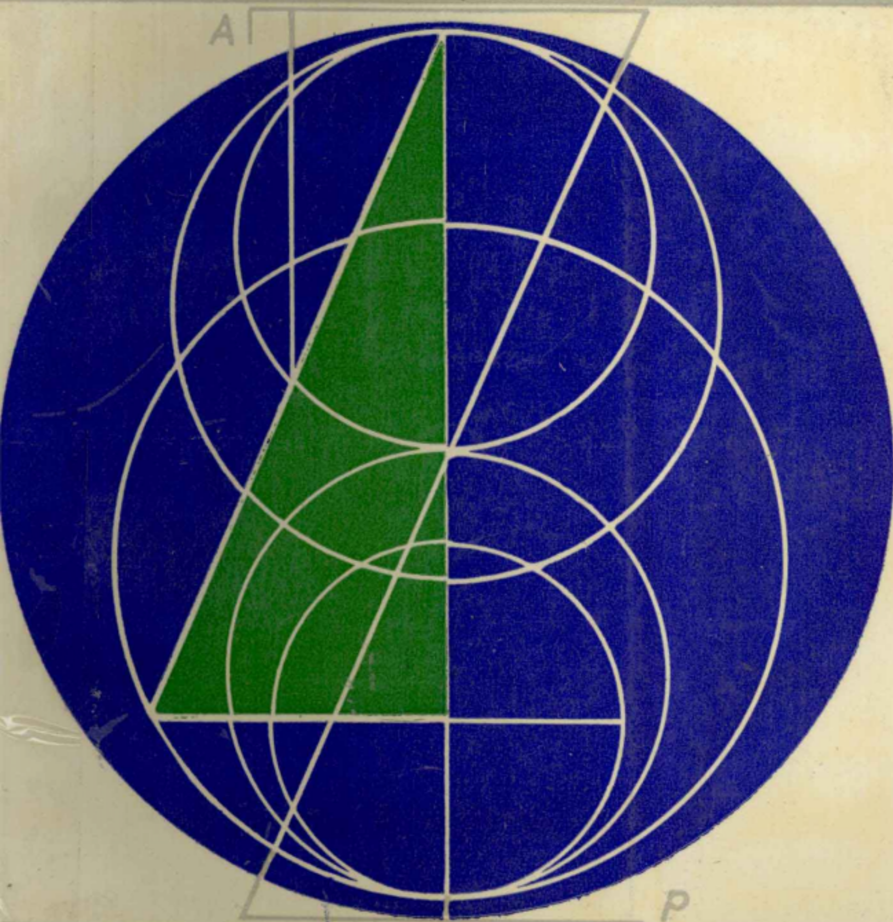
DAISHU

超同调代数



CHAOTONGDIAO
DAISHU

江声远　著

江西高校出版社

责任编辑　辜晓波
特约编辑　许国刚
封面设计　揭同元

ISBN7—81033—043—8/O·4

定价：5.60 元

超同调代数

江声远 著

江西高校出版社

超同调代数　　江声远著

江西高校出版社出版发行　　南昌市北京西路77号

江 西 省 新 华 书 店 经 销　　江西新华印刷厂印刷

开本850×1168　1/32　　印张11.25　　插页 2　　字数280千字

1991年 2 月第 1 版　　1991年 2 月第 1 次印刷　　印数 1—1000

ISBN7—81033—043—8/O・4　　定价：5.60元

序

在模的同调理论中，为了研究的方便，有时用“模的复形”来代替“模”. 同时，一个模总可以看成是“浓缩”于零度的复形（即复形的其它各项均为零模）. 这就启发人们试图将模的同调理论尽可能推广成模的复形的同调理论. 这个理论近一些年来，有了较大的发展，对于Noether可换环上的有界复形，特别是具有有限生成上同调模的有界复形，取得了很好的结果.

例如，我们熟知，对于局部环A上的模，它的维数（投射维数pd，内射维数id，平坦维数fd，层次depth以及krull维数dim等）之间有一些重要关系，其中最著名的是：对于有限生成A-模M，当$\mathrm{pd}M<\infty$时，

$$\mathrm{pd}M+\mathrm{depth}M=\mathrm{depth}\,A;$$

当$\mathrm{id}M<\infty$时，

$$\mathrm{id}M=\mathrm{depth}\,A.$$

通过将模的这些维数恰当地推广到模的复形，可以证明这两个著名等式对于具有有限生成的上同调模的有界复形仍然成立.

从模到模的复形的推广，不仅是概念的深化，而且有不同的技巧. 特别是几个关于复形的Hom函子与张量积函子的恒等式，替代了通常的正则序列的理论，而成为论证的关键.

上述的这些思想以及随之形成的方法，产生了“模的复形的同调理论”，人们也称它为“超同调代数”. 它涉及到环、模、范畴、交换代数等许多基础学科，逐渐发展成同调代数的一个重要方面.

江声远所著的《超同调代数引论》一书系统地介绍了模的复

形的同调理论的基础知识，着重论述了从通常模的同调到模的复形的同调的发展过程，深入浅出，简明易懂，是国内第一本介绍这一理论的书籍，因此乐于推荐，并作此序。

周伯壎　于南京大学1990年4月25日

前　言

在模的同调理论研究中已经出现的以“模的复形”替代“模”的这种趋势，促成了“模的复形的同调理论”的出现和发展，而逐渐形成了《超同调代数》(Hyper Homological Algebra)这样一个重要分支．本书试图介绍超同调代数的基础内容．为便于读者掌握，本书着重于介绍从模的同调理论发展到模的复形的同调理论的过程，注意用与模的同调理论的对比的方法来阐明各个概念．

第一章建立复形的等价，以奠定分类的基础．这里，拟同构的概念是基本的．接着，在将模的分解发展为模的复形的分解（第二章）之后，借助于双复形的全复形，定义了复形的Hom与$\otimes$，分别导出“超Ext”及“超Tor”函子，形成复形的同调理论（第三章）．第四章导出四个关于复形的Hom与$\otimes$的函子恒等式，将这些恒等式应用于局部环上的复形，又得到几个关于复形的上（下）确界的恒等式，这是我们得出一些重要结论的关键性工具．然后，将模的支集的概念推广为复形的支集（第五章），为研究复形的维数提供必要的基础．第六章介绍复形的Bass数与Betti数，并研究它们的基本性质．当然，它们分别是模的Bass数与Betti数的推广．最后两章，建立复形的各种维数，这些维数是指：复形的层次(depth)、维数、余维数、内射维数、平坦维数与投射维数，并讨论其基本性质以及相互间的关系．

为方便读者，本书自含必要的基础知识．在适当的地方，穿插了关于模及模的同调的有关内容．例如，第二章讲述了模范畴的Hom函子与张量积函子，投射盖与内射包等内容；第三章复习了模范畴的导出函子；第五章讲述了模的支集、相伴素理想等内

容．因此，我们只要求读者具有一般的抽象代数的基础．

全书的论述，不可避免地使用了范畴语言．事实上，这是必要的，也是方便的．为使读者不必花费时间去阅读专门介绍范畴的论著，本书把所需用到的范畴语言及有关知识，写成一个简要的附录．建议对范畴语言还不很熟悉的读者，在阅读本书之前，可先看看这个附录．

本书的选材主要参考了H-B Foxby的论文及综述．著者是在丹麦哥本哈根大学留学期间从H-B Foxby 教授那里学习超同调代数的，在此表示深切的谢意．

在写作过程中，作者受到周伯壎教授、戴执中教授和佟文廷教授的支持和鼓励，江西省教育委员会、江西师范大学领导及数学系的同志们关心该书的出版，江西高校出版社为它做了大量工作，研究生张印火学习了书稿并协助搜集了一些文献，在此一并表示感谢．

由于作者水平所限，书中难免有不当之处，恳切地盼望读者指正．

江声远　1990年4月于江西师范大学

目　　录

第一章　复形的等价

本章介绍模的复形的基本知识，建立复形范畴及复形的等价等基本概念。这些内容是本书的基础。

§1.1　模的复形

令A表示有单位元的结合环。A-模指环A上的左酉模，将A-模同态简称为A-同态或模同态。

定义1　设A-模与A-同态的序列

$$\cdots \longrightarrow X^{l-1} \xrightarrow{\partial_X{}^{l-1}} X^l \xrightarrow{\partial_X{}^l} X^{l+1} \longrightarrow \cdots \qquad (1.1)$$

使得对一切$l \in \underline{\mathbf{Z}}$（本书中，$\underline{\mathbf{Z}}$总表示整数集）

$$\partial_X{}^l \partial_X{}^{l-1} = 0, \qquad (1.2)$$

则（1.1）叫做一个复形〔注〕. 称X^l为它的第l项，也简述为它的l-项；$\partial_X{}^l$为它的第l个微分；A称为它的系数环. l-项在图中标为(l).

为方便，常用粗体字母表示复形，将(1.1)写成$\mathbf{X}$. 复形$\mathbf{X}$的l-项也表示为$\mathbf{X}^l$.

如果所有的微分都是零同态，则此复形叫做平凡复形。

若对一切充分小的$l \in \underline{\mathbf{Z}}$，都有$X^l = 0$，即

$$\mathbf{X} = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^i \longrightarrow X^{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

便说复形$\mathbf{X}$是有下界的；若对一切充分大的$l \in \underline{\mathbf{Z}}$,都有 $X^l = 0$,即

$$\mathbf{X} = \quad \cdots \longrightarrow X^{s-1} \longrightarrow X^s \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

便说复形$\mathbf{X}$是有上界的。若复形$\mathbf{X}$既是有上界的，又是有下界的，则称$\mathbf{X}$为有界复形。特别地，单独一个A-模M总是一个复

形，这只要让$X^0=M$，其余的$X^l(0\neq l\in\underline{\mathbf{Z}})$都是零模，所有的微分都等于零就行了。这样，一个模可看成一个有界复形。复形是模的概念的推广。如果一个复形的所有项都是零模，这也是一个有界复形，称为零复形，我们用粗体字母$\mathbf{0}$来表示它。

对于复形$\mathbf{X}$和$l\in\underline{\mathbf{Z}}$，各个微分$\partial_X{}^l$的核、象、余核和余象是我们常常会遇到的。在需要或可能简化的场合，我们用以下字母表示它们，即：

$$Z_X{}^l=\ker\partial_X{}^l; \tag{1.3}$$

$$B_X{}^l=\operatorname{Im}\partial_X{}^{l-1}; \tag{1.4}$$

$$C_X{}^l=\operatorname{coker}\partial_X{}^{l-1}=X^l/B_X{}^l; \tag{1.5}$$

$$D_X{}^l=\operatorname{coim}\partial_X{}^l=X^l/Z_X{}^l. \tag{1.6}$$

对于$l\in\underline{\mathbf{Z}}$，商模

$$H^l(\mathbf{X})=Z_X{}^l/B_X{}^l$$

叫做复形$\mathbf{X}$的第l个上同调模。

复形$\mathbf{X}$的同调复形是指序列

$$\cdots\longrightarrow H^{l-1}(\mathbf{X})\longrightarrow H^l(\mathbf{X})\longrightarrow H^{l+1}(\mathbf{X})\longrightarrow\cdots,$$

记成$H(\mathbf{X})$，它的l-项是$H(\mathbf{X})^l=H^l(\mathbf{X})$，它的所有微分都是零同态。可见，上同调复形是平凡复形。

若对一切$l\in\underline{\mathbf{Z}}$都有$H^l(\mathbf{X})=0$，则(1.1)是正合列。这时，$\mathbf{X}$叫正合复形。所谓模同态的短正合列是指形如

$$0\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow K\longrightarrow 0$$

的正合复形，N和K分别称为它的左项与右项。

定义 2 对于一个复形$\mathbf{X}$和m，$n\in\underline{\mathbf{Z}}$，以下几个相应于$\mathbf{X}$的复形统称为$\mathbf{X}$的截断复形：

$$\mathbf{X}^{<n}=\ \cdots\longrightarrow X^{n-2}\xrightarrow[\partial_X{}^{n-2}]{}X^{n-1}\xrightarrow[\widetilde{\partial}_X{}^{n-1}]{}Z_X{}^n\longrightarrow 0,$$

其中$\widetilde{\partial}_X{}^{n-1}$定义为

$$\widetilde{\partial}_X^{\,n-1}(x) = \partial_X^{\,n-1}(x) \qquad (x \in X^{n-1}); \qquad (1.7)$$

$$\mathbf{X}^{\geqslant m} = \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_X^{\,m} \xrightarrow[\overline{\partial}_X^{\,m}]{} X^{m+1} \xrightarrow[\partial_X^{\,m+1}]{} X^{m+2} \longrightarrow \cdots,$$

其中$\overline{\partial}_X^{\,m}$定义为

$$\overline{\partial}_X^{\,m}(\overline{x}) = \partial_X^{\,m}(x) \qquad (x \in X^m,\ \overline{x} \in C_X^{\,m}); \ (1.8)$$

$$\mathbf{X}^{<n} = \quad \cdots \to X^{n-2} \xrightarrow[\partial_X^{\,n-2}]{} X^{n-1} \xrightarrow[\eta]{} D_X^{\,n-1} \longrightarrow 0,$$

其中η是自然同态;

$$\mathbf{X}^{>m} = \quad \cdots \to 0 \longrightarrow B_X^{\,m+1} \xrightarrow[j]{} X^{m+1} \xrightarrow[\partial_X^{\,m+1}]{} X^{m+2} \to \cdots$$

其中j是单射同态。

根据(1.7),$\mathrm{Im}\widetilde{\partial}_X^{\,n-1} = \mathrm{Im}\partial_X^{\,n-1} \subseteq Z_X^{\,n}$; 又$\widetilde{\partial}_X^{\,n-1}\partial_X^{\,n-2} = \partial_X^{\,n-1}\partial_X^{\,n-2} = 0$。所以,$\mathbf{X}^{\leqslant n}$是复形,而且,$\ker \widetilde{\partial}_X^{\,n-1} = \ker\partial_X^{\,n-1}$。由(1.8)易知$\overline{\partial}_X^{\,m}$是可定义的,这是因为$\overline{x_1} = \overline{x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Im}\partial_X^{\,m-1} \subseteq \ker\partial_X^{\,m} \Rightarrow \overline{x_1} - \overline{x_2} \in \ker \overline{\partial}_X^{\,m} \Rightarrow \overline{\partial}_X^{\,m}(\overline{x_1}) = \overline{\partial}_X^{\,m}(\overline{x_2})$。而且$\mathrm{Im}\overline{\partial}_X^{\,m} = \mathrm{Im}\partial_X^{\,m}$,同时

$$\ker \overline{\partial}_X^{\,m} = \{x + \mathrm{Im}\partial_X^{\,m-1} \mid \partial_X^{\,m}(x) = 0\} = H^m(\mathbf{X}) \qquad (1.9)$$

又$\partial_X^{\,m+1}\overline{\partial}_X^{\,m} = \partial_X^{\,m+1}\partial_X^{\,m} = 0$。所以,$\mathbf{X}^{\geqslant m}$也是复形。为说明$\mathbf{X}^{<n}$是复形,只须注意$\mathrm{Im}\partial_X^{\,n-2} \subseteq Z_X^{\,n-1} = \ker\eta$。最后,对于$b \in B_X^{\,m+1}$,有$x \in X^m$使得$b = \partial_X^{\,m}(x)$,$\partial_X^{\,m+1}j(b) = 0$,所以,$\mathbf{X}^{>m}$也是复形。

以下诸命题给出截断复形的上同调模,只要直接计算即可证得。

命题 1 $H^l(\mathbf{X}^{\leqslant n}) = \begin{cases} H^l(\mathbf{X}), & 对于\ l \leqslant n, \\ 0, & 对于\ l > n. \end{cases}$ □

命题 2 $H^l(\mathbf{X}^{\geqslant m}) = \begin{cases} H^l(\mathbf{X}), & 对于\ l \geqslant m, \\ 0, & 对于\ l < m. \end{cases}$ □

命题 3 $H^l(\mathbf{X}^{<n}) = \begin{cases} H^l(\mathbf{X}), & 对于\ l < n, \\ 0, & 对于\ l \geqslant n. \end{cases}$ □

命题 4 $H^l(\mathbf{X}^{>m}) = \begin{cases} H^l(\mathbf{X}), & 对于\ l > m, \\ 0, & 对于\ l \leqslant m. \end{cases}$ □

定义 3 对于一个复形$\mathbf{X}$和一个整数m，可按如下方式定义一个复形$\mathbf{X}[m]$，使得对于$l \in \underline{\mathbf{Z}}$，

$$\mathbf{X}[m]^l = \mathbf{X}^{l+m} \tag{1.10}$$

$$\partial^l_{\mathbf{X}[m]} = (-1)^m \partial_X{}^{l+m}. \tag{1.11}$$

$\mathbf{X}[m]$叫做复形的$\mathbf{X}$的平移复形。

例如，对于（1.1）中的复形$\mathbf{X}$，

$$\mathbf{X}[1] = \quad \cdots \longrightarrow \underset{(l-1)}{X^l} \xrightarrow[-\partial_X{}^l]{} \underset{(l)}{X^{l+1}} \xrightarrow[-\partial_X{}^{l+1}]{} X^{l+2} \longrightarrow \cdots;$$

对于一个A-模M和$m \in \underline{\mathbf{Z}}$，

$$M[m] = \quad \cdots \to 0 \to \underset{(-m)}{M} \to 0 \to \cdots \to \underset{(0)}{0} \to \cdots$$

显然，$\mathbf{X}[m]$的 0-项必为$\mathbf{X}^m$，m为任意整数。

关于平移复形的上同调模，我们有以下

命题 5 设$\mathbf{X}$为任一复形，l，$m \in \underline{\mathbf{Z}}$，则

$$H^l(\mathbf{X}[m]) = H^{l+m}(\mathbf{X}).$$

证　由定义即知。□

设S是环A的乘法闭集，M为A-模．我们知道，分式模$S^{-1}M$是分式环$S^{-1}A$上的模[N1]，有时将$S^{-1}M$记为M_S，将$S^{-1}A$记为A_S。特别地，对于A的素理想P，乘法闭集 $S = A - P$ 所确定的分式环记为A_P，分式模记为 M_P。再令N为A-模，f：$M \to N$为A-同态，则有相应的A_S-同态

$$f_S: M_S \to N_S, \quad m/s \mapsto f(m)/s, \tag{1.12}$$

这里$m \in M$，$s \in S$。若又有A-同态g：$N \to L$，那么，

$$g_S \cdot f_S = (gf)_S. \tag{1.13}$$

定义 4 设S是环A的乘法闭集。对于复形$\mathbf{X}$（见(1.1)），可确定以下A_S-模的复形

$$\mathbf{X}_S = \quad \cdots \to X_S^{l-1} \xrightarrow[(\partial_X^{l-1})_S]{} X_S^l \xrightarrow[(\partial_X^l)_S]{} X_S^{l+1} \to \cdots \tag{1.14}$$

叫做复形$\mathbf{X}$关于S的分式化。

根据(1.12)，对于$l \in \underline{\mathbf{Z}}$，$x \in X^{l-1}$及$s \in S$，有

$$(\partial_X^l)_S(\partial_X^{l-1})_S(x/s) = \partial_X^l \partial_X^{l-1}(x)/s = 0.$$

因而(1.14)确实是复形。

若P是A的素理想，$S = A - P$，则将$\mathbf{X}_S$记为$\mathbf{X}_P$。

定义 5 设$\mathbf{X}_1$和$\mathbf{X}_2$是两个复形，定义它们的直和为以下复形

$$\cdots \to X_1^l \oplus X_2^l \xrightarrow[\partial^l_{X_1} \oplus \partial^l_{X_2}]{} X_1^{l+1} \oplus X_2^{l+1} \to \cdots,$$

记为$\mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2$。也就是说，对一切$l \in \underline{\mathbf{Z}}$，

$$(\mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2)^l = X_1^l \oplus X_2^l \tag{1.15}$$

$$\partial_{X_1 \oplus X_2}^l = \partial_{X_1}^l \oplus \partial_{X_2}^l \tag{1.16}$$

其中，(1.15)右边是模的外直和，(1.16)右边是模同态的直和。

一般地，设$\{\mathbf{X}_i\}_{i \in I}$是复形的族，其直和便是

$$\bigoplus_I \mathbf{X}_i = \cdots \to \bigoplus_I X_i^l \xrightarrow[\bigoplus_I \partial_{X_i}^l]{} \bigoplus_I X_i^{l+1} \to \cdots,$$

即，对一切$l \in \underline{\mathbf{Z}}$，

$$\left(\bigoplus_I \mathbf{X}_i\right)^l = \bigoplus_I X_i^l, \tag{1.15}$$

$$\partial^l_{\oplus X_i} = \bigoplus_I \partial^l_{X_i}. \tag{1.16}$$

命题 6 正合复形的直和是正合复形。 □

注意到模也是复形。那么，上同调复形可以通过上同调模表示出来。

命题7 设X为复形，则

$$H^l(\mathsf{X})=\bigoplus_{l\in Z}H^l(\mathsf{X})[-l].$$

证 平移复形$H^l(\mathsf{X})[-l]$的第l项为$H^l(\mathsf{X})$，其它所有的项均为零。□

命题8 设$\{\mathsf{X}_i\}_{i\in J}$是复形的族，则

$$H^l(\bigoplus_J \mathsf{X}_i)\cong\bigoplus_J H^l(\mathsf{X}_i) \qquad (l\in \underline{\mathbf{Z}}).$$

证 对于外直和，$\ker(\bigoplus_J \partial_{X_i}{}^l)=\bigoplus_J \ker\partial_{X_i}{}^l$，

$\operatorname{Im}(\bigoplus_J \partial_{X_i}{}^l)=\bigoplus_J \operatorname{Im}\partial_{X_i}{}^l$．（$l\in\underline{\mathbf{Z}}$）．□

定义6 设$\{\mathsf{X}_i\}_{i\in I}$是复形的族，定义它们的直积为以下复形

$$\cdots\to\prod_J X_i{}^l \xrightarrow[\prod_J \partial_{X_i}{}^l]{} \prod X_i{}^{l+1}\to\cdots,$$

记为$\prod_J \mathsf{X}_i$，即对一切$l\in\underline{\mathbf{Z}}$，

$$\left(\prod_J \mathsf{X}_i\right)^l=\prod_J X_i{}^l, \tag{1.17}$$

$$\partial_{\pi X_i}{}^l=\prod_J \partial_{X_i}{}^l. \tag{1.18}$$

其中(1.17)右边是模的卡氏积，(1.18)右边是模同态的卡氏积，定义为

$$(x_i)_{i\in J}\mapsto(\partial_{X_i}{}^l(x_i))_{i\in J}，\ (x_i\in X_i{}^l).$$

命题9 正合复形的直积是正合复形。□

命题10 设$\{\mathbf{X}_i\}_{i\in I}$是复形的族，则

$$H^l\left(\prod_{i\in I}\mathbf{X}_i\right)\cong\prod_{i\in I}H^l(\mathbf{X}_i).$$

证 对于卡氏积，$\ker\left(\prod_I \partial_{X_i}{}^l\right)=\prod_I \ker\partial_{X_i}{}^l$，

$\mathrm{Im}\left(\prod_I \partial^l_{X_i}\right)=\prod_I \mathrm{Im}\,\partial^l_{X_i}$，$(l\in \underline{\mathbf{Z}})$。□

〔注〕按通常习惯，复形$\mathbf{X}$是指一系列A-模$X_l(l\in\underline{\mathbf{Z}})$和一系列$A$-同态$d_l\in Hom(X_l, X_{l-1})$所组成的序列（注意，足码随箭头方向而下降！）

$$\mathbf{X}=\quad\cdots\to X_{l+1}\xrightarrow[d_{l+1}]{}X_l\xrightarrow[d_l]{}X_{l-1}\to\cdots,$$

而且，对一切$l\in\underline{\mathbf{Z}}$，

$$d_l d_{l+1}=0.$$

复形$\mathbf{X}$的第l个同调模是

$$H_l(\mathbf{X})=\ker d_l/\mathrm{Im}\,d_{l+1}.$$

若取一系列A-模，以肩码编号为$X^l(l\in\underline{\mathbf{Z}})$，并有一系列$A$-同态

$\partial^l_X\in Hom(X^l,\ X^{l+1})$满足

$$\partial^l_X\,\partial^{l-1}_X=0,$$

则称序列（注意，肩码随箭头方向而上升！）

$$\mathbf{X}=\quad\cdots\to X^{l-1}\xrightarrow[\partial^{l-1}_X]{}X^l\xrightarrow[\partial^l_X]{}X^{l+1}\to\cdots\qquad(1.1)$$

为上复形。

$$H^l(\mathbf{X})=\ker\partial_X{}^l/\mathrm{Im}\,\partial_X{}^{l-1}$$

叫做上复形$\mathbf{X}$的第l个上同调模。