ShuXue JieTi FangFa YanJiu

数学解题方法研究

和洪云 和林功 著

经济科学出版社
Economic Science Press

数学解题方法研究

和洪云　和林功　著

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学解题方法研究／和洪云，和林功著．—北京：经济科学出版社，2016.6
ISBN 978－7－5141－6982－9

Ⅰ．①数… Ⅱ．①和…②和… Ⅲ．①数学－题解－研究 Ⅳ．①O1－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第124514号

责任编辑：刘殿和
责任校对：隗立娜
版式设计：齐　杰
责任印制：李　鹏

数学解题方法研究
和洪云　和林功　著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京密兴印刷有限公司印装
710×1000　16开　21印张　330000字
2016年6月第1版　2016年6月第1次印刷
ISBN 978－7－5141－6982－9　定价：52.00元

序

成为一名优秀的数学教师，是每一位有责任心和事业心的数学教师的神圣使命。推动中国数学教育实践的良性发展，提高中国数学教育的质量，是每一位数学教育工作者的匹夫之责。

数学教师需要有良好的数学素养。20 世纪后半叶及 21 世纪初科学技术的迅猛发展，对数学教育提出了越来越高的要求，使得广大的从事基础教育的数学教师正面临着前所未有的危机与挑战。将一些现代数学的内容以及思想方法引进数学课程，是一种先进的教学和学习方法。结合以上情况，本书将不仅介绍传统常用的数学解题基本方法：配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消去法、反证法、分析与综合法、特殊与一般法、类比与归纳法、观察与实验法，以及常用的数学思想：函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化（化归）思想；还在第六章中对合情推理的归纳和类比推理作了介绍和研究，同时在第七章中加入了运用信息技术解决研究数学问题的内容，体现数学解题方法研究的时代性和必然性，第八章介绍了数学建模的思想和初等建模方法，为培养数学的创新意识和应用意识奠定了一定的基础。

为了帮助学习者掌握数学解题的基本方法，理解数学解题的思想方法，本书在介绍常用的数学解题基本方法的同时，在重要章节还配备了有关的练习，供学习时选用。这种组织结构符合学习数学的思维特点，有利于学习者充分理解本书所阐述和希望表达的意义与思想方法。对数学解题思想方法中的数学

发现和数学猜想，以及运用信息技术解决研究数学问题的内容，本书引用了大量翔实的案例，运用数学建模的思想和方法进行了剖析和研究，体现数学解题方法研究的时代性和必然性，为培养数学的创新意识和应用意识打开了一扇学习的大门。希望学习者通过对本书的阅读，不仅善于学习运用传统数学解题的思维方法，而且能形成运用现代技术学习并研究数学问题的意识，在互联网时代拓展数学学习的方式和空间。

数学基础知识和基本的数学思维，是现代社会的通用知识之一，最基本、最重要，但又是最难学、最难教的，数学好坏的标准往往就体现为数学解题的能力。而本书就是在如何学习数学、如何提高解题能力方面，作了大量有益的尝试和实践，从理论探索到具体的解题实践都作了较为系统的研究和总结，对探索并掌握数学思维的活动规律有很强的学习实践意义。

本书凝聚了两位和老师长期教学和研究的成果，其中和洪云老师在中学和大学从事数学教育工作逾30载，2004年被云南省人民政府授予“数学特级教师”；和林功老师现任丽江市一中副校长，是丽江市高中数学“和林功名师工作室”主持人，丽江市高中数学教育的杰出代表。因此该书的出版将为大专和中学教师及学生提供良好的数学学习参考材料，拨开数学学习中的迷雾，体验数学学习的乐趣，点燃学习者运用信息技术研究解决数学问题的兴趣和数学创造意识。

中国科学院半导体研究所 毛旭 博士

2016年5月　北京

前　言

美国著名数学教育家波利亚说过，掌握数学就意味着要善于解题。而要善于解决数学问题，就要对数学思想、数学方法理解透彻并能融会贯通，只有这样才能在解题过程中，提出解决问题的新视角、新思路，并最终获得解决问题的方法。

在各类数学测试中，都十分重视对于数学思维活动的考查，在试题的解答过程中都蕴含着重要的数学思想方法。因此，要学会解决数学问题，就要求我们不仅要掌握好数学的基础知识和基本技能，同时要有意识地运用数学思想方法去分析问题、解决问题，不断提高数学素养，形成敏锐的数学头脑和眼光。这样才能在各类数学测试中取得良好成绩。

本书的目的之一，就是想说明学习数学的目的不仅是能解多少数学题的问题，而是要通过学习数学解题方法，体验问题的解决过程，逐步提高数学思维意识，把数学思想方法融入我们的思维里，不断提高我们的思考能力和优化解决问题的能力，用数学的智慧去化解个人在生活和事业中所面临的各种挑战，培养承担社会责任的能力和智力。

我们常说的数学方法和数学思想有哪些呢？常见的数学思想方法一般可以如下划分；

常用数学方法：配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消元法等；

数学逻辑方法：分析法、综合法、反证法、归纳法、演绎法等；

数学思维方法：观察与分析、概括与抽象、分析与综合、特殊与一般、类比、归纳和演绎等；

常用数学思想：函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化（化归）思想等。在近代数学中还形成了极限思想、概率思想和建模思想等。

其中，常用数学方法、逻辑方法和思维方法我们也常常合称为数学

基本方法。在学习数学的过程中，需要对数学知识、数学方法及数学思想有一个正确的认识和理解，才能明确在学习数学过程中的知识目标和能力要求是不一样的，才能更深层次地理解和领悟数学知识与数学能力之间的关系。

数学知识是可以用文字和符号来记录和描述的，属于陈述性的知识，是学习和继承前人的研究成果，可以通过反复学习和训练而获取。而数学思想方法则是一种数学意识，需要领悟和内化，属于思维的范畴，学习数学的目的之一就是要形成良好的数学思维能力。在数学学习的过程中，“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是灵魂，提高数学素质的核心就是提高学生对数学思想方法的认识和运用，数学素质的综合体现就是运用数学思维的能力。因此，掌握数学思想方法，不仅有助于提高数学解题能力，而且将终身受益，陈述性的数学知识可能忘记了，但数学思想方法和数学思维能力将对个人的成长起到不可估量的影响。

数学思想方法中，数学方法又是数学思想的具体体现，是数学的经验性的行为，具有模式化与可操作性的特征，是数学解题的具体手段。数学思想是数学的灵魂，它与数学基本方法是在理解数学概念、掌握数学技能、运用数学知识的过程中同时获得成长的。

为了帮助学习者掌握数学解题的基本方法，理解数学解题的思想方法，本书将着重介绍常用的数学方法：配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消去法、反证法、分析与综合法、特殊与一般法、类比与归纳法、观察与实验法，以及常用的数学思想：函数与方程思想、数形（结合）思想，分类讨论思想、转化化归思想。增强对数学解题思想方法中数学发现和数学猜想的认识。其中，在第六章中对合情推理的归纳和类比推理作了介绍和研究，同时在第七章中加入了运用信息技术解决研究数学问题的内容，体现数学解题方法研究的时代性和必然性，第八章介绍了数学建模的思想和初等建模方法，为培养数学的创新意识和应用意识奠定了一定的基础。希望学习者不仅善于学习运用传统数学解题的思维方法，而且能点燃学习者运用信息技术研究解决数学问题的兴趣和数学创造意识。

学习研究并运用数学解题的思想和方法，是学好数学的必由之路，是培养思维品质的有效途径。不同的解题指导思想就会有不同的解题效果，通过对解题方法的学习和研究，对促进我们思维品质的成长有积极

的意义。例如，研究题目结构特征可培养思维的深刻性；研究解题思路可培养思维的广阔性；研究解题途径，可培养思维的批判性；研究解题结论，可培养思维的创造性；运用数学解题过程中形成的知识经验，可提高思维的敏捷性和学习数学的高效性。

从教育心理学的角度看，数学解题方法的学习是寻求解决数学问题方法的一种心理活动，是一种富有探索性和创造性的学习活动。数学的解题活动就是知识结构和思维结构对抽象的形式化思想材料进行加工的过程，是数学符号及数学思维的活动过程。数学解题方法的学习和研究对巩固数学知识、培养数学思维、发展解决问题能力和促进个性心理发展都具有重要的作用和意义。

从数学建构主义认知论的角度看，数学解题方法的学习是一种有意义的学习。在数学解题方法的学习中，要与学习者已有的解题经验与知识体验相联系，即学习者在解决问题的学习中，必须要以已有的解题经验为基础，同时要在新问题与旧经验之间建构起问题意义和知识结构上的联系。学习者的解题认知结构中除了包括已有的解题经验以外，还包括有影响数学解题学习的其他因素，如生活的环境经验因素，思维的定式习惯，数学学习的条件和数学体验活动的能力等。数学解题作为有意义学习的过程，包含着新旧知识的同化与顺应，新旧问题意义的同化与顺应，新旧解题方法的同化与顺应，新旧解题策略的同化与顺应等。所谓数学有意义的解题学习，就是在这些新旧两方面之间，建构起内在的和实质性联系的过程。因此，要实现数学解题的有意义学习，首先，要求新问题对学习者具有潜在的意义，也就是新问题所涉及的知识、方法、策略和思想应是学习者已经获得的意义，已经储存在学习者解题认知结构中的。其次，学习者要将数学新问题与自己认知结构中的相关的信息和经验作出识别，在新问题涉及的知识、类型、方法、策略、思想与原认知结构中的有关方面建构起内在的和实质性的联系，这样在问题得到解决的同时，原有的解题认知结构也得到了提升和重构。

数学解题方法的学习也是有意义的发现学习，学习数学解题方法最有效的方法是“在解题中学习解题”，即在尽可能不提供现成结论的前提下，独立地进行数学解题探究活动，在探索问题解决方法的过程中积累学习数学思维活动的经验和方法，总结各类思维活动的优缺点和运用效果及特点，感受数学知识的形成过程和数学思维的活动过程。这些经验包括了各类“解题策略经验”、“问题策略经验”及各种“方法和技

巧性经验”。解题策略经验又包括有意向性策略、合情推理策略和数学思想策略。问题策略经验则是关于某些典型问题的分类及其解决的基本方法。因此数学解题学习不仅是解题经验积累的过程，也是有意义的发现学习过程。

研究和学习数学解题方法，不是对数学知识、数学技能简单的重复，而是要学习运用数学知识和数学思想方法解决问题的能力。

本书就是试图通过对数学解题方法的研究和学习，提高学习者学习数学的信心和效率，通过探索解题规律，掌握基本的数学思想和方法，形成知识模块和常用的数学解题模式，洞察并把握命题的内在联系，探索出一条学习数学、应用数学的新路子。

最后，本书在编写、出版过程中得到了众多友人的关心和支持，并提出了许多宝贵的建议。在此，特别向丽江阿一旦的麴亚平先生、北京的友人李自刚先生和毛旭先生致以真诚的谢意！

和洪云　和林功

2016年5月

目　录

第 1 章

数学解题的基本策略

数学解题的思维过程是指从理解问题开始，经过探索思路，转换问题直至解决问题，并进行回顾反思的思维活动过程．

对于数学解题思维过程，美国著名数学教育家 G. 波利亚提出了四个阶段，即理解问题、拟定计划、实施计划和回顾反思．可以概括为：理解、转化、实施、反思．

第一阶段：理解问题是解题思维活动的开始．

第二阶段：转化问题是解题思维活动的核心，是在分析已知条件和明确所求问题基础上，探索解题方向和途径的尝试发现过程，是思维策略的选择和调整过程．

第三阶段：计划实施是解决问题过程的实现，它包含着一系列基础知识和基本技能的灵活运用和思维过程的具体表达，是解题思维活动的重要组成部分．

第四阶段：反思问题包括对数学结果的分析验证和对解题过程的回顾与总结，是发展数学思维的严谨性、逻辑性、开放性和系统化的一个重要过程，是从一个思维活动过程的结束开启另一个新的思维活动过程的开始．

1.1　数学解题的基本策略

为了使分析、联想、猜想的方向更明确，思路更加多样化，进一步提高探索的成效，我们必须掌握一些解题的思维策略．

解题策略的基本出发点在于“转化”，即把面临的问题转化为一道

或几道易于解答的新题，以通过对新题的考察，发现原题的解题思路，最终达到解决原题的目的.

常用的解题策略有：经验化、简单化、直观化、特殊化、一般化、整体化、间接化等.

一、经验化策略

经验化策略也叫做模式化策略，即对陌生的数学问题时，要设法把它化为曾经解过的或比较熟悉的问题，以便充分利用已有的知识、经验或解题模式，顺利地解出原题.

一般而言，数学活动经验和数学解题模式的积累程度，决定了学习者对数学问题结构的认识和理解. 从结构上来分析，任何数学问题，都包含条件和结论两个方面. 因此，要把陌生问题顺利转化为熟悉问题，就必须在变换题目的条件、结论，以及它们的联系方式上获得突破.

常用的途径有：

（一）联想回忆基本知识和题型

按照波利亚的观点，在解决问题之前，我们应充分联想和回忆与原有问题相同或相似的知识点和题型，充分利用相似问题中的方式、方法和结论，从而解决现有的问题.

（二）多角度分析理解题意

对于同一道数学题，由于数学解题经验不同，而形成不同的问题表征，产生不同的分析思路和解题方向. 因此，根据自己的知识和经验，适时调整分析问题的视角，有助于更好地把握题意，找到自己熟悉的解题思路和方法.

（三）构造辅助元素

同一素材的数学题目，常常可以有不同的表现形式；条件与结论之间，也存在着多种联系方式. 因此，恰当构造辅助元素，有助于改变题目的形式，沟通条件与结论的内在联系，最终把陌生问题转化为熟知问题.

数学解题中，构造的辅助元素是形式多样，且富有创造性的. 常见

的有构造图形（点、线、面、体），构造算法，构造多项式，构造方程（组），构造坐标系，构造数列，构造行列式，构造等价性命题，构造反例，构造数学模型等.

二、简单化策略

简单化策略，就是对结构复杂、问题抽象的题目时，遵循化繁为简，分类化归，从具体到一般的原则，设法把复杂问题转化为一类或几类比较简单、易于解答的问题，以便通过对这些小问题的考察，从中启迪解题思路，以简驭繁，最终解出原题.

简单化是经验化解题思路的补充和发挥.因此，在实际解题时，这两种策略常常是结合在一起交叉运用的，只是观察问题和解析思路的切入点和角度有所不同而已.

实施简单化策略的途径是多样化的，常用的有：引入中间参量，分类考察讨论，转化已知条件，分解结论等.

（一）引入中间参量，挖掘隐含条件

结构复杂的综合题，大多是由若干内容单一、难度不大的基本题经过适当组合抽去中间环节而构成的.因此，从题目的因果关系入手，寻求可能的中间环节和隐含条件，引入中间参量，架设起由已知通往未知的桥梁，把原题分解成一组相互联系的系列题，从而实现复杂问题简单化.

（二）分类考察讨论

有些数学题，解题的复杂性，主要在于它的条件、结论包含多种不易识别的可能情形.对于这类问题，选择适当的分类标准，把原题分解成一组或几组并列的简单问题，实现复杂问题简单化.

（三）简单化已知条件

有些数学问题，已知条件比较抽象、复杂，看似与所求问题难以直接联系.这时，可以考虑简化题中某些已知条件，即先考虑问题的一种简单情况，并获得解决方法.这样简单化了问题的解决思路，对于解答原题，常常能起到抛砖引玉的作用.

（四）分解结论

有些数学问题，解题的主要困难，来自结论的抽象概括，难以直接和条件联系起来，这时，不妨猜想一下，能否把结论分解为几个比较简单的部分，以便各个击破，解出原题.

三、直观化策略

直观化策略，是对内容抽象、理解困难的题目时，遵循化难为易，化抽象为直观的原则，充分借助相关的图表、图像、图形等几何工具来分析问题，设法把问题转化为直观形象、易于理解的问题，透过事物的直观形象把握题中所及的各对象之间的联系，找到原题的解题思路.

常见的直观化方法有：

（一）图表直观

涉及变量多、数据多、内容抽象、关系复杂的数学题，理解题意困难，常常会由于问题的抽象性和复杂性，难以找到正确的解决方法.

对于这类题目，借助图表直观，将数据和条件进行归类和整理，使问题直观化，利用示意图或表格分析题意，实现抽象内容形象化，复杂关系条理化，使数学思考有相对具体的依托，便于深入思考，发现解题线索.

（二）图形直观

有些涉及数量关系的代数题目，用代数方法求解，理论上可行，但计算量偏大，有时甚至无法解出结果.这时，不妨借助图形直观，给题中有关数量以恰当的几何分析，拓宽解题思路，找出简捷、合理的解题途径.

（三）图像直观

不少涉及数量关系的题目，与函数的图像密切相关，灵活运用图像的直观性，数形结合，常常能以简驭繁，简化问题，获得巧妙的解法.

四、特殊化策略

特殊化策略，是对难以入手的一般性题目时，要注意从一般退到特殊，先考察包含在一般情形里的某些比较简单的特殊问题，以便从特殊问题的研究中，归纳猜想一般的解决方法，拓宽解题思路，发现解答原题的方向或途径.

五、一般化策略

一般化策略，是面对一个计算比较复杂或内在联系不甚明显的特殊问题时，要设法把特殊问题一般化，找出一个能够揭示事物本质属性的一般情形的方法、技巧或结果，顺利解出原题.

六、整体化策略

整体化策略，是对于按常规思路进行局部处理难以奏效或计算冗繁的题目时，要适时调整视角，从习惯于理解单一变量转化为理解复合变量，把问题作为一个有机整体，从分析问题的整体结构入手，对问题整体结构从复合变量的角度进行分析和改造，从整体特性的研究中，找到解决问题的途径和办法.

七、间接化策略

间接化策略，是指从正面思考解决问题时过于复杂繁难，或在特定场合甚至找不到解题依据的题目时，要善于改变思维方向，尝试从问题的反面进行思考，以便化难为易解出原题.

1.2　数学解题的思维过程

从认知论的角度看，数学解题的思维发展过程就是数学解题的认知结构不断变化与发展的过程. 一般而言，数学解题的认知结构由知识结

构、思维结构和元认知结构组成．

首先，从数学解题的知识结构看，任何数学解题活动都与一定的知识背景相联系，因此解决数学问题就要辨别问题、分析条件，就会涉及数学有关的概念、定理、法则、公式等，这些知识是任何探索技能所不能代替的．因此，解题的一个必要前提就是解题者要拥有一个组织良好的数学知识结构．数学教育家波利亚就曾形象地描述到："货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本．良好的组织使得所提供的知识易于用上，这甚至比知识的广泛更为重要……把你记忆里的知识安放得有条不紊只会对你有更多的帮助．"所以，数学解题学习中的知识结构就是由"数学知识模块"和"解题知识模块"组成的．学习者存储"知识模块"越大、越多，解决数学问题的能力就越强．数学知识模块包括了基本知识和基本技能，例如，关于"三角函数值大小与角的取值范围"的知识块，关于"函数及其图像、方程及其曲线的初等变换"的知识块，关于"直线的平行、垂直与直线抽象表达形式"的知识块等．解题知识模块包括：问题的类型、基本数学模式、基本问题、一般的方法和特殊的技巧等．

其次，从数学解题的思维结构看，学习者对一般思维动作和数学特殊思维动作掌握的情况和运用水平，决定了在数学解题中思维模式的运用能力．一般思维动作是指：分析、综合、比较、类比、抽象、概括、一般化、特殊化、猜想、验证等；数学的特殊思维动作主要用于数学活动领域，包括：心理操作性的，方法技巧性的，策略定向性的，思想观念性的．

解题过程中最基本的心理操作是归纳概念、推出性质、重新理解、模式识别．归纳概念，是把问题中的一些特征加以适当组织而归为某一个数学概念；推出性质，是由问题中涉及的概念或新归入的概念，推出该概念具有的各个性质；重新理解，则是根据新归入的概念和新推出的性质对问题的整体或部分作出新的理解和认识；模式识别，则是根据问题对象的视觉组合结构、概念特征结构、关系网络结构，将问题纳入适当的数学模式之中．当面临一个问题时，有时从某一具体的数学思想出发，决定了探索解法的方向，如根据函数的思想决定要建立一个目标函数，这使用的是属于思想观念性的思维动作；然后，是用类比还是用归纳去建立这个目标函数，则是策略定向性思维动作在发挥作用；找到目标函数以后，还要更加具体地研究函数的定义域、值域，或者反函数、