

FUNDAMENTAL METHODS
OF MATHEMATICAL ECONOMICS

SECOND
EDITION

基礎經濟數學

下 冊

原著者 蔣 中 一
譯 者 李 嘉 淦

國立編譯館主編 東華書局印行

基礎經濟數學

第二版 (1974年)

下 冊

原著者

蔣 中 一

譯 者

李 嘉 淦

國立臺灣師範大學數學系教授

國立編譯館出版
東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國六十六年十月初版

中華民國七十五年五月四版

大學 用書 基礎經濟數學

下冊定價 新臺幣 壹佰伍拾元整

(外埠酌加運費滙費)

譯作權 所有人	國立編譯館
補助機關	國家科學委員會
原著者	蔣 中 一
譯者	李 嘉 淦
發行人	卓 鑫 森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 郵撥：0006481
印刷者	合興印刷廠 臺北市大理街130巷2弄1號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(66062)

譯者序

經濟學博大精深，由於所討論的範圍十分廣泛，所涉及的分析模式也就十分複雜，因此在經濟意義與數學模式之間，常有不易跨越的鴻溝出現，對於數學基礎不夠的初學者，數學模式的結構與所用的分析方法，常使學生困於數式中而不明白真正的涵義。對於已有數學基礎而有志於研究經濟學的學生，經濟模式的內涵又常使學生無法運用已有的數學能力。蔣中一博士的這本鉅著正是解決上述問題的鎖鑰。這本書涵蓋了經濟分析上所用的大部份數學工具，並極力使數學技巧與經濟分析相結合，以使學生不致忽略原意而捨本逐末。全書內容的編排採逐步分析式，以使初學者既能建立足夠的數學基礎，又能瞭解應用的方法，確是鴻溝上的一座橋樑，也是一本適於自修與教學用的範本。譯者不憚淺陋，歷半年翻譯完成，希望能使蔣博士鉅著加惠於國內學子，譯者雖竭盡一己能事，仍感詞不達意，誤謬之處尚祈海內學者先進不吝指正。

再版序

自初版發行後，許多經濟學者慷慨地惠賜筆者，極有價值的建議。爲了使這些建議及個人思索而得的其他概念，能夠公諸同儕，乃決定發行新版。並爲使新版書中的各項立論，能比舊版書所載的更確實有用，筆者已將原書中的一部份內容予以簡化，或作額外的詳論。

新版中最重要的不同點，是增添了對非線性規劃理論的討論，這部份列在第二十章中。在第二十章中介紹了柯恩氏與塔克氏 (Kuhn-Tucker) 的凹性規劃理論，以及後起的亞氏與恩氏 (Arrow-Enthoven) 的準凹性規劃理論。並以極多的篇幅來澄清“限制條件之檢定”的觀念。其次的不同點，是在第八章中應用隱函數理論，作爲分析比較靜態學中一般函數模式的基礎，並在以後各章中，對求取比較靜態導數的方法上，偏重於使用全微分量的方法，而非用全導數量的方法。

其他的不同點則分散於各章中，如：第九章及以後各章中都採用凸函數、凹函數等標準名詞；第十二、二十章中則加入了準凹函數，準凸函數的討論；第十一章介紹了方陣的特性方程式，作爲檢查二次式符號的方法，以與第十七章所述微分方程式及差分方程式的特性方程式，作一比較；第十二章另加入勞氏 (L' Hopital) 法則的討論及拉氏 (Lagrange) 乘數在經濟學中的意義，後者在其後的第十九章中並與線性規劃中對偶選擇變數有關；第十三章中加入了部份積分法；第十四章中則以較簡單的方法，導出恰當微分方程式的解；並在第十四章到第十七章中，對半永久式平衡與市場清銷式的平衡，作了審慎的區分。爲使學者能夠熟練地運用所學的各項技巧，並確實地把握住各關鍵所在點，筆者又加入了許多新的練習題。這些將確使學者建立自信心，不因無法解題而喪失興趣。

除了上述的許多變更外，新版仍然保持了原書的形式及思路。但

其用途較本來所意想的更具彈性。例如學生可在學完矩陣代數（第五章）之後，就可毫無困難的開始學習線性規劃（第十八，十九章）與競賽理論（第二十一章）。同樣地，學完受制擇優理論（第十二章）後，亦可直接開始第二十章的非線性規劃理論，而不需要先建立線性規劃的基礎知識。僅對擇優問題有興趣的讀者，可以略去一般函數模式的比較靜態分析（第八章）、第十一章第六節、及第十二章第四節，而直接從第七章跳到第九章。

新版內容的確定，受益於經濟學界諸先進之處甚多，筆者謹在此向下列諸先生誌謝：美利堅大學的巴瑞教授，耶魯大學的波恩柏教授，康乃狄克大學的布斯教授，瑞典戈登堡大學的狄克生教授，海軍研究院的福爾生教授，加州大學洛杉磯分校的賀希理弗教授，南康乃狄克州立學院的蕭教授，韓國國立漢城大學的郎教授，紐約大學商務管理研究所的夏普教授，愛阿華州立大學的斯塔立夫教授，及麻州大學的葉周南先生。由於未能完全採納各位先進的卓見，筆者願為本書的各項立論負完全責任。尤以，為了避免涉及或太深入變分學、擇優控制理論、及動態規劃理論，筆者也未採納加入動態擇優理論的建議。筆者以為，以上的各項教材，仍以另書討論為宜，以免超越本書的既定範疇。

ALPHA C. CHIANG

（蔣 中 一）

初版序

本書是為從事經濟學研究的人所寫的。全書的主要目標有二：(1)對某些基本的數學模式提出一份系統化的說明，(2)將這些數學技巧與各種形式的經濟分析方法，相互聯貫起來，使得兩種不同的分析方式，彼此間的相互關係得以明白地顯示出來。因此下列兩類的讀者，都將發現本書的有用之處：第一種是已有數學基礎，而希望能經由某種媒介，跨入經濟學領域的人，第二種是還沒有建立數學基礎而有志於研究經濟學的人。由於大部份的讀者，可能都屬於後面這一類，因此筆者以極大的耐性，來逐步推展各項技巧。假設讀者並沒有足夠的基礎知識，而一步一步地進行推導理論，來儘量減少讀者在學習過程中搞迷糊了的可能性。而且，筆者已將敘述的方式，簡化成比能使數學界人士滿意的方式為更非正式的形式，因為筆者深信，對於這本書的內容，其可讀性應該比數學的嚴謹性更優先考慮。

為使讀者能獲得足夠的數學知識，以探討現有的各種經濟方面的論著，而不致惶惑失措，因此在後續的各章中涵蓋了許多的數學專題，藉使讀者建立信心。即使各個專題的討論，都被限制在初等的程度，但對於認真讀完全書的讀者而言，他仍能得到關於集合概念，集合運算，函數與關係，矩陣代數，微積分，簡單的微分方程式，差分方程式，凸集合概念等的基礎知識，去閱讀更深的論著甚或足以運用。

為將這些數學論題與經濟分析方法相聯貫，書中例舉了許多以數學方式表示的經濟模式。甚至可以這麼說，本書的結構安排，是以經濟學為主著眼點，而不是以數學為重。第一篇的淺介討論數學模式的本質和結構，而本書的其他部份則分成五篇，每篇各自處理一個經濟專題：

第二篇：靜態分析（平衡分析）

第三篇：比較靜態分析

第四篇：擇優問題（平衡分析的特例）

第五篇：動態分析

第六篇：數理規劃與競賽理論（擇優理論的另一種形式）

適用於各篇的數學工具，皆以適當的次序予以介紹，以鑲合於既定的經濟分析形式。藉著將數學溶入經濟分析的方式，相信可使讀者對這兩種學問的關係瞭解得更清楚，而且在閱讀更專技的論著時能抓住重點。

上列的各項經濟專題的安排，有一個自然的順序，即由靜態學到比較靜態學再到動態學。這種安排方式將使得相關的數學資料得到有意義且方便、自然的表達方式。在第二篇平衡分析的討論中，提供了介紹矩陣代數的背景，因為平衡分析常涉及線性聯立方程組的求解。先行介紹矩陣代數的方式，在其他書中不常見，但因為這樣使向量、矩陣、及行列式能靈活地應用在本書的其他各章中，因此這種方式仍是合適的。在第三篇中，對比較靜態學的探討，導出了變率和導數的觀念；（包括了偏導數和全導數）這些將在第四篇的擇優問題上應用到。然而在第三篇和第四篇中，已用到前面所學到的矩陣代數。當進行到第五篇的動態學時，數學也從微分學的領域進入到積分學及微分方程式，並隨之開始差分方程式的討論。在此，讀者將再次發現矩陣代數的用處。最後，在第六篇的數理規劃與競賽理論中，最主要的工具是矩陣代數，同時也論及凸集合的概念。簡言之，在本書中有系統地建立了一個工具箱。所以讀者可依照所予的次序閱讀前四篇（前十二章）。而第五篇和第六篇則可依相反順序閱讀。在數學上，微分方程式直接排在微分學之後將較合理，但在經濟學上，在瞭解動態學之前，而在擇優問題之後，應該接上數理規劃與競賽理論。在這方面讀者可以自行選擇。

筆者寫本書時是依照可讀與可教的原則。在必要的地方更加上圖例以幫助說明。同時本書中更加入了許多交互引證的範例，使讀者能檢討比較，由各種不同論點所作的討論，並將之綜合聯貫。同時，對於某些特別的數學運算，也都加以直覺的或經濟的解釋，以使讀者能獲致前述的成果。幾乎每一節之後都附有許多練習題，讀者應該儘量多做，以得到最大的利益。

雖然本書的主旨是在介紹分析方法，但書中仍對許多經濟模式作了詳盡的討論，包括關於市場模式、工廠與消費者模式、國民所得模式、投入產出模式、及經濟成長模式等的探討。結果，除了與正規的數理經濟課程有相輔的關係外，很明顯地，本書對下列課程也是很好的補充教材，這些課程包括：價格理論、國民所得分析、商業循環、經濟發展及經濟成長等。

本書所列的各項教材已由過去筆者所授課的學生試用。他們的問題和見解，尤其是勞勃泰卡里夫人所提的，常有助於修訂現用的教材。此外，西北大學馬克芮羅夫教授曾細心閱讀手稿，並提供深入的討論與建議，確實促成了許多改進之處。耶魯大學的費景漢教授也閱讀過部份手稿，並提出有價值的意見。對這幾位先進，筆者深致謝意。筆者並感謝康乃狄克大學，在筆者執筆時減輕教學的負擔。最後，但不是不誠意的，筆者對拙荆深表謝忱，她在筆者執筆時放棄了無數原屬於她的時間，並熱誠地貢獻出她的智慧，以幫助筆者，並且代為將手稿打字，筆者在此也深致感激之意。

ALPHA C. CHIANG

下 册 目 次

第五篇 動態分析

第十三章 經濟動態學與積分學

13.1	動態學與積分	468
13.2	不定積分	470
13.3	定積分	482
13.4	廣義積分	492
13.5	積分在經濟學上的應用	497
13.6	多馬成長模式	505

第十四章 連續時間：一階微分方程式

14.1	含常數項之一階常係數線性微分方程式	511
14.2	市場價格動態學	517
14.3	變係數與變數項	522
14.4	正合微分方程式	526
14.5	一階一次非線性微分方程式	536
14.6	定性圖示法	541
14.7	蘇氏成長模式	545

第十五章 高階微分方程式

15.1	含常數項之二階常係數線性微分方程式	553
15.2	多氏負債模式	562
15.3	複數與三角函數	567

15.4	複數根之分析	582
15.5	有價格預估的市場模式	589
15.6	有變數項的微分方程式	595
15.7	高階線性微分方程式	599

第十六章 斷續時間：一階差分方程式

16.1	斷續時間、差分、與差分方程式	604
16.2	一階差分方程式之解法	606
16.3	平衡的動態穩定	613
16.4	蛛網模式	618
16.5	有存貨的市場模式	623
16.6	非線性差分方程式之定性圖示法	628

第十七章 高階差分方程式及聯立方程式之模式

17.1	含常數項之二階常係數線性差分方程式	634
17.2	薩氏乘數——加速之交互作用模式	645
17.3	高階方程式與變數項之推廣化	651
17.4	聯立之線性差分方程式與微分方程式	660
17.5	動態投入產出模式	672
17.6	動態分析的限制	681

第六篇 數理規劃與競賽理論

第十八章 線性規劃

18.1	線性規劃之簡例	684
18.2	線性規劃的通式	695
18.3	凸集合	699
18.4	簡體法則：極點求法	711
18.5	簡單法則：最佳極點求法	716
18.6	簡體法之進級記要	723

第十九章 線性規劃（續篇）

19.1	對偶性	729
19.2	對偶之經濟學解說	736
19.3	活性分析：微量級（個體級）	740
19.4	活性分析：巨量級（總體級）	751

第二十章 非線性規劃

20.1	非線性規劃之本質	759
20.2	柯因與塔克條件	765
20.3	限制條件之檢定	775
20.4	柯因與塔克之充分性理論：凹性規劃	784
20.5	亞洛與恩文之充分性理論：準凹性規劃	793
20.6	經濟上的應用	799

第廿一章 競賽理論

21.1	競賽理論概念	806
21.2	矩形競賽問題之鞍點解	811
21.3	混合策略：無鞍點之場合	818
21.4	矩形競賽問題如線性規劃	827
21.5	重論對偶性	833
21.6	數理規劃與競賽理論之限制	837

索 引	839
-----------	-----

第五篇 動態分析

第十三章

經濟動態學與積分學

在經濟分析上，動態一詞對不同的經濟學者有不同的意義，包莫教授在經濟動態學一書中討論了動態分析的幾種類型，對於動態一詞都有不同的含意，在一篇極有趣的詞義學文章中，曼教授列舉了一張在不同情況下“動態”一詞使用法表，殘酷地表示出人類的本性：明顯地，靜態學是愚昧的反對已經寫的，動態則是本身非常優越的理論。

然而近幾年來，動態一詞已經取得專門的用法，應用到分析形態上，目的是追索研討變數的特定時徑或給予充裕的時間，來決定變數是否定量於某一（均衡）值。這種資料是很重要的，因為可以補足我們研究靜態與比較靜態學之間的差距，在比較靜態學，我們通常假定經濟調整的過程一定會達到平衡，在動態分析，“可達成”一定要正視它，而不可忽略。

動態分析的顯著特性之一是變數的正時，而考慮整個情況下時間的變化，可由兩方面達成，即時間能夠有連續變數或斷續變數，前者是在每一點的時間有不同的變化（例如連續複利），至於後者是在每一段時間改變一次（如利息是每六個月計算一次），由我們所知的時間觀念中，斷續的時間非常的短，而連續的情況，即是此種斷續情況的極限。

我們首先將討論連續時間的情形，而此之前先要了解積分與微分方程式的數理技巧，在第十六、十七章中，利用差分方程式討論斷續時間情形。

13.1 動態學與積分

一般而言，在靜態模式中，主要問題就是尋找能滿足某一特定平

衡情況的內生變數值，應用到擇優模式中，就是求使特定目標函數最大，最小的變數值。（目標函數若假定為二階情況下沒有問題，而一階情況下則成為平衡的情況），相反的，在動態模式中，其主要問題通常是基於所已知改變的類型所作的（所予瞬間變率）變數時徑的描述。

由下例可清楚的說明，假定人口數 H 是依時間改變以變率

$$\frac{dH}{dt} = t^{-1/2} \quad (13.1)$$

問：對於(13.1)如何表人口數 $H=H(t)$ 的時徑？即若人口數 H 與時間 t 遵循(13.1)中特定變率，則且特定形態的函數 $H(t)$ 為何種形式？

讀者將了解，倘若我們已知 $H=H(t)$ ，則可由微分求出 dH/dt 的導函數，在此我們所遇之問題是由導函數找出原函數，而非由原函數去求導函數，我們特需要應用微分或微分學的相反方法。

有關的方法就是積分或積分學，將在下面討論，現在我們討論函數 $H(t) = 2t^{1/2}$ 有一導函數如(13.1)，因此顯然地符合我們的問題。現在的問題是有一類似的函數，如 $H(t) = 2t^{1/2} + 15$ 或 $H(t) = 2t^{1/2} + 99$ 或其他更為一般化的函數如下：

$$H(t) = 2t^{1/2} + c \quad (c \text{ 是任意常數}) \quad (13.2)$$

皆擁有相同的導函數(13.1)，除非常數 c 的值能確定，否則不能決定唯一的時徑。為符合這些，需要附加更多的資料到模式中，通常是原始條件或邊界條件。

如果我們知道原始的人口數 $H(0)$ 即 H 的值在 $t=0$ 時 $H(0)=100$ ，則常數 c 的值已決定。設 $t=0$ 代入(13.2)可得

$$H(0) = 2(0)^{1/2} + c = c$$

若 $H(0)=100$ ，則 $c=100$ ，(13.2)式成為

$$H(t) = 2t^{1/2} + 100 \quad (13.2')$$

而常數不再是任意的，進一步說，對於任何指定原始人口數 $H(0)$ ，時徑將是：

$$H(t) = 2t^{1/2} + H(0) \quad (13.2'')$$

以致在任何時間的點，人口數 H 包括原始人口數 $H(0)$ 的和與時間變數 t ，如此的時徑畫出變數對所有時間的變化而構成動態模式的答案。

[(13.1) 式也是 t 的函數，為何不也考慮答案呢？]

既如此簡單，這個人口例子指出經濟動態學的本質，由變數的行為形式，我們可以求出描述變數時徑的函數。在這個過程中，我們將有一個或更多個任意常數，但如果我們在原始條件中增加充分的資料，我們總是可能確定這些任意常數，使成為定值。

在較易的問題中，如上所述，其結果能由積分法求得，即由所給的導函數去求原函數，在較複雜的問題中，我們將利用一些其他部份的數學技巧，正如微分方程式，因微分方程式是定義任何包含微分或導函數式的方程式，(13.1) 是這類式之一，雖然其為相當簡單的式子，但由於已求出其解，故已解出此方程式。

我們繼續研討積分的基本觀念，因為我們在微積分中以 x 為自變數（非 t ）為了對稱，在此仍然用 x 。然而為了方便起見，我們將用 $F(x)$ 與 $f(x)$ 各自來表示原函數與導函數，而不用一個撇號來區分。

13.2 不定積分

積分的性質 前已提過積分是微分的反運算，倘若對特定之原函數 $F(x)$ 微分而得導函數 $f(x)$ ，若有足夠資料可以幫助確定所需常數，我們可由將 $f(x)$ 積分而求得 $F(x)$ 。函數 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的積分（反導數）。這兩種過程可以比喻為研討家族樹式的兩種方法：積分是找出