高等学校教学参考书

常微分方程讲义

王柔怀　伍卓群编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

常微分方程讲义

王柔怀　伍卓群编

高等教育出版社

全书分为七章，各章内容是：绪论（基本概念）；初等积分法；线性方程组与方程；常系数线性方程与方程组；一般理论；定性理论与稳定性理论介绍；一阶线性与拟线性偏微分方程。在各章节之后都配备一定数量的习题。书中除了仔细论述综合大学数学专业与计算数学专业微分方程课程通常的材料外，也用小字为读者提供了一些进一步思考和学习的材料与线索。

本书可作为高等学校数学专业微分方程课程的教学参考书。对于其他希望比较深入地了解常微分方程这门学科的面貌的读者，它也可供作入门书之用。

常微分方程讲义

王柔怀　伍卓群编

高等教育出版社出版（北京沙滩后街）

二二〇七工厂印装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号　13010 · 0117　开本850×1168 1/32　印张8 12/16

字数225,000　印数215,120—218,630　定价（6）￥1.30

1963年12月第1版　1987年3月北京第8次印刷

序

与微积分学一起成长起来的(常)微分方程論，它的重要性是早就被人們公认了的。这首先是由于，它是各种精确自然科学中表述基本定律和各种問題的根本工具之一，换句話說，只要列出了相应的微分方程，并且有了解(数値地或定性地)这种方程的方法，人們就得以預見到，在已知条件下这种或那种运动过程将怎样进行，或者为了实現人們所希望的某种运动应該怎样設計必要的装置和条件等等。总之，微分方程从它誕生起即日益成为人类认識并进而改造自然的有力工具，成为数学科学联系实际的主要途徑之一。早在十七至十八世紀，它就作为牛頓力学的得力助手，在天体力学和其他机械力学領域內显示了巨大的功能；这只要举出科学史上一件大事为证就够了：在海王星被实际观測到之先，这顆行星的存在就被天文学家用微分方程的方法推算出来了。时至今日，微分方程仍然是最有生命力的数学分支之一。在长期不断的发展过程中，它一方面直接从与生产实踐联系的其他科学技术中汲取活力，另一方面又不断以全部数学科学的新旧成就来武装自己，所以它的問題和方法越来越显得丰富多彩。現今不仅专业研究微分方程的数学工作者愈加众多，而且力学、电子技术、自动控制、星际航行等各个学科或尖端技术領域內的研究工作者也都以它为必需的工具了。

以上只是非常粗略地提了一下常微分方程这一分支在一般科学中所起的作用。至于它在数学科学內部的地位，可以这样說，凡是采用无穷小分析方法研究任何对象，大抵都离不开使用微分方程。正是因为如此，所以它也是研究几何对象(曲綫、曲面以及更一般的空間形式)，以及某些代数对象(連續群等)的基本工具之一。另一方面，它的每一步进展，都离不开实变与复变函数论、拓

扑学以及代数几何等分支的支援。过去曾經由于微分方程发展的需要而产生了拓扑学与連續群論。可以預料，微分方程进一步发展的需要，还会推动其他分支的发展。

常微分方程在数学专业的教学計划中是一門基础課。因而在教学中，除了应該在可能范圍內尽量让学生对本学科在一般科学中的作用与現时面貌获得一定的概括了解外，更主要的还是应該服从整个教学計划的安排，把讲授重点限制在最基本的从而是比較經典和不太专門的部分。这部教材就是本着这种原則来編写的。书中着重讲述的是綜合大学在本課程中通常讲授的那些內容。我們也曾力图通过这些內容的讲解反映这門学科所討論的問題在一般科学中的作用，以及某些重要的新动向。此外，我們认为一部教科书除了提供学生必須学习的主要內容之外，容納一些引导有兴趣的讀者进一步思考和学习的材料或綫索也是恰当的。因此，我們用小字在一些章节里添写了一些課堂上不必讲授只供参考的材料。

現在逐章簡单介紹全书的內容，并顺带說明我們編写时的某些考虑。

在第一章緒論中，讲解有关常微分方程的一些基本概念，更主要的是向初学者交代本課程所将討論的問題的意义和背景。我們自己的教学經驗是，从一开始就注意逐步深入地交代所将討論的主要問題的提法及其实际背景，关系到教学效果很大，因为对学生們說来，他們还是第一次接触到綜合性較大，实际背景也較深的問題。就是基于这点經驗，所以这一章写得較一般书籍的緒論要細致一些。但其中的某些部分完全可以移到以后适当地方去讲。建議讀者最好在学习过程中随时回头来念念这一章，重新认識一下本課程的总的图景，这样是会有好处的。

第二章讲初等积分法。关于这一章的要領请看該章最后的

小結。

第三章讲綫性方程与方程組的一般理論。在这里我們首先針对所論特殊情况,給出了存在与唯一性定理的证明,然后在此基础上展开其余的討論。虽然这里讲述存在与唯一性定理和第五章有所重复,我們认为至少从教学法角度看是值得的。先就簡单情形讲一次,并且立刻就接着讲它的成套的运用,这会为理解以后要讲的更一般的存在与唯一性定理的证明方法及其意义奠立很好的底子。而且这样安排也使得整个教材的系統性更强一些,至少我們自己的感觉是这样的。

第四章讲常系数綫性方程与方程組的解法。其中 §3 比較一般同类性质的教本运用綫性代数知識稍多一点。但除化矩陣成 Jordan 标准形的定理假定为已知(证法不論学过哪一种)外,其余用到的不多一点,估計讀者有可能未学过的知識,书中都有詳細論证。采用本书的教师同志稍一細察就会发現,用本章 §3 所述基本解組的結构定理的陈述方式,在讲授具体解题方法时会有一些方便。

第五章讲非綫性方程的基本理論。这包括存在与唯一性定理,延展定理,以及解对初值和参数的連續性和可微性定理。对于后二定理,我們給出的是在各种应用中实际需要的"整体"的形式。它們的证明并不比那种"局部"形式的困难,只不过定理的意思初学者可能理解起来要稍难一点。

鉴于定性与稳定性理論近来在应用上与理論上的重要价值,我們在第六章中对它們作了一个粗綫条的介紹。这章的內容讲多讲少,使用本书的教师同志完全可以灵活掌握。

第七章的內容是一阶偏微分方程。我們其实只讲了綫性和拟綫性方程。着重的是特征綫法的基本概念和初等解法。

本书各章都配备相当数量的习题。这些都是在吉林大学数学

系历年来微分方程习题課中积累起来的。其中有些加＊号的习題是打算留給有兴趣而又有余力和时間的那些学生去作的。

現在再提一下本书成书的經过。这本不可避免还会包含着許多缺点的书，乃是吉林大学(前名东北人民大学)数学系微分方程課程的教材在将近十年中經过不断修改加工而成的。早在1953年王湘浩教授即为当时的数学系二年級写过一份讲义。其后王柔怀、伍卓群、李岳生、陈銘俊等相继在王柔怀主持下不断进行了改写或加工。这回的最后定稿則主要是王柔怀与伍卓群执笔写成的，陈銘俊也写了其中一部分。习題的編选工作是由陈銘俊承担的，还有周欽德同志亦为此作了好些准备工作。在本书原稿送审过程中，审查同志曾提出了不少改进意見，使得本书增色不少。編者謹向审查同志表示眞誠的感謝。这里順便向吉林大学数学系領导特别致以謝意，沒有他們对教材建設工作的一貫重視和支持，这本虽不成熟的书也是不能与讀者見面的。同时我們很誠恳地希望这本书出版以后，能得到各方的指教，俾便将来进行修改。

最后我們应向讀者声明一点，即我們这部书由于其性质和篇幅的限制，不是关于常微分方程比較全面，对各种重要問題与方法都有所論述的书。例如关于边值問題，按教学計划是放到数学物理方程中去了，所以在本书中除了有意在习题內让学生接触一下之外，簡直就未論及。对于十分重要的漸近方法，由于其稍近专門，本书也未触及。至于像复域中的微分方程的解析理論，由于需要复函数論的准备知識，也在本书的論列范圍之外。讀者学过本书以后，如欲进一步研讀，可以参考本书相应章节所提到的参考书。此外，我們願意向讀者特别推荐最近出版的意大利数学家 G. D. Tricomi 所著“Differential Equations(微分方程)”一书(系英譯本，1961年出版)，此书的最大优点是能在不涉及高深数学准备的水平上，比較透徹地闡述了本书內沒有讲到的部分的基本問題和基本方法。

編　者　1962年8月于长春

目　录

第一章　緒論

§1. 微分方程的例子

讀者已經熟悉像代数方程、三角函数方程等那样一些方程。在那些方程中，作为未知而要去求的是一个量的某几个特定值。但在自然科学的許多領域中，却常常需要研究另外一类性质上完全不同的方程。在这类方程中，作为未知而要去求的是整个函数。这类方程統称为函数方程。讀者已經遇到过的隐函数方程就是这类方程中最簡单的一种。

我們这部讲义所将論述的常微分方程可以說是最重要的函数方程的一种。顾名思义，所謂微分方程就是联系着自变量、未知函数以及它的某些微商的关系式。

下面就是一些微分方程的例子：

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=A\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dv}{dt}+\left(1-\frac{h^2}{t^2}\right)x=0\ \text{(Bessel 方程)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{(热傳导方程)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{(波动方程)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \text{(Laplace 方程)}.$$

在前三个方程中，x 表未知函数，t 表自变量；在后三个方程中，u 表未知函数，分別依賴于自变量 t 与 x，或 x 与 y。一微分

方程，如果其中的未知函数只与一个自变量有关，则称为**常微分方程**；如果未知函数与几个自变量有关，幷且方程中出現未知函数对几个变量的微商，则称为**偏微分方程**。上面前三个方程是常微分方程，而后三个则是偏微分方程。我們这部讲义，除了最后一章外，所研究的都是常微分方程。

許多物理現象所服从的規律可以用微分方程表現出来，因而許多物理和技术問題的研究在相当程度上归結到这类方程的数学研究。这就是微分方程的重大意义。例如借微分方程之助，就可以依据熟知的牛頓定律来研究力学系統的运动。

現在用最簡单的例子来說明这一点。設有一质量为m的质点在x軸上运动，它的坐标用x来表示。在质点的运动过程中，它的坐标x随时間t而变动。要知道质点是如何运动的，就是要知道x对时間t的函数依賴关系。設运动是在力F作用下进行的，又設力F与时間t、质点的位置坐标x和速度$v=\frac{dx}{dt}$有关，即$F=$ $=F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)$。按照牛頓第二定律，力$F$应等于质量$m$乘以加速度$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$，这就是說，在任何时刻$t$，等式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

都应該成立。这便是描写所論质点运动的函数$x(t)$所应满足的微分方程，它就是牛頓第二定律的数学表示。通过它，确定质点如何运动的力学問題，便化成了解微分方程的数学問題。

很明显，所論质点的运动方式，不仅依賴于由方程(1.1)所表示的一般力学規律，而且还依賴于它在什么时刻$t=t_0$从什么位置$x=x_0$起，以什么样的初速度$x_0'=\frac{dx(t_0)}{dt}$开始运动。要确定所論质点的运动方式，就是要求方程(1.1)之满足“初始值条件”:

$$(1.2)\qquad x(t_0)=x_0,\quad \frac{dx(t_0)}{dt}=x_0'$$

的特定解。从物理意义上看，这样的解一定存在而且唯一，即方程(1.1)有而且只有一个满足所說初始值条件(1.2)的解。

不管质点从哪一个初始位置以哪一个初速度开始运动，只要是在同一个函数 $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ 所表示的力的作用下，表示运动的函数 $x(t)$ 都必須滿足方程(1.1)。于是因为对应于无穷多不同的初始位置与初速度，就有无穷多不同的运动，可見方程(1.1)不是只有一个或几个解，而是有无穷多个解。

微分方程理論在十七世紀末就开始发展起来，很快地成了研究自然現象的强有力的工具。远在十七、八世紀，在力学、天文、物理和技术科学中，就已經借助于微分方程，取得了巨大的成就。质点动力学和刚体动力学的問題很容易地化成微分方程求解的問題。1846 年 Leverrier 根据这个方程預見到了海王星的存在，并确定出海王星在天空中的位置。到現在，这个数学工具在力学、物理以及工程技术各領域中，已經获得日新月异的应用。自动控制和各种电子学装置的設計，彈道的計算，飞机和导彈飞行的稳定性的研究，或者化学反应过程稳定性的研究等，都可以化归为求微分方程的解，或者研究解的性质。現在的情况是，一方面应用微分方程理論已經取得了許許多多成就，另一方面是現有的理論还远不能滿足需要，对于工程师感到兴趣的很多有关微分方程的問題，研究微分方程的数学家却不能給出滿意的回答。

下面我們再举一些例子，說明各种不同物理过程的研究如何化为微分方程的研究。

例 1 已知放射性物质鐳的裂变規律是：裂变速度与存余量成比例。設已知在某一时刻 $t=t_0$，鐳的份量是 R_0 克，要确定鐳在任意时刻 t 的份量 $R(t)$。

由于 $\frac{dR(t)}{dt}$ 是鐳的增长速度，所以它的裂变速度应該是 $-\frac{dR(t)}{dt}$，从而按裂变規律，我們有

$$\frac{dR}{dt}=-kR, \tag{1.3}$$

其中 k 是比例常数。

要解决上述問題就是要由方程 (1.3) 确定出函数 $R=R(t)$。为此，注意由(1.3)可知 $R=R(t)$的反函数 $t=t(R)$满足方程

$$\frac{dt}{dR}=-\frac{1}{kR}.$$

这里解这个微分方程的問題，其实就是已知微商而要求原函数。因此两端积分便得到

$$t=-\frac{1}{k}\log R+C,$$

从而

$$R=e^{-kt+kC}=C_1e^{-kt}, \tag{1.4}$$

其中 C 和 C_1 是任意常数。

还得从上面推出的(1.3)的所有解的通用表达式(1.4)中，提取出我們所要的特解，即满足初值条件

$$R(t_0)=R_0$$

的解。为此，只須以 $t=t_0$ 代入(1.4) 的右端并令所得結果为 R_0 以确定常数 C_1。显然 $C_1=R_0e^{kt_0}$，代入(1.4)，最后便得到所要的解：

$$R=R_0e^{-k(t-t_0)}.$$

从数学上看，方程(1.3)所表示的乃是函数 R 的一个变化規律，即其减小速度 $-\frac{dR}{dt}$ 与它本身成比例。因此，虽然我們是由鐳的裂变这一特殊問題导出方程(1.3)的，但方程(1.3)的应用远不止此。

事实上，只要一物理量的变化服从同样的规律，则它的变化显然也就可以用方程(1.3)来确定。

例2　設质量为m的一质点沿水平軸Ox运动于有阻力的介质中，例如在液体或气体中。設它所受的力类似于图1所示的按Hooke定律起作用的两个彈簧的彈性力。Hooke定律是說，彈性力指向平衡位置，大小与质点离平衡位置的偏差成比例。設平衡位置在点$x=0$。于是质点在点x处所受到的彈性力等于$-bx$ $(b>0)$，这里負号表示力的方向与质点位移的方向相反。

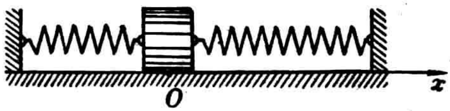

图 1.

設介质对质点的阻力R与运动的速度$v=\frac{dx}{dt}$成比例，即$R=-a\frac{dx}{dt}$ $(a\geqslant 0)$。根据牛頓第二定律，质点的质量乘以加速度应等于所受力的总和，即

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt},$$

或

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0\quad(a\geqslant 0,\ b>0). \tag{1.5}$$

这就是所論质点的运动方程。

如果除了上述的彈性力和阻力外，质点还受到另一外力$F=F(t)$的作用，則运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=F(t). \tag{1.6}$$

无論方程(1.5)或(1.6)都有无穷多个解。所要求的乃是满足初值条件

$$x(t_0)=x_0,\qquad \frac{dx(t_0)}{dt}=x_0'$$

的解。在一般情形下这样的特解怎么求,我們将在第四章里讲述。

例 3 在最簡单的閉合电路(簡称迴路)中,电流振蕩的研究也归結为形如 (1.5) 的方程。这样的迴路如图 2 所示。在图 2 中,左边代表电容为 C 的电容器,它的两极和自感 L 以及电阻 R 串联成閉合迴路。設在某一时刻将电容器充电使之得到一个电位差,以后便将电源切断。由于有自感 L 存在,迴路中产生振蕩的电流。

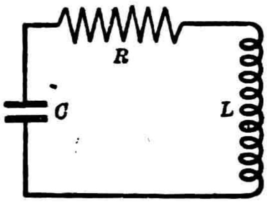

图 2.

为了推出振蕩規律,以 $v(t)$,或簡单地用 v,表在时刻 t 电容器两极間的电位差,以 $i(t)$ 表电流强度,以 R 表电阻。由物理上熟知的电学定律,在任何时刻,$i(t)R$ 均等于迴路內的总电动势,而后者包括由电容器两极間电位差所产生的电动势 $-v(t)$ 以及自感电动势 $-L\dfrac{di}{dt}$。因此

$$iR=-v-L\frac{di}{dt}. \tag{1.7}$$

以 $Q(t)$ 表在时刻 t 电容器上的电量,則在迴路上每一时刻的电流强度 $i(t)$ 等于 $\dfrac{dQ(t)}{dt}$,而电容器两极間电位差 $v(t)$ 等于 $\dfrac{Q(t)}{C}$。因此

$$i=\frac{dQ}{dt}=C\frac{dv}{dt},\qquad \frac{di}{dt}=C\frac{d^2v}{dt^2},$$

从而(1.7)可改写成

$$L\frac{d^2v}{dt^2}+R\frac{dv}{dt}+\frac{1}{C}v=0. \tag{1.8}$$

这就是所論迴路中的电振蕩方程。

出現在上述各个例子中的微分方程,都只含有一个未知函数。

許多物理过程的研究常常提出一組微分方程，这些方程合在一起将若干个未知函数和它們的某些微商联系起来。

作为最簡单的例子，我們来看质量为m的质点在(x_1, x_2, x_3)空間內的运动。质点的空間位置可用向量$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$来表示。設运动是在力$\boldsymbol{F}=(F_1, F_2, F_3)$作用下进行的，这里$F_1, F_2, F_3$表沿坐标軸方向的分力。又設力$\boldsymbol{F}=(F_1, F_2, F_3)$与时刻$t$质点的位置$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$以及速度$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$有关。于是根据牛頓第二定律，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\boldsymbol{F}\left(t, \boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right),$$

或

$$(1.9)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=F_1\left(t; x_1, x_2, x_3, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=F_2\left(t; x_1, x_2, x_3, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2}=F_3\left(t; x_1, x_2, x_3, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right). \end{cases}$$

这便是联系未知函数$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$以及它們的一阶和二阶微商的一組关系式，称为一个微分方程組。

习　　題

1. 求(t, x)平面上的一曲綫，使其上每点处的切綫与該点的向徑和oy軸构成一等腰三角形。

2. 已知一平面曲綫經过某定点M_0，且曲綫上每一点M(M_0点除外)的切綫与直綫M_0M的交角恒等于定数α。試求这曲綫所适合的微分方程。

3. 求以初速度v_0在空气中鉛直上抛的物体的运动方程，設該物体的质量为m，物体所受的阻力与速度的平方成正比例，比例常数为k^2。又問物体达到最高点的时間是多少？

4. 一质点在重力作用下沿某曲綫无摩擦地滑动，在水平方向成等速运动，試求这曲綫所适合的微分方程。

提示：利用能量不灭定律。

5. 求“物理”摆——围繞水平軸自由旋轉的物体——在平衡位置附近微振动的微分方程。

§2. 一些一般概念

1 在§1已經說过，所謂(常)微分方程就是联系自变量 t 与未知函数 x 和它的某些微商 $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}$ 的一个关系式

$$F\left(t; x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}\right)=0, \tag{2.1}$$

其中 F 是它所依賴的 $n+2$ 个变量的已知函数。出現在方程中的未知函数的微商的最高阶数 n 称为方程的阶。§1 中的(1.3)是一阶方程，而(1.5)，(1.6)，(1.8)是二阶方程。上面的(2.1)便是 n 阶方程的一般形式。

微分方程的解(也常叫作积分)这个概念在§1中已經用过了，現在来把它确切化。設 I 是 t 軸上某区間。函数 $\varphi(t)$ 称为微分方程(2.1)在区間 I 上的解，如果 $\varphi(t)$ 在区間 I 上有定义，具有从一到 n 阶微商 $\frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}, \cdots, \frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}$，并且能使

$$F\left(t; \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots, \frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right)\equiv 0 \quad \text{对所有 } t\in I.$$

在§1中就已經指出过，一个微分方程不只有一个或几个解，而有为数无穷的一整族解。在§1还指出过，在应用上除了要知道这整族解的屬性外，并不要求求出其中的每一个来，而是要求求出其中滿足某种指定条件(通常称为**定解条件**)的解来。求滿足某种定解条件的解的問題称为**定解問題**。最重要的定解条件就是§1中已經看到过的**初始值条件**，或簡称**初值条件**。

对于 n 阶方程(2.1)，初值条件就是