol{e}_2+\tilde{x}^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\tilde{x}^n\boldsymbol{e}_n$$

则

$$(x^1-\tilde{x}^1)\boldsymbol{e}_1+\cdots+(x^n-\tilde{x}^n)\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{e}_i$ 线性独立，可得

$$x^i-\tilde{x}^i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

反之，任意 n 个数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 均可按(1.1)式组成一个向量，所以，向量 $\boldsymbol{x}$ 和其坐标 x^i 之间具有一一对应的关系。而零向量对应的仿射坐标全等于零。

运用向量坐标后，向量的代数运算，可以转化为其坐标之间的代数运算。

向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的和可计算为

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{y}=y^1\boldsymbol{e}_1+y^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+y^n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x^1+y^1)\boldsymbol{e}_1+(x^2+y^2)\boldsymbol{e}_2+\cdots+(x^n+y^n)\boldsymbol{e}_n$$

即两个向量之和的坐标，等于这些向量的对应坐标相加。

向量和数之间的乘法运算，就是将向量的每个坐标乘上这个数，即

$$\alpha\boldsymbol{x}=\alpha x^1\boldsymbol{e}_1+\alpha x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\alpha x^n\boldsymbol{e}_n$$

设有 n 个问题：

$$x_1 = x_1^1 e_1 + \cdots + x_1^n e_n$$

$$x_2 = x_2^1 e_1 + \cdots + x_2^n e_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_m = x_m^1 e_1 + \cdots + x_m^n e_n$$

这些向量的线性组合为

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

向量 x 的坐标为

$$x^i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \cdots + \alpha_m x_m^i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2}$$

向量 x 的坐标，即为下列矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

中各列诸元素的线性组合，即(1.2)式。

如果 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 之间为线性相关，那么，一定可以找到一组不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，使得 $x = 0$，也就是 x 的全部坐标 $x^i = 0$，这时矩阵(1.3)式中各列元素之间的线性组合为零，也就是说，矩阵各行之间是线性相关的。

矩阵(1.3)式各行之间线性相关是向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性相关的必要而充分的条件。

上面讨论了 n 维仿射空间中向量和坐标的表示法。

2. 三维Euclid 空间 E_3 中向量的表示法

令在 $\mathbf{E}_3$ 中，仿射坐标系由三个非共面的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$（不失一般性，今后均采用右手系）确定。

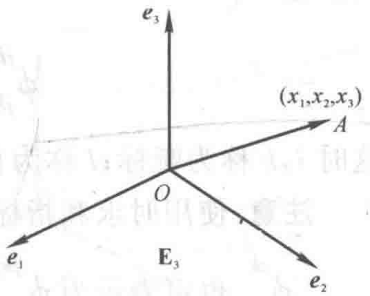


图　1－1

任意向量 $\boldsymbol{x}$ 可表示为这三个向量的线性组合，即

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

向量 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{x}$ 对应着一组有序的数，(x_1, x_2, x_3) 即为 A 点的坐标（见图 1－1）。

3. Einstein 规约(求和约定)

今后，我们总是不加声明地使用 Einstein 求和约定，为了引用 Einstein 求和约定，将坐标 x_i 的下标移为上标 x^i，即

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\boldsymbol{e}_i \xrightarrow{\text{Einstein 规约}} x^i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i \quad (i=1,2,3) \tag{1.4}$$

重复的求和指标为哑标。

如果一个式子中包含有相同的上下指标，则表示这些指标跑遍 $1,2,3,\cdots,n$ 各值，再将这些同类式子相加得到的总和，即

$$a^1b_1 + a^2b_2 + \cdots + a^nb_n = \sum_{i=1}^{n} a^ib_i = a^ib_i$$

当上、下指标有好几对时，则表示对每对上、下指标作上述求和。如

$$\phi_{ikl}^{ik}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_{ikl}^{ik}$$

这时 i,k 称为哑标；l 称为自由标。

注意:使用时求和指标的记号是无关紧要的，例如：

ϕ_{ikl}^{ik}也可表示为ϕ_{pql}^{pq}，这时 p,q 为一组哑标，用来代替 i,k；其结果不变，即

$$\phi_{ikl}^{ik}=\phi_{pql}^{pq}\quad（自由指标不能更换）$$

4. 点的坐标表示法

令 M 为仿射空间内任一点，和该点唯一对应的有一向量$\overrightarrow{OM}$，O 是标架原点，$\overrightarrow{OM}$为已知点 M 的向径，$\overrightarrow{OM}$对应于仿射标架的坐标为

$$x^{i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\overrightarrow{OM}=x^{1}\boldsymbol{e}_{1}+x^{2}\boldsymbol{e}_{2}+\cdots+x^{n}\boldsymbol{e}_{n}\tag{1.5}$$

称为点 M 关于这个仿射标架的仿射坐标。

因此，若已知一个点，则按(1.5)式可唯一确定它的仿射坐标；相反，若已知一组坐标，则可按(1.5)式得到一向量，再从原点作这一向量，即可唯一决定一点 M。

因而，给出一个标架，即可建立坐标与向量、坐标与点之间一一对应的关系。

1.3 仿射标架的变换

从前面的讨论中，一定会产生这样的问题：对仿射标架的选择可以任意到怎样的程度？当从一个标架变换到另一标架时，会产生

怎样的问题？本节中，我们将研究标架变换的问题。

两个仿射坐标如图 1 - 2 所示。

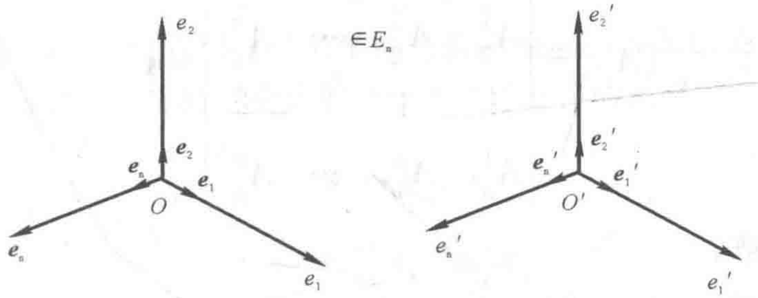


图　1 - 2

$$\left.\begin{array}{l} e_1, e_2, \cdots, e_n \\ e_{1'}, e_{2'}, \cdots, e_{n'} \end{array}\right\}$$之间有什么关系？

1. **用旧坐标表示新坐标系**

e_i，　$i=1,2,\cdots,n$，旧坐标系；

$e_{i'}$，　$i'=1',2',\cdots,n'$，新坐标系；

则

$$e_{i'} = A_{i'}^{i} e_i \quad (i'=1',\cdots,n') \tag{1.6}$$

$$\begin{bmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ \vdots \\ e_{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1'}^{1} & A_{1'}^{2} & \cdots & A_{1'}^{n} \\ A_{2'}^{1} & A_{2'}^{2} & \cdots & A_{2'}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n'}^{1} & A_{n'}^{2} & \cdots & A_{n'}^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

e'线性独立的充分必要条件是(1.6)式的系数矩阵