21世纪高等学校规划教材

主编　秦万广

Daxue Wuli Xuexi Zhidao

大学物理学习指导

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

大学物理学习指导

主　编　　秦万广

副主编　　韩雪英　姜立南

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 提 要

本书是东北电力大学物理教学部教师根据2004年教育部颁发的“非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求”,结合多年的教学实践经验而编写的学习指导.从质点运动学到光学,共分13章,共荟萃了各类典型习题300多个,在难易程度上有层次性.本书综合了国内著名教材、习题集以及部分重点院校的试题,富有代表性和典型性.

本书的解题过程着重分析、启发和引导学生,以培养和锻炼学生自我分析问题和解决问题的能力,重视学生学习方法的改进,使学生形成良好的学习习惯.

本书可供普通高等教育理工科院校讲授和学习大学物理课程的师生使用,也可供高职高专相关专业师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/秦万广主编. —北京:北京邮电大学出版社,2010.1

ISBN 978-7-5635-2122-7

Ⅰ.①大… Ⅱ.①秦… Ⅲ.①物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第208740号

书　　名	大学物理学习指导
主　　编	秦万广
责任编辑	沙一飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	16
字　　数	326千字
版　　次	2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2122-7　　定价:24.00元

前　言

物理学是理工科院校本科教学中一门重要的基础课，对培养和提高学生的科学素质起着不可替代的作用. 理工科学生必须打好物理学基础，才有可能在以后的专业课学习及科研新领域开拓工作中取得较高的成就. 而要想学好物理学课程，做习题是一个重要的环节.

关于习题在学习物理学中的重要性，我国著名物理学家严济慈先生曾有这样一段话："做习题可以加深理解，融会贯通，锻炼思考问题和解决问题的能力."

通过做习题，可以帮助学生了解物理学中的每个细节及其奥妙；帮助学生加深对物理学的基本概念、基本规律和基本方法的理解和掌握；有助于培养学生学会用科学的思想方法分析和解决实际问题的能力；能够巩固所学知识，加深对教学内容的理解，启发学生的思维，培养解题的技巧和能力.

这本《大学物理学习指导》是根据秦万广主编的《大学物理》(第1版)教材的习题而作的全解，并加入了一些新颖的习题. 在习题指导中，根据长期教学实践的经验和体会，作者归纳和总结了求解大学物理习题的解题思路、解题方法和多种解题技巧；并着重指出各章习题的解答运用哪些基本概念和基本规律，解题中的难点和容易犯错误的地方，以及应该注意的主要问题等. 相信这些对读者学习或复习大学物理有较好的借鉴作用. 在习题解答过程中，注意解题的规范性和示范性，同时强调解题的灵活性和解题技巧，并力争做到简明扼要，突出物理图像和解题思路，以便提高读者分析问题和解决问题的能力.

做习题是一个运用所学的知识去分析和解决问题的过程，是一个需要独立思考的过程. 我们希望读者对相关的习题先经过独立思考的过程，再来阅读本书的习题分析和解答.

本书由秦万广任主编，韩雪英、姜立南任副主编，参加编写的人员有赵岩、刘帅、林蔺. 编写过程中，他们付出了大量辛勤劳动，在此表示真诚的感谢.

本书可作为理工科院校学生学习"大学物理"课程的课后练习用书，也可作为教师在布置作业、考试命题及试题库选题时的参考书，还可供自学者参考使用. 限于作者的教学经验和学术水平，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评指正.

编　者

目　录

第1章　质点运动学

基 本 要 求

1. 掌握位矢、位移、速度和加速度等描述质点运动及运动变化的物理量. 理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性.

2. 理解运动方程的物理意义及作用. 掌握运用运动方程确定质点的位置、位移、速度和加速度的方法,以及已知质点运动的加速度和初始条件求速度、运动方程的方法.

3. 能计算质点在平面内运动时的速度和加速度,以及质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

4. 会求简单的质点相对运动问题.

内 容 提 要

1. 描述质点运动及运动变化的物理量

① 位矢:由坐标原点引向质点所在位置的有向线段,它表示了质点在空间中的位置. 在三维直角坐标系中,它的矢量表达式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

其大小为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

其方向可由它与 x,y,z 3 个坐标轴所夹 3 个角 α,β,γ 的余弦来表示:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

② 位移:由运动起点 A 引向运动终点 B 的有向线段,它表示了质点在给定时间内位置的总变化.

在二维直角坐标系中,位移可表示为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j}$$

其大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

方向为

$$\tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

其中 α 角为位移与 x 轴正方向所夹的角，应按逆时针算起.

③ 速度：定义为 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，即速度定义为位矢对时间的一阶导数. 在直线运动中，$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$. 在二维直角坐标系中，速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

式中 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y$；速度大小为

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

速度表示质点位置变动的快慢和方向.

④ 加速度：加速度被定义为速度对时间的一阶导数，或位矢对时间的二阶导数. 即

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在二维直角坐标系中，$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$ 或 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$，其中 $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x$，$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = a_y$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a_x$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = a_y$.

加速度的大小和方向可分别表示为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \alpha = \arctan\frac{a_y}{a_x}$$

用自然坐标系表示为

$$\boldsymbol{a} = a_n\boldsymbol{n} + a_\tau\boldsymbol{\tau}$$

式中，$a_n = \frac{v^2}{\rho}$，$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

加速度的物理意义是：它表示了质点速度变化的快慢与方向. 或者说，法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$，表示了质点运动方向变化的快慢程度，而切向加速度 $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，则表示了质点速度大小变化的快慢程度. 在这里要特别注意，加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，即加速度等于速度对时间的一阶导数，而作为加速度 $\boldsymbol{a}$ 的一部分的切向加速度 $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，即切向加速度大小等于速度大小对时间的一阶导数. 还要注意，一般情况下 $|\boldsymbol{a}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

2. 运动方程与轨道方程

① 运动方程：质点的位置随时间变化的关系. 它的矢量表达式为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

分量表达式为

$$x = x(t), y = y(t)$$

上式也可称作参数方程，时间 t 为参数.

② 轨道方程：从运动方程中消去参数 t 而得到的两个坐标间的关系式，即 $y = f(x)$ 或 $f(x,y) = 0$.

3. 运动学两类基本问题

第一类问题：已知运动方程求速度、加速度等. 此类问题的基本解法是根据各量定义求导数.

第二类问题：已知速度函数（或加速度函数）及初始条件求运动方程. 此类问题的基本解法是根据各量之间的关系求积分.

4. 圆周运动的线量和角量描述（见下表）

线　量	角　量	线量与角量关系
位置　s	角位置　θ	$s = R\theta$
路程　Δs	角位移 $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$	$\Delta s = R\Delta\theta$
速度　$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_\tau = \dfrac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_\tau$	角速度　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$v = R\omega$
加速度 $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ $a_n = \dfrac{v^2}{R}$	角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	$a_\tau = R\alpha$ $a_n = R\omega^2$

5. 质点相对运动

质点相对于运动参考系的运动称为相对运动.

解决相对运动的问题，需要将运动参考系与不动参考系之间的相关参量进行变换.

对于位矢，有 $\boldsymbol{r}_{绝对} = \boldsymbol{r}_{相对} + \boldsymbol{r}_{牵连}$；

对于速度，有 $\boldsymbol{v}_{绝对} = \boldsymbol{v}_{相对} + \boldsymbol{v}_{牵连}$；

对于加速度，有 $\boldsymbol{a}_{绝对} = \boldsymbol{a}_{相对} + \boldsymbol{a}_{牵连}$.

习　题

题 1-1　一质点在 xOy 平面上运动，运动方程为 $x=3t+5$，$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$。式中 t 以 s 计，x，y 以 m 计.

(1) 以时间 t 为变量，写出质点位矢的表达式；(2) 求出 $t=1$ s 时和 $t=2$ s 时的位矢，计算这 1 s 内质点的位移；(3) 计算 $t=0$ s 时到 $t=4$ s 时内的平均速度；(4) 求出质点速度的矢量表达式，计算 $t=4$ s 时质点的速度；(5) 计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均加速度；(6) 求出质点加速度的矢量表达式，计算 $t=4$ s 时质点的加速度.

分析：本题应当注意，任意时刻的速度或加速度应当给出矢量形式的一般表达式，然后再代入具体时刻来求解出某一时刻的具体数值. 要注意概念的区分，如位移和位移的大小，速度及速度的大小.

解　(1)

$$\boldsymbol{r}=(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$

(2) 将 $t=1$ s，$t=2$ s 代入上式即有

$$\boldsymbol{r}_1=8\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m},\quad \boldsymbol{r}_2=11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}+4.5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$

(3)

$$\boldsymbol{r}_0=5\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_4=17\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_0}{4-0}=\frac{12\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}}{4}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(4)

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

则

$$\boldsymbol{v}_4=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(5)

$$\boldsymbol{v}_0=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{v}_4=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_0}{4}=1\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(6)

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=1\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\boldsymbol{a}_4=1\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

题 1-2　已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动方程为 $x=2+6t^2-2t^3$(m)，求：(1) 质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小；(2) 质点在该时间内所通过的路程.

解　(1) $t=0$ s 时，$x_1=2$ m；$t=4$ s 时，$x_2=-30$ m. 于是，可以得到质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小为

$$x_2-x_1=-32\ \mathrm{m}$$

(2) 质点作往复运动,应先求出速度为 0 点的时间.

当$\frac{dx}{dt} = 12t - 6t^2 = 0$时,质点改变方向,得到

$$t = 2\ \text{s},\quad t = 0\ \text{s}(\text{不合题意})$$

则

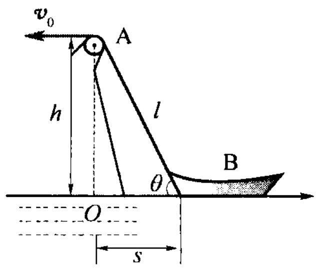
$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = 8.0\ \text{m}$$
$$\Delta x_2 = x_4 - x_2 = -40\ \text{m}$$

所以,质点在 4.0 s 内的路程为

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 48\ \text{m}$$

题 1-3　在离水面高 h m 的岸上,有人用绳子拉船靠岸,船在离岸 s 处,如题 1-3 图所示.当人以 $v_0(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 的速率收绳时,试求船运动的速度和加速度的大小.

分析:本题借助运动模型的约束条件,即 $l^2 = h^2 + s^2$ 来帮助求解问题.显然,在 h 保持不变的情况下,l,s 的微分存在必然联系.借助 l,s 随时间的变化量即可求解出问题的答案.通过本题,可以看出应用微分方程解决问题具有较大的灵活性.



题 1-3 图

解　设人到船之间绳的长度为 l,此时绳与水面成 θ 角,由图可知

$$l^2 = h^2 + s^2$$

将上式对时间 t 求导,得

$$2l\frac{dl}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$

根据速度的定义,并注意到 l,s 是随 t 减少的,则

$$v_{绳} = -\frac{dl}{dt} = v_0,\quad v_{船} = -\frac{ds}{dt}$$

即

$$v_{船} = -\frac{ds}{dt} = -\frac{l}{s}\frac{dl}{dt} = \frac{l}{s}v_0 = \frac{v_0}{\cos\theta}$$
$$v_{船} = \frac{lv_0}{s} = \frac{(h^2+s^2)^{1/2}v_0}{s}$$

将 $v_{船}$ 再对 t 求导,则船的加速度为

$$a = \frac{dv_{船}}{dt} = \frac{s\frac{dl}{dt} - l\frac{ds}{dt}}{s^2}v_0 = \frac{-v_0 s + lv_{船}}{s^2}v_0 = \frac{\left(-s + \frac{l^2}{s}\right)v_0^2}{s^2} = \frac{h^2 v_0^2}{s^3}$$

题 1-4　质点沿 x 轴运动,其加速度和位置的关系为 $a = 2 + 6x^2$,a 的单位为 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,$x$ 的单位为 m.质点在 $x = 0$ 处,速度为 $10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,试求质点在任意坐标处的速度值.

分析:在本题中,加速度 a 与时间的函数关系并不知道.显然用公式$\int a dt = \int dv$ 无法求

解;但在其微分式 $a\mathrm{d}t=\mathrm{d}v$ 中却可以灵活处理. 可以利用关系式 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 将时间 t 消掉,从而找到 v 与 x 的关系. 这样的处理方法是根据已知条件和所求解的问题灵活进行调整的常用方法.

解
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量得

$$v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x=(2+6x^2)\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}v^2=2x+2x^3+c$$

由题知 $x=0$ 时,$v_0=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,因此 $c=50$,则

$$v=2\sqrt{x^3+x+25}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

题 1-5 已知一质点作直线运动,其加速度为 $a=4+3t\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$,开始运动时,$x=5\ \mathrm{m}$,$v=0$,求该质点在 $t=10\ \mathrm{s}$ 时的速度和位置.

解
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4+3t$$

从而

$$\mathrm{d}v=(4+3t)\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$v=4t+\frac{3}{2}t^2+c_1$$

由题知 $t=0$ 时,$v_0=0$,因此有 $c_1=0$. 故

$$v=4t+\frac{3}{2}t^2$$

即

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t+\frac{3}{2}t^2$$

于是有

$$\mathrm{d}x=\left(4t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$

两端积分得

$$x=2t^2+\frac{1}{2}t^3+c_2$$

此外,由题知 $t=0$ 时,$x_0=5$,所以有 $c_2=5$. 因此有

$$x=2t^2+\frac{1}{2}t^3+5$$

于是，当 $t = 10$ s 时有

$$v_{10} = 4 \times 10 + \frac{3}{2} \times 10^2 = 190\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$x_{10} = 2 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 10^3 + 5 = 705\ \mathrm{m}$$

题 1 - 6　一质点自原点开始沿抛物线 $2y = x^2$ 运动，它在 Ox 轴上的分速度为一恒量，其值为 $v_x = 4.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，求质点位于 $x = 2.0$ m 的速度和加速度.

分析：可以先求解出质点沿 x 轴的运动方程，然后通过轨道方程求解出质点在 y 轴的运动方程.

解　根据 $v_x = \dfrac{dx}{dt} = 4.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，有

$$\int_0^x dx = \int_0^t 4dt$$

因此 $x = 4t$.

又 $2y = x^2$，所以

$$y = 8t^2$$

于是

$$\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i} + 8t^2\boldsymbol{j}$$

则

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 4\boldsymbol{i} + 16t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 16\boldsymbol{j}$$

根据 $x = 2.0$ m 时，$t = 0.5$ s，可得

$$\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = 16\boldsymbol{j}$$

题 1 - 7　质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}$ (m). 求：

(1) 质点的轨迹方程；

(2) 在 $t_1 = 1$ s 到 $t_2 = 2$ s 时间内的平均速度；

(3) $t_1 = 1$ s 时的速度及切向加速度和法向加速度的大小.

分析：本题中需要注意，加速度是速度对时间的一阶导数. 而切向加速度是速率（速度的大小）对时间的一阶导数（在自然坐标系下）.

解　(1) 由题知 $x = 2t$，且 $y = 19 - 2t^2$. 消去 t 得质点的轨道方程

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

(2) 当 $t = 1$ s 时，$\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j}$ m；

当 $t = 2$ s 时，$\boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j}$ m.

质点的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} \text{ m}$$

则质点的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{2-1} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 根据 $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}$，可得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

当 $t = 1$ s 时，速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -4\boldsymbol{j}$$

加速度大小为

$$a = -4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

此外，根据 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 16t^2}$，可得质点的切向加速度为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{16t}{\sqrt{4+16t^2}}$$

于是当 $t = 1$ s 时，有

$$a_\tau = 3.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 1.79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

题 1-8 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$，在 $t = 0$ 时，其速度为 0，位矢 $\boldsymbol{r}_0 = 10\boldsymbol{i}(\text{m})$. 求：

(1) 在任意时刻的速度和位矢；

(2) 质点在 xOy 平面上的轨道方程，并画出轨道的示意图.

解 (1) 根据 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，有

$$\int_0^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = \int_0^t (6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

则

$$\boldsymbol{v} = 6t\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j}$$

根据$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，有

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^t (6t\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t = 3t^2\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$$

则

$$\boldsymbol{r} = (3t^2 + 10)\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$$

（2）由 $\boldsymbol{r} = (3t^2 + 10)\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$ 得

$$x = 3t^2 + 10, \quad y = 2t^2$$

则质点轨道方程为

$$3y = 2x - 20$$

轨道示意图略.

题 1 - 9　一质点沿半径为 1 m 的圆周运动，运动方程为 $\theta = 2 + 3t^3$，式中 θ 以 rad 计，t 以 s 计，求：

（1）$t = 2$ s 时，质点的切向加速度和法向加速度；

（2）当加速度的方向和半径成 45° 角时，其角位移是多少.

解
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 9t^2, \quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 18t$$

（1）当 $t = 2$ s 时，切向加速度为

$$a_\tau = R\alpha = 1 \times 18 \times 2 = 36\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

法向加速度为

$$a_\mathrm{n} = R\omega^2 = 1 \times (9 \times 2^2)^2 = 1\,296\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

（2）当加速度方向与半径成 45° 角时，有

$$\tan 45° = \frac{a_\tau}{a_\mathrm{n}} = 1$$

即

$$R\omega^2 = R\alpha$$

于是有

$$(9t^2)^2 = 18t$$

解得

$$t^3 = \frac{2}{9}$$

因此角位移为

$$\theta = 2 + 3t^3 = 2 + 3 \times \frac{2}{9} = 2.67\ \mathrm{rad}$$

题 1 - 10　质点沿半径为 R 的圆周按 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动，式中 s 为质点离圆周上某一点的弧长，v_0，b 都是常数，求：

（1）t 时刻质点的加速度；

（2）t 为何值时，加速度在数值上等于 b.

解　（1）根据 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$，有

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

则加速度大小为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}}$$

加速度与半径的夹角为

$$\varphi = \arctan\frac{a_\tau}{a_n} = \arctan\frac{-Rb}{(v_0 - bt)^2}$$

(2) 由题意有

$$a = b = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}}$$

即

$$b^2 = b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2} \Rightarrow (v_0 - bt)^4 = 0$$

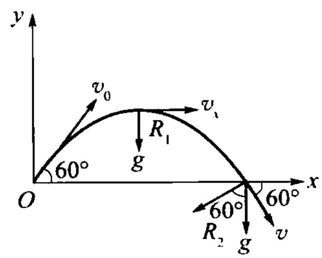
因此，当 $t = \dfrac{v_0}{b}$ 时，$a = b$.

题 1-11　以初速度 $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 抛出一小球，抛出方向与水平面成 $\alpha = 60°$ 的夹角，求：

(1) 小球到轨道最高点的曲率半径 R_1；

(2) 落地处的曲率半径 R_2.

解　设小球所作抛物线轨道如图所示.



题 1-11 图

(1) 在最高点，$v_1 = v_x = v_0 \cos 60°$，且 $a_{n_1} = g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

又 $a_{n_1} = \dfrac{v_1^2}{R_1}$，于是有

$$R_1 = \frac{v_1^2}{a_{n_1}} = \frac{(20 \times \cos 60°)^2}{10} = 10\ \mathrm{m}$$

(2) 在落地点，

$$v_2 = v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

而 $a_{n_2} = g \times \cos 60°$，所以有

$$R_2 = \frac{v_2^2}{a_{n_2}} = \frac{20^2}{10 \times \cos 60°} = 80\ \mathrm{m}$$

题 1-12　一船以速率 $v_1 = 30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 沿直线向东行驶，另一小艇在其前方以速率 $v_2 = 40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 沿直线向北行驶，问在船上看小艇的速度为多少？在艇上看船的速度又为多少？

解　(1) 从船上看小艇，有 $\boldsymbol{v}_{21} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$，依题意作速度矢量图如题 1-12 图(a) 所示.

由图可知

$$v_{21}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

题 1-12 图

方向北偏西. 方向角为

$$\theta=\arctan\frac{v_1}{v_2}=\arctan\frac{3}{4}=36.87^\circ$$

(2) 从小艇上看船，有

$$\boldsymbol{v}_{12}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$$

依题意作出速度矢量图如题 1-12 图(b) 所示，同上法，得

$$v_{12}=50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

方向南偏东 36.87°.

题 1-13　当一轮船在雨中行驶时，它的雨篷遮着篷的垂直投影后 2 m 的甲板上，篷高 4 m，但当轮船停航时，甲板上干湿两部分的分界线却在篷前 3 m，如雨滴的速度大小为 8 m·s⁻¹，求轮船的速度.

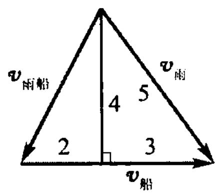
解　依题意作出速度的矢量图如图所示.

因为

$$\boldsymbol{v}_{雨船}=\boldsymbol{v}_{雨}-\boldsymbol{v}_{船}$$

所以

$$\boldsymbol{v}_{雨}=\boldsymbol{v}_{雨船}+\boldsymbol{v}_{船}$$



题 1-13 图

由图中比例关系可知

$$v_{船}=v_{雨}=8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

题 1-14　已知质点位矢随时间变化的函数形式为

$$\boldsymbol{r}=R(\cos\omega t\boldsymbol{i}+\sin\omega t\boldsymbol{j})$$

其中 ω 为常量. 求：

(1) 质点的轨道；

(2) 质点的速度和速率.

解　(1) 由 $\boldsymbol{r}=R(\cos\omega t\boldsymbol{i}+\sin\omega t\boldsymbol{j})$ 知

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t$$

消去 t 可得轨道方程为