21世纪精品规划教材系列

实变函数

SHI BIAN HAN SHU

主编◎阮信 韩灵娟

吉林大学出版社

21世纪精品规划教材系列

实变函数

主　编　阮　佶　韩灵娟
参　编　白丽红　甘建强

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数 / 阮佶，韩灵娟主编. 一一 长春：吉林大学出版社，2016.1

ISBN 978－7－5677－5674－8

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①阮… ②韩… Ⅲ. ①实变函数一高等职业教育一教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 020621 号

书　　名：实变函数

作　　者：阮佶　韩灵娟　主编

责任编辑：李伟华　责任校对：崔晓光　　　封面设计：可可工作室

吉林大学出版社出版、发行　　　北京楠海印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米　1/16　　　2016 年 1 月 第 1 版

印张：11.5　字数：260 千字　　　2016 年 1 月 第 1 次印刷

ISBN 978－7－5677－5674－8　　　定价：25.00 元

社址：长春市明德路 501 号　邮编：130021

发行部电话：0431－89580028/29

网址：http://www.jlup.com.cn

E－mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

《实变函数》是高师院校和其他高校广泛采用的教材，大学数学系的学生常常感到“实变函数”难学。的确，“实变函数”概念抽象，内容艰深，习题难解，其独创的思想方法常隐藏在严谨而难懂的论证过程之中，易使初学者感到困惑。但是，“实变函数”又是一门重要的数学基础课程，是进一步学习“实分析”和“泛函分析”的基础，它的概念、理论、论证技巧和思想方法已渗透到数学乃至其他科学的各个分支，成为我们步入现代数学殿堂不可或缺的阶梯。进入 21 世纪之后，高等教育发生了很多变化，根据以往的工作经验，编者深感需要根据实际情况编写一本内容深入浅出，通俗易懂，而且具有较多解题示范的实变函数教材，以适应一般师范院校、地方性高校的数学系的需要。本书是作者根据多年来的使用情况，以及数学的近代发展，在程其襄先生的《实变函数与泛函分析基础》基础上，在原书的基本框架不变的前提下进行的编撰修订，保留了程其襄先生许多重要思想，特别是保持了全书简明易懂的特点，结合多年教学的经验和许多兄弟院校的意见作了全面的编修。

作为教育部“十二五”规划教材，本书编写的原则是：继续保持原书简明易学的风格，减少过度形式化的论述，着重阐述思想方法。

基于此原则，本书作了以下几方面修改：

第一，突出实变函数的思想方法，尽快进入实变函数的核心内容。

第二，改写了部分定理的证明，以利于教师讲授和读者理解。

第三，增加了部分例题，并对这些例题的证明作了一定的说明。

第四，为了帮助学生克服做实变函数题目的困难，书中增加了课后练习题，并在书后附有答案以供参考。

《实变函数论》共计 6 章：集合、点集、测度论、可测函数、积分论、微分和不定积分，其中第一、二、三、四章及答案由阮佶编写，第五、六章及答案由韩灵娟编写，甘建强撰写前言，白丽红编写绪论及相关数学人物生平介绍。本书可作为高等师范院校和其他高校数学系的教学用书，也可以作为自学参考书。

由于这是一本教材，我们在编写过程中曾参阅了国内外大量的有关教材和文献，这里不再一一列出。本书的编写和出版得到了学院领导与有关同志的大力支持和热情帮助，在此谨向所有对本书提出意见和建议的专家、广大教师与读者表示衷心感谢，书中一丝一毫的改进均是与他们分不开的，虽然我们作了一定的努力，但由于水平有限，书中难免会有缺点、错误和不当之处，诚恳希望专家同行与读者们提出宝贵意见，不吝指正。

编 者

2015 年 9 月

目 录

绪　论

1. 什么是实变函数

实变函数论(real function theory)是19世纪末20世纪初形成的数学分支。起源于古典分析,主要研究对象是自变量(包括多变量)取实数值的函数,研究的问题包括函数的连续性、可微性、可积性、收敛性等方面的基本理论,是微积分的深入和发展。因为它不仅研究微积分中的函数,而且还研究更为一般的函数,并且得到了较微积分中相应理论更为深刻、更为一般从而应用更为广泛的结论,所以实变函数论是现代分析数学各个分支的基础。

实变函数主要指自变量(也包括多变量)取实数值的函数,而实变函数论就是研究一般实变函数的理论。在微积分学中,主要是从连续性、可微性、黎曼可积性三个方面来讨论函数(包括函数序列的极限函数)。如果说微积分学所讨论的函数都是性质“良好”的函数(例如往往假设函数连续或只有有限个间断点),那么,实变函数论是从连续性、可微性、可积性三个方面讨论最一般的函数,包括从微积分学来看性质“不好”的函数。它所得到的有关的结论自然也适用于性质“良好”的函数。实变函数论是微积分学的发展和深入。函数可积性的讨论是实变函数论中最主要的内容。它包括H. L. 勒贝格的测度、可测集、可测函数和积分以及更一般的勒贝格—斯蒂尔杰斯测度和积分的理论(见勒贝格积分)。这种积分比黎曼积分是更为普遍适用和更为有效的工具,例如微积分基本定理以及积分与极限变换次序。精美的调和分析理论(见傅里叶分析)就是建立在勒贝格积分的基础上的。此外,还适应特殊的需要而讨论一些特殊的积分。例如为讨论牛顿—莱布尼茨公式而有佩隆积分。由于有了具有可列可加性的测度和建立在这种测度基础上的积分,导致了与微积分中函数序列的点点收敛和一致收敛不同的一些新的重要收敛概念的产生,它们是几乎处处收敛、度量收敛(亦称依测度收敛)、积分平均收敛等。度量收敛在概率论中

就是依概率收敛，且具有特别重要的地位 。积分平均收敛在一般分析学科中也是常用的重要收敛。傅里叶级数理论以及一般的正交级数理论就是以积分的平方平均收敛为基本的收敛概念。一般正交级数的无条件收敛问题在实变函数论中也有所讨论。

2. 实变函数论的产生

以实数作为自变量的函数叫作实变函数，以实变函数作为研究对象的数学分支就叫做实变函数论，它是微积分学的进一步发展。

微积分产生于 17 世纪，到了 18 世纪末 19 世纪初，微积分学已经基本上成熟了。数学家广泛地研究并建立起它的许多分支，使它很快就形成了数学中的一大部门，也就是数学分析。

也正是在那个时候，数学家逐渐发现分析基础本身还存在着很多问题。比如，什么是函数这个看上去简单而且十分重要的问题，数学界并没有形成一致的见解，以至长期争论着问题的这样和那样的解答，这样和那样的数学结果，弄不清究竟谁是正确的。又如，对于什么是连续性和连续函数的性质是什么，数学界也没有足够清晰的理解。

19 世纪初，曾经有人试图证明任何连续函数除个别点外总是可微的。后来，德国数学家维尔斯特拉斯提出了一个由级数定义的函数，这个函数是连续函数，但是维尔斯特拉斯证明了这个函数在任何点上都不可导。这个发现使许多数学家大为吃惊。

由于发现了某些函数的奇特性质，数学家对函数的研究更加深入了。人们又陆续发现了有些函数是连续的但处处不可微，有的函数的有限导数并不黎曼可积；还发现了连续但是不分段单调的函数等等。这些都促使数学家考虑，人们要处理的函数，仅仅依靠直观观察和猜测是不行的，必须深入研究各种函数的性质。比如，连续函数必定可积，但是具有什么性质的不连续函数也可积呢？如果改变积分的定义，可积分条件又是什么样的？连续函数不一定可导，那么可导的充分必要条件又是什么样的？……

上面这些函数性质问题的研究，逐渐产生了新的理论，并形成了一门新的学科，这就是实变函数。

3.实变函数论的内容

顾名思义,实变函数论即讨论以实数为变量的函数,这样的内容早在中学都已学过,中学学的函数概念都是以实数为变量的函数,大学的数学分析,常微分方程都是研究的以实数为变量的函数,那么实变函数还有哪些可学呢?简单地说:实变函数只做一件事,那就是恰当地改造积分定义使得更多的函数可积。

何以说明现有的积分范围小了呢?例如:

狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数时}\\ 1, & x\text{ 为有理数时}\end{cases}$

这样形式极为简单的函数都不可积,所以我们认为积分范围狭窄。

如何改造积分定义来达到拓广积分范围的目的呢?让我们先剖析一下造成这一缺陷的根本原因在何处,只有先找准病根,然后才能对症下药。由数学分析知:对任意分划 $T:a=x^0<x^1<x^2<\cdots<x^n=b$,由于任意一个正长度区间内既有有理数又有无理数,所以恒有:

$$S(T,D)-s(T,D)\equiv 1-0=1$$

如果分划不是这样呆板,这样苛刻地要求一定要分成区间的话,还是有可能满足大小和之差任意小的。比如,只要允许将有理数分在一起,将无理数分在一起,那么大小和之差就等于零了。这就是问题的着眼点,首先让分化概念更加广泛,更加灵活,从而可将函数值接近的分在一起以保证大小和之差任意小。即

$D:E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E[y^{i-1}\leqslant f<y^i]$,其中 $m\leqslant f<M$,$m=y^0<y^1<y^2<\cdots<y^n=M$ 时,要

$S(D,f)-s(D,f)=\sum\limits_{i=1}^{n}[y^i-y^{i-1}]mE[y^{i-1}\leqslant f<y^i]\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[y^i-y^{i-1}]mE<\varepsilon$,只须 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[y^i-y^{i-1}]<\varepsilon$,这里 $mE[y^{i-1}\leqslant f<y^i]$ 相当于集合 $E[y^{i-1}\leqslant f<y^i]$ 的长度。

思路非常简单,但实现起来并非易事,因为 $E[y^{i-1}\leqslant f<y^i]$ 可能很不规则,如何求 $mE[y^{i-1}\leqslant f<y^i]$ 呢?这就是一般集合的测度问题(即第三章内容),而测度理论所度量的对象是集合,尤其是多元函数定义域所在空间 R^n 的子集。因此,必须先介绍集合与点集知识(即第一章、第二章内容)。测度理论本来是为了推广长度、

面积、体积概念到一般 g 的集合，然而在实施过程中却使我们非常遗憾，我们无法对直线上所有集合规定恰当测度使得满足以下两点最基本要求：一、落实到具体区间的测度就是长度(即测度确为长度概念的推广)；二、总体测度等于部分测度之和(即可列可加性成立)。只能对部分集合规定满足这两点基本要求的测度，这一部分集合便是可测集合(即第四章内容)。那么哪些函数才能保证形如 $E[y^{i-1}\leqslant f<y^{i}]$ 的集合可测呢？这就是可测函数理论问题(即第四章内容)，由于 $E[y^{i-1}\leqslant f<y^{i}]=E[f\geqslant y^{i-1}]-E[f\geqslant y^{i}]$，所以我们采用对 $\forall a$，有 $E[f\geqslant a]$ 可测，作为函数可测的定义。

有了以上准备之后，才根据前述思路对可测集上定义的可测函数先定义大(小)和

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^{n}y^{i}mE[y^{i-1}\leqslant f<y^{i}](s(D,f)=\sum_{i=1}^{n}y^{i-1}mE[y^{i-1}\leqslant f<y^{i}])$$

然后规定 $\sup\limits_{D}S(D,f)(=\inf\limits_{D}s(D,f))$ 为积分值，定义并讨论新积分的性质(即第五、六章内容)。

以上所述，既是勒贝格(Lebesgue)创立新积分的原始思路，也是传统教材介绍 Lebesgue 积分定义的普遍方法。

鉴于人们在研究可测函数时发现：可测函数的本质特征是正、负部函数的下方图形均为可测集。结合黎曼(Riemann)积分的几何意义，使我们自然想到：与其说测度推广了定义域的长度(面积、体积)概念后使得我们作大、小和更加灵活多样，以达推广积分的目的，不如说由于定义域与实数域的乘积空间的面积(体积)概念的推广，使得大量的例如狄利克雷(Dirichlit)函数那样图形极其不规则的下方图形可以求面积(体积)了，从而拓宽了可积范围。

第一章 集合

集合论是数学的一个基本的分支学科，由德国数学家康托尔(Georg Cantor，1845—1918)所创立，研究对象是一般集合. 集合论在数学中占有一个独特的地位，是整个现代数学的逻辑基础，它的基本概念已渗透到数学的所有领域，包含了集合、元素和成员关系等最基本的数学概念. 在大多数现代数学的公式化中，集合论提供了要如何描述数学物件的语言，它和逻辑与一阶逻辑共同构成了数学的公理化基础，以未定义的“集合”与“集合成员”等术语来形式化地建构数学物件. 在朴素集合论中，集合被当作一堆物件构成的整体之类的自证概念. 在公理化集合论中，集合和集合成员并不直接被定义，而是先规范可以描述其性质的一些公理. 故此，集合和集合成员是有如在欧式几何中的点和线，而不被直接定义.

康托尔

§1 集合的表示

一、集合的概念

集合也称作集，是数学中所谓原始概念之一，即不能用别的概念加以定义，它像几何学中的“点”、“直线”那样，只能用一组公理去刻画. 就目前来说，我们只要求掌握以下朴素的说法：

“在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素.”

一个集合的各个元素必须是彼此互异的，哪些事物是给定集合的元素必须是明

确的，下面举出几个集合的例子.

例 1 4,7 ,8,3 四个自然数构成的集合.

例 2 全体自然数.

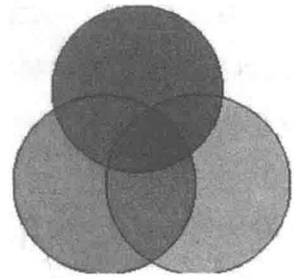
例 3 0 和 1 之间的实数全体.

例 4 $[0,1]$ 上的所有实函数全体.

例 5 A,B,C 三个字母构成的集合.

例 6 平面上的向量全体.

例 7 全体高个子.



全体高个子并不完全构成一个集合，因为一个人究竟算不算高个子并没有明确的界限，有时难以判断他是否属于这个集合.

一个集合的元素必须彼此互异，而且哪些事物是给定集合的元素必须明确. 以集合作为元素的集合，也常称为集族或集类.

以后常用大写字母 $A,B,C,D,X,Y,Z\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,x,y\cdots$ 表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a\in A$，或说 A 含有 a.

如果 a 不是集 A 的元素，则说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$，或说 A 不含有 a.

有些集合可用列举其元素的办法来表示，如：

只含有一个元素 a 的集合称为单元素集或独点集，可表示为$\{a\}$.

由 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的集合，可表示为$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

由全体自然数所组成的集合称为自然数集，可表示为$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

当集 $f(x)$ 是具有某性质 R 的元素之全体时，我们用下面的形式表示 A：

$A=\{x\mid x$ 满足条件 $p\}$

如例 1 可以表示为$\{4,7,8,3\}$，例 3 可以表示为$\{x:x\in(0,1)\}$

设 A 是一个集合，x 是 A 的元素，我们称 x 属于 A，记作 $x\in A$，x 不是 A 的元素，记作 R.

又例如，方程 $x^2-1=0$ 的解 x 的全体组成的数集是$\{x\mid x^2-1=0\}$，

实际上就是$\{1,-1\}$.

有时我们也把集$\{x\mid x\in E,x$ 满足条件 $p\}$ 改写成 $E\{x$ 满足条件 $p\}$.

例如，设 $f(x)$ 是定义在集合 E 上的一实函数，a 是一个实数，我们把集 $\{x \mid x \in E, f(x) > a\}$ 写成 $E[f(x) > a]$ 或 $E[f > a]$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 例如：

$$\{x : \sin x > 1\} = \varnothing$$

习惯上，N 表示自然数集(不包含 0)，Z 表示整数集，Q 表示有理数集，R 表示实数集.

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的函数，记 $f(E) = \{f(x) : x \in E\}\}$，称之为 f 的值域. 若 D 是 R 中的集合，则 $f^{-1}(D) = \{x : x \in E\}$，称之为 D 的原像；在不至混淆时，$\{x : x \in E, f(x)$ 满足条件 $p\}$ 也可简写成 $\{x : f(x)$ 满足条件 $p\}$.

设 A，B 是两个集，若 A 和 B 的元素完全相同，就称 A 和 B 相等，记作 $A = B$(或 $B = A$).

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就称为 A 是 B 的子集，记作 $A \in B$(或 $B \in A$)，读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).

若 $A \in B$ 且 $A \neq B$，就称 A 是 B 的真子集，我们规定空集是任何集的子集.

二、集合之间的关系

A 和 B 满足关系：对任意 $x \in A$，可以得到 $x \in B$，则成 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \subset A$，若 $A \subset B$ 但 A 并不与 B 相同，则称 A 是 B 的真子集.

例 8　若 $f(x)$ 在 R 上定义，且在 $[a,b]$ 上有上界 M，即任意对 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) \leqslant M$. 用集合语言表示为：$[a,b] \subset \{x : f(x) \leqslant M\}$.

用集合语言描述函数性质，是实变函数中的常用方法，请在看下例.

例 9　若 $f(x)$ 在 R 上连续，任意取定 $x_0 \in R$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$. 使得对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$，即

$f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

若集合 A 和 B 满足关系：$A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$.

例 10　设 E_i 在 R 上定义，且在 R 上有上界 M，则

$$R = \{x : f(x) \leqslant M\} = \{x : f(x) \leqslant M + 1\}$$

例 11　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由连续函数的性质，有 $f([a,b]) = [m,M]$，

其中

$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\}, M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$.

由集的“相等”与“包含”的定义可得如下定理：

定理 1:对任何集合 A,B,C,均有

(1)$A\subset A$;

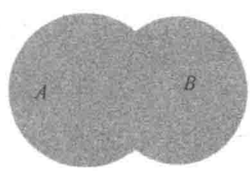
(2) 若 $A\subset B,B\subset C$,则 $A\subset C$;

(3)$A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$.

三、集合的运算

1.集合的并集

设 A,B 是任意两个集合,设 C 由一切或属于 A 或属于 B 的元素所组成,则我们称 C 为 A,B 的并集或和集,简称为并或和,记为集合 A 与 B 的并或 $A\cup B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$



并集的概念可以推广到任意多个集合的情形,设有一簇集合 $\{A_\partial:\partial\notin\Lambda\}$,其中 a 是在固定指标集 Λ 中变化的指标;则由一切 A_∂ 的所有元素组成的集合称为这族集合的并集或和集,记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,它可以表示为:

$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x$:存在某个 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x\in A_\alpha\}$

习惯上,当 $\Lambda=\{1,2,3,\cdots,k\}$ 为有限集时,

$A=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 写成 $A=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}^{k}A_\alpha$,而 $A=\bigcup\limits_{n\in N}A_n$ 写成 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 12 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 E 上的函数,则对任意 $C\in R$

$\{x:\max\{f(x),g(x)\}>C\}=\{x:g(x)>C\}$

例 13 $(a,b)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$.

例 14 若记 $Q_n=\{\frac{m}{n}:m\in Z\},n=1,2,3\cdots$,则 $Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Q_n$.

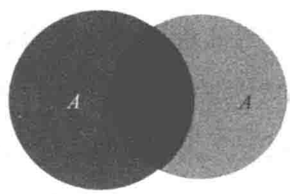
例 15 若$\{I_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是一族开区间,而$[a,b]\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$,则存在$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots\}\subset\Lambda$使得$[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$(有限覆盖定理)

例 16 若$f(x)$是定义在E上的函数,则$\{x:f(x)>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x:f(x)>\frac{1}{n}\right\}$.

2.集合的交集

设A,B是任意两个集合,由一切既属于A又属于B的元素组成的集合C称为A和B的交集或积集,简称为交或积,记作集合A与B的交集或$A\cap B=\{x:x\in A$且$x\in B\}$.

特别地,若$A\cap B=\varnothing$,称A与B不相交;反之,则称A与B相交.



交集的概念也可以推广到任意多个集合的情形,设$\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是任意集族,其中∂是在固定指标集Λ中变化的指标;则由一切$\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$的所有元素组成的集合称为这族集合的交集或积,记为$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_n$,它可以表示为:

$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{\mathrm{x}:$存在某个$\alpha\in\Lambda$使$\mathrm{x}\in A_\alpha\}$

若$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_n\neq\varnothing$,说明所有的$A_n$没有公共的元素.

例 17 若$f(x)$是定义在E上的函数,则

$\{x:a<f(x)\leqslant b\}=\{x:a<f(x)\}\cap\{x:f(x)\leqslant b\}$

例 18 若$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$,$n=1,2,\cdots$且$\lim\limits_{x\to\infty}(b_n-a_n)=0$则存在唯一的$a\in R$使得$a\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$,即$\{a\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$).

定理 2

(1)$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$(交换律).

(2)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$(结合律).

(3)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$(分配律).

(4)$A \cup A = A, A \cap A = A$.

证明:我们只证明分配律中的 $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$.

先设 $x \in A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha)$ 则有 $x \in A$ 且有 $\alpha_0 \in \Lambda$ 使得 $x \in B_{\alpha_0}$.

于是 $x \in A \cap B_0 \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$.

这证明了 $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$.

再证反过来的包含关系.设 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$,则有 $\alpha_0 \in \Lambda$ 使得 $x \in A \cap B_{\alpha_0}$,此即 $x \in A, x \in B_\alpha$,因此 $x \in A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha)$ 于是 $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$.

综合起来,便是等式成立,证毕.

这说明集合运算的分配律,在无限并的情况下依然成立.

并集与交集的概念可以推广到任意个集的情形,设 Γ 为一非空集合,并且对每一个 $\alpha \in \Gamma$,指定了一个集合 A_α,此时我们称 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 是以 Γ 为指标集的集族,集族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的并与交分别定义为:

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x: \exists \alpha \in \Gamma, \text{使 } x \in A_\alpha\}$$

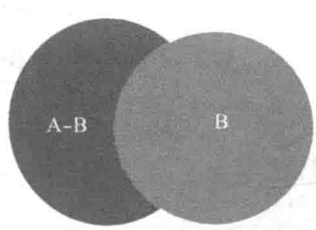
$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x: \forall \alpha \in \Gamma, \text{有 } x \in A_\alpha\}$$

例 19 设 $A_n = \{x: -1 - \frac{1}{n} < x \leqslant 1 - \frac{1}{n}\}, n \in N$,则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 0], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-2, 1)$$

3.集合的差集和余集

若 A 和 B 是集合,称 $A \backslash B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为 A 和 B 是差集,$A \backslash B$ 也可以记为 $A - B$.



当我们讨论集合都是某个大集合 S 的子集时,我们称 $S \backslash A$ 为 A 的余集,并记为 $S \backslash A = A^c$.

在欧式空间 R^n 中,$R^n \backslash A$ 写成 A^c.

当全集确定时,显然 $A \backslash B = A \cap B^c$ 因此研究差集运算可以通过研究余集运算

来实现.

例 20　$Q^c = \{x : x$ 是无理数$\}$.

例 21　若 $f(x)$ 定义在集合 E 上，$S = E$，则$\{x : f(x) > a\}^c = \{x : f(x) \leq a\}$.

集合 A 减 B 的差集或差：$A - B$ 或 $A \backslash B = \{x : x \in A$ 但 $x \notin B\}$.

当 $B \subset A$ 时，称差集 $A - B$ 为 B 关于 A 的余集记作$(C_A B)$.

当我们研究一个问题时，如果所讨论的集合都是某个固定集 A 的子集时，就称 A 为基本集或全集，并把 A 的子集 B 关于 A 的余集 $C_A B$ 简称为 B 的余集，记为 B^C 或 CB.

在集合论中处理差集或余集运算式时常用到以下公式：德 · 摩根(De Morgan)公式.

若$\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族集合，则

(1) $(\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$,

(2) $(\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$.

我们这里仅证明(1)：设 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^c$ 则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$，因此对任意 $\alpha \in \Lambda$，$x \notin A_\alpha$ 即对任意 $\alpha \in \Lambda$，$x \in A_\alpha{}^c$，从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha{}^c$、反之，设 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha{}^c$，则对任意 $\alpha \in \Lambda$，$x \in A_\alpha{}^c$，即对任意 $\alpha \in \Lambda$，$x \notin A_\alpha$，则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$、从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha{}^c$ 综合可得，证毕.

注：通过取余集，使 A 与 A^C，$\bigcup$ 与 $\bigcap$ 互相转换.

例 22　设$\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列，若 $x \in E$ 则$\{f_n(x)\}$ 有界的充分必要条件是存在 $M > 0$，使得对任意 n，$|f_n(x)| \leqslant M$ 注意到与存在相对应的是并集的运算，与任意相对应的是交集的运算，从而

$$\{x : \{f_n(x)\}\text{ 有界}\} = \bigcup_{M \in R} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| \leqslant M\}$$

用德摩根公式，有

$$\{x : \{f_n(x)\}\text{ 无界}\} = \{x : \{f_n(x)\}\text{ 无界}\}^C = \bigcup_{M \in R} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| > M\}$$

其中 R^+ 为正实数集.

例 23　设$\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列，若 x 是使$\{f_n(x)\}$ 收敛于 0 的点，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得对任意 $n \geqslant N$ 有 $|f_n(x)| < \varepsilon$ 即

$$\{x : \lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon \in R^+} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : f_n(x) < \varepsilon\}$$