高等学校“十三五”规划教材

材料工程基础

CAILIAO GONGCHENG JICHU

文进　主编

化学工业出版社

高等学校“十三五”规划教材

材料工程基础

文 进 主 编

化 学 工 业 出 版 社
·北 京·

本教材以材料制备与加工过程中涉及的工程基础理论为主线，从工程研究方法、工程基础理论和工程理论应用等方面介绍材料工程领域相关的基本理论及其应用。主要内容包括量纲分析及相似理论、流体流动基本原理及流体输送机械、热量传递原理及其应用、质量传递原理、物料干燥原理及技术、燃料及其燃烧过程与技术。

教材注重各部分内容之间的逻辑性和整体性，加强对解决实际工程问题的研究分析方法的介绍。教材可作为高等学校材料类所有专业的本科教学用书，以及相关学科专业的参考书，也可供材料类工业领域中从事科研、生产的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料工程基础/文进主编. —北京：化学工业出版社，2016.8

高等学校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-122-27435-9

Ⅰ.①材… Ⅱ.①文… Ⅲ.①工程材料-高等学校-教材 Ⅳ.①TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 143299 号

责任编辑：陶艳玲　　文字编辑：向　东

责任校对：边　涛　　装帧设计：王晓宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：三河市延风印装有限公司

787mm×1092mm　1/16　印张 19　字数 477 千字　2016 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：45.00 元

前言

对材料制备与加工过程的研究是材料研究领域的一个主要方面。材料在制备与加工过程中要经过许多的物理和化学过程。不同材料由于其结构、性质及工艺要求的不同，制备与加工过程由各自不同的单元操作过程组成。但是，无论哪种材料，其不同生产过程均需要遵循共同的工程原理，包括流体流动（动量传递）、热量传递、质量传递等。围绕着材料制备与加工过程中涉及的基本理论和基本知识，探讨需要解决的基本问题，是材料工程领域的主要任务。

“材料工程基础”是材料科学与工程专业及相关专业的课程体系中一门重要的基础课程。教材以材料工程共性基础理论为主线，从工程研究方法、工程基础理论和工程理论应用等方面介绍材料工程领域相关基本理论及其应用。主要内容包括量纲分析及相似理论、流体流动基本原理及流体输送机械、热量传递原理及其应用、质量传递原理、物料干燥原理及技术、燃料及其燃烧过程与技术。

教材对工程研究方法的基础——量纲分析及相似理论进行了较系统地介绍，同时对动量传递、热量传递和质量传递的共性进行分析，不仅体现了教材中各部分内容之间的逻辑性和整体性，也有利于学习者理解和掌握实际工程中的单元操作的规律。在此基础上，通过实际应用例子，加强分析与解决工程问题的能力，增强工程意识。

本书由武汉理工大学文进任主编，武汉理工大学谢峻林和朱明参加编写。第 1 章由朱明编写，第 2～第 5 章由文进编写，第 6 章由谢峻林编写。

教材可作为材料科学与工程一级学科专业及其相应的二级学科专业的本科教学用书，以及相关学科专业的参考书，也可供材料类工业领域中从事科研、生产的工程技术人员参考。

由于水平有限，书中不完善之处在所难免，敬请同仁和读者批评指正，以使本教材日臻完善。

编者

2016 年 3 月

目录

1 量纲分析理论与相似原理

1.1 绪论

面对自然界的工程技术领域中存在的大量物理现象以及复杂的化学-物理过程，通常采用理论分析方法、数值计算方法和实验方法对各种现象进行研究。这些研究方法的有机结合可以有效解决工程实际中出现的大量复杂问题。

（1）理论分析方法

该法是运用基本物理概念、定律和数学工具对具体问题进行定量分析，以得到定量的结论。这种方法的主要步骤可概括为：①通过实验和观察对现象的性质及特性进行分析，确定主要影响因素和次要因素，设计出合理的理论模型；②利用物理学上的普遍规律（例如质量守恒定律、动量定理、能量守恒定律和热力学定律等），建立描述现象的方程；③利用各种数学工具，求解出方程；④对方程的解进行分析，揭示现象规律，并将其与实验或观察结果进行比较，以确定解的准确度和适用范围。

理论分析方法过程严谨，结论准确。但是对于复杂的实际工程问题，目前无法直接采用理论分析方法进行求解。

（2）实验研究方法

通过一定的测试技术，对现象进行观测和研究，从中发现并确立支配所研究现象的规律。实验研究方法的一般步骤为：①对所给定的问题，分析影响因素，确定主要影响因素；②制订实验方案并进行实验；③整理和分析实验结果，得到所研究现象的规律；④对现象规律进行验证，并解释数据分析的结果，提出研究结论。

实验研究方法能够直接解决生产中的复杂问题，其结果可以作为检验其他方法是否正确的依据。任何实验都是在一定条件下进行的，所得的实验结果并不都具有普适性。实际工程中的一些问题，在实验室内进行研究有一定困难，或者无法直接进行实验研究，只能采用数值计算方法以及其他的方法进行研究。

（3）数值计算方法

该法是一种研究并解决数学问题的数值近似解方法。这种方法的主要步骤是：①依据理论分析的结果确定数学模型及其边界条件；②选用适当的数值方法；③编制程序，进行具体

计算；④对计算结果进行分析、比较以确定计算的精确度。

随着计算机技术的发展，一些原来不能用解析方法求解的问题得到解决，它是理论分析方法的延伸和拓宽。特别是在某些无法进行实验或实验耗费巨大的工程领域，数值计算方法体现了其优越性。但是数值计算方法的数学模型必须以理论分析和实验研究为基础，而且往往难以包括所用的物理特性。

综上所述，理论分析方法、实验研究方法和数值计算方法这三种方法各有利弊，在研究过程中，可以互相补充、取长补短。用理论分析来指导实验研究和数值计算，使其进行得更有成效，少出偏差。通过实验研究对理论分析和数值计算的正确性与可靠性进行检验，提供建立理论模型的依据。数值计算则可以弥补理论分析和实验方法的不足，对复杂问题快速开展有效的研究。

对于许多的复杂工程问题，一些现象或过程由于描述现象或过程的基础方程在数学求解上存在困难，单凭数学分析方法难以得到实用的结果；一些现象或过程是因为人们对其本质了解不深入，还难以用方程进行描述，需要借助于实验。因此，必须应用定性理论分析方法和实验研究方法结合，对问题进行分析与研究。在有限的实验次数内，获得具有通用性的规律。量纲分析和相似原理为科学地组织实验及整理实验结果提供理论依据和指导。

当所研究的现象影响因素很复杂，人们不得不借助模型实验时，就提出了模型现象与原型现象的相似问题，以及如何把模型实验的成果推广并应用到实际过程中等一系列的问题。相似理论是关于现象相似的基本原理，确定了相似现象之间存在着的相似关系，是进行模型实验的理论基础。量纲分析理论或称作量纲分析方法，是研究物理量的量纲之间固有联系的理论。它通过研究决定现象的各参量的量纲，建立物理量之间的关系。利用量纲分析和相似原理，可以得到有助于进行实验设计的相似准则，为有效完成模型实验提供可靠依据。在流体力学、弹性力学、传热学以及燃烧动力学等领域的研究中，量纲分析和相似原理都是重要的工具。随着人们研究各类物理现象越来越复杂，量纲分析与相似理论在解决工程实际问题中成为有力工具，应用领域也在不断扩大。

本章将对量纲分析和相似原理的基本概念、基本理论和实际应用进行扼要介绍，重点介绍获得相似准则的若干方法。

1.2 量纲分析原理

1.2.1 物理量的单位与量纲

1.2.1.1 物理量的单位和单位制度

描述自然现象的物理量如质量、黏度、温度、速度、压强等，在使用时不仅要给出数值，还要标明计量单位。显然，给描述自然现象的每个物理量都赋予一个独立的、与其他物理量没有任何联系的单位会是烦琐的，也是没有必要的。事实上，自然界中的各种现象总是相互联系的，各种物理量通过一定的物理基本定理发生联系。为了便于应用，约定选取某些彼此独立的物理量作为基本物理量，并规定它们的量度单位。基本物理量所采用的量度单位称为物理量的基本量度单位，简称为基本单位。其余各物理量的量度单位，以基本物理的量度单位为基础，根据其自身的物理意义，由相关基本单位组合而成。这种组合单位称为导出单位。

由于基本物理量和基本物理量的量度单位的选取是人为的，并具有一定的任意性，这样

便形成了不同的单位制度。由确定的一组基本物理量、基本物理量的量度单位以及根据定义方程式而确定的导出单位，所构成的单位体系称为单位制度。显然选取的基本物理量不同，基本单位不同，单位制度也就不同。

对于力学问题，只需选三个量纲独立的基本物理量并确定其量度单位，通过力学定律就可以对所有的力学问题进行表述。通常取长度、质量和时间为基本物理量，以厘米(cm)、克(g) 和秒(s) 作为基本单位的单位制度称为厘米·克·秒制(CGS 制)。以米(m)、千克(kg) 和秒(s) 作为基本单位的单位制度称为和米·千克·秒制(MKS 制)。若取长度、力和时间为基本物理量，用米(m)、千克力(kgf) 和秒(s) 作为基本量度单位，则形成工程单位制。

1960 年第十一届国际计量大会通过并建立了一种科学、简单并适用的计量单位制——国际单位制，简称为 SI 制。SI 制是一种完整的单位制，它包括了所用领域中的计量单位，具有通用性和一贯性。目前 SI 制是世界上公认的先进、科学的单位制，也是我国的法定计量单位。本教材中主要采用国际单位制，为了方便应用，对一些工程中常用的其他单位制的单位、非法定计量单位也会进行相应的说明。

在国际单位制（SI 制）中确定了七个基本单位和两个辅助单位，表 1-1 中列出了 SI 制中各个基本物理量及相应的单位。

表 1-1 国际单位制（SI 制）的基本物理量和量度单位

物理量		单位名称	单位代号
基本单位量	长度	米	m
	质量	公斤，千克	kg
	时间	秒	s，sec
	电流(强度)	安培	A
	温度	开尔文或摄氏度	K 或℃
	光强	烛光(坎得拉)	cd
	物质的量	摩尔	mol
辅助单位量	平面角	弧度径	rad
	立体角	球面度	Sr

1.2.1.2 量纲的概念

(1) 物理量的量纲

“量纲”一词在英、德、法语中都是“dimension”，用在量纲分析中可译成“量纲”或“因次”。在量纲分析中，量纲只是涉及物理量的属性，表示物理量的实质。例如某物体以 1m/s 速度运动，这个运动速度也表示为 100cm/s 或者 3600m/h。如果设 $1\text{m}=1\times[L]$，$1\text{s}=1\times[T]$，则有：

$$1\text{cm}=[L]/100,\quad 1\text{h}=3600\times[T]$$

将其代入三种不同的速度表示式中，可得到

$$v=1\text{m/s}=\frac{[L]}{[T]}$$

$$v=100\text{cm/s}=\frac{100\times\dfrac{[L]}{100}}{[T]}=\frac{[L]}{[T]}$$

$$v=3600\mathrm{m/h}=\frac{3600\times[L]}{3600\times[T]}=\frac{[L]}{[T]}$$

从以上 3 个式子比较可以看出，无论速度采用何种单位表示，速度 v 与距离 L、时间 T 的关系是确定的。这种确定的关系反映了速度这个物理量的实质。

某一单位制中的基本物理量用来确定某一体系特点和本质时，该单位制的基本物理量为基本量纲。用一般来说，在选定了足够的基本物理量之后，任何物理量都可以根据物理定义或物理定律用基本物理量表示出来。通过基本物理量（基本量纲）去表示某一物理量的式子就称为该物理量的量纲。通常用符号 L、M、T、Θ 依次代表长度、质量、时间和温度这几个物理量的量纲，则其他物理量（指力学、传热学问题）的量纲就是这些基本量纲依照一定规律的组合。

$$[y]=M^aL^bT^c\Theta^d \tag{1-1}$$

式(1-1) 称为物理量 y 的量纲表达式，用“[ ]”表示某一物理量的量纲。式中指数 a、b、c 和 d 称为量纲指数。

面积和速度的量纲分别可以表示为，

$$[\text{面积}]=[A]=L^2,[\text{速度}]=[v]=LT^{-1}$$

只有在确定的单位制中才有确定物理量的量纲。同一个物理量在不同的单位制中可能具有不同的量纲。例如在 SI 制、CGS 制和 MKS 制中，力的量纲都是 MLT^{-2}。在工程单位制中，力的量纲是 F。造成这一差别的原因在于不同单位制中基本物理量的不同。

物理量的单位和量纲有着密切的联系，又有一定的区别。单位是量纲的基础，物理量的单位与量纲之间存在一定的对应关系。量纲只是涉及物理量的特点和性质，是对物理本质即内在关系的表述。单位除指明物理量性质外，还涉及物理量数值的大小。也就是说，物理量的量纲与量度单位无关。采用不同的单位制，只会改变物理量的数值，但是不会改变物理量的性质。量纲比单位更具有普遍性。一个物理量的单位可以有多种，对某一量纲体系，量纲只能有一个。常用物理量的量纲见表 1-2。

表 1-2 常用物理量量纲（SI 制）

物理量	量纲	单位
质量	$[M]$	千克,kg
时间	$[T]$	秒,s
长度	$[L]$	米,m
热力学温度	$[\Theta]$	开(尔文),K
角度	$[M^0L^0T^0]$	径,弧度,rad
面积	$[L^2]$	平方米,m^2
体积	$[L^3]$	立方米,m^3
线速度	$[LT^{-1}]$	米/秒,m/s
角速度	$[T^{-1}]$	径/秒,弧度/秒
线加速度	$[LT^{-2}]$	米/秒^2,m/s^2
体积流量	$[L^3T^{-1}]$	米^3/秒,m^3/s
力	$[MLT^{-2}]$	牛(顿),N
力矩	$[ML^2T^{-2}]$	牛·米,焦耳,N·m,J

续表

物理量	量纲	单位
密度	$[ML^{-3}]$	千克/米^3,kg/m^3
压强,压力	$[ML^{-1}T^{-2}]$	牛顿/米^{2}或帕,N/m^2,Pa
体积弹性模量	$[ML^{-1}T^{-2}]$	牛顿/米^{2}或帕,N/m^2,Pa
动量	$[MLT^{-1}]$	千克·米/秒,kg·m/s
动量矩	$[ML^2T^{-1}]$	千克·米^2/秒,kg·m^2/s
功、能量、热量	$[ML^2T^{-2}]$	焦(耳),J
功率	$[ML^2T^{-3}]$	瓦(特),W
动力黏性系数	$[ML^{-1}T^{-1}]$	帕·秒,Pa·s
运动黏性系数	$[L^2T^{-1}]$	米^2/秒,m^2/s
表面张力系数	$[MT^{-2}]$	牛顿/米,N/m
气体常数(R),比热容	$[L^2T^{-2}\Theta^{-1}]$	焦耳/(千克·开),J/(kg·K)

在对实际问题的研究过程中，量纲的应用有重要的意义。任何学科领域中的规律、定律都是通过各个相关量的函数关系式表达，即通过一组选定的基本量以及导出量来表示。所有的物理量都具有一定的量纲，因此，量纲可以反映出各个相关物理量之间的关系。

(2) 无量纲量

一个物理量是有量纲量还是无量纲量是一个相对的概念，与所选用的量度单位有密切的关系。

例如，几何图形中的角可以用度、弧度和直角的倍数等单位来量度。这时角就是有量纲量。当把角定义为它所张圆弧的弧长与半径之比，并在所有量度单位制中只用弧度来量度角时，则角就是无量纲量。

当物理量的量纲表达式中各个量纲指数均为零时，该物理量是无量纲量。当量纲指数 $a=b=c=d=0$，则$[y]=M^0L^0T^0\Theta^0$，物理量 y 为无量纲量。

无量纲量可由两个具有相同量纲的物理量相比得到，如线应变 $\varepsilon=\Delta L/L$。也可以由两个有量纲物理量通过乘除组合，使组合量的量纲指数为零。例如，

$$[Re]=\left[\frac{v d\rho}{\mu}\right]=\frac{LT^{-1}\times L\times ML^{-3}}{ML^{-1}T^{-1}}=M^0L^0T^0$$

Re 数是由 3 个有量纲量组合得到的无量纲量，关于 Re 数的物理意义将在后面进行详细讨论。

根据无量纲量的定义和构成，无量纲量具有以下特点：

① 客观性　凡是有量纲的物理量都有单位。同一物理量，因选取的度量单位不同，数值不同。如果用有量纲的物理量作为自变量，由此得到的方程中因变量的数值将会随着选取单位的不同而不同。如果把方程各项物理量组合成无量纲量，方程的求解结果不受单位制变化的影响。从这个意义上，由无量纲量组成的方程式是真正客观的方程式。

② 不受运动规模的影响　无量纲量是纯数，数值大小与度量单位无关，也不受运动规模的影响。规模大小不同的运动，如果两者是相似的运动，则相应的无量纲数相同。

③ 可进行超越函数的运算　由于有量纲量之间只能进行简单的代数运算，对数、指数和三角函数的运算是没有意义的。经过无量纲化的无量纲量可以解析这些函数的运算。例如

气体等温压缩功的计算式

$$W=p_1V_1\ln\frac{V_1}{V_2}$$

其中压缩前后的体积比$\frac{V_1}{V_2}$组成了无量纲数。

1.2.1.3 量纲公式

根据物理量的性质、定义或定律用基本物理量的量纲表示该物理量的量纲式称为量纲公式，量纲公式是导出物理量的扼要定义及物理本质的表征。

在不同的量度单位制中，同一个物理量的量纲公式中可以包含不同数目的基本量纲，也可能具有不同的形式。在国际单位制中，任意一个物理量的量纲公式都可以用相关物理量的幂积单项式表示。假定物理量 y 是物理量 x_1，x_2，…，x_k 的一个函数，即 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，则可以写出，

$$[y]=[x_1]^{a_1}[x_2]^{a_2}[x_3]^{a_3}\cdots[x_k]^{a_k} \tag{1-2}$$

对函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，有以下公理：

【公理 1】 任一个物理量的量纲都可由基本量纲的指数幂乘积表示，即

$$[y]=A_1^{\alpha}A_2^{\beta}\cdots A_k^{\gamma} \tag{1-3}$$

式中，y 为任一物理量；A_1，A_2，…，A_k 为基本物理量的量纲；α、β、γ 为有理数，称为量纲指数。

【公理 2】 量纲不独立量可由量纲独立量的指数幂乘积表示。

对函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n)$，如果 k 个物理量是量纲独立量，则 $n-k$个物理量的量纲可以用 k 个量纲独立量的指数幂乘积表示，即

$$\left.\begin{aligned}[x_{k+1}]&=[x_1]^{\alpha_1}[x_2]^{\alpha_2}[x_3]^{\alpha_3}\cdots[x_k]^{\alpha_k}\\ [x_{k+2}]&=[x_1]^{\beta_1}[x_2]^{\beta_2}[x_3]^{\beta_3}\cdots[x_k]^{\beta_k}\\ &\vdots\\ [x_n]&=[x_1]^{\gamma_1}[x_2]^{\gamma_2}[x_3]^{\gamma_3}\cdots[x_k]^{\gamma_k}\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

【公理 3】 物理方程中各项的量纲相同且与度量单位无关。

凡各项量纲相同且与度量单位无关的方程，称为量纲齐次性方程，即量纲和谐方程。

写出物理量的量纲表达式的量纲分析的基础。量纲表达式的导出方法可根据物理量的性能或定义，直接写出物理量的量纲表达式。如，面积的量纲为 L^2；体积的量纲为 L^3；速度的定义式为 $v=L/t$，其量纲表达式为 LT^{-1}。也可以根据物理定律来导出物理量的量纲。例如，根据牛顿第二定律，$F=ma$，则有$[F]=MLT^{-2}$。

1.2.2 物理量间函数关系的结构和 π 定理

1.2.2.1 物理量的量纲独立

对于 k 个物理量，其中任一个物理量的量纲均不能用其他物理量的量纲组合来表示，则称 k 个物理量的量纲独立。例如长度$[L]$、速度$[LT^{-1}]$和能量$[ML^{-2}T^{-1}]$，这 3 个物理量中任一个物理量的量纲都不可能通过其他 2 个物理量的量纲组合来表示，它们的量纲是独立的。长度$[L]$、速度$[LT^{-1}]$和加速度$[LT^{-2}]$，这 3 个物理量的量纲是不独立的。

如何判断物理量的量纲是否独立，以下面例子进行说明。

假设物理量 R 的表达式为，$R=a^x b^y c^z$，如果确定出指数 x、y 和 z 的值，使物理量 R 成为无量纲量，则物理量 a、b 和 c 之间的量纲是不独立，只是物理量 R 的一个定数。也就是说，只要确定 a、b 和 c 中的任意 2 个量，第三个量也就确定了。

假设物理量 a、b 和 c 的量纲分别为：

$$[a]=M^{\alpha_1}L^{\beta_1}T^{\gamma_1}$$

$$[b]=M^{\alpha_2}L^{\beta_2}T^{\gamma_2}$$

$$[c]=M^{\alpha_3}L^{\beta_3}T^{\gamma_3}$$

则，$(M^{\alpha_1}L^{\beta_1}T^{\gamma_1})^x\ (M^{\alpha_2}L^{\beta_2}T^{\gamma_2})^y\ (M^{\alpha_3}L^{\beta_3}T^{\gamma_3})^z=[R]$

要使物理量 R 成为无量纲量，必须满足，$[R]=M^0L^0T^0$

即是必须满足

$$M^{\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z}L^{\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z}T^{\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z}=M^0L^0T^0$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z=0\\ \beta_1x+\beta_2y+\beta_3z=0\\ \gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z=0\end{aligned}\right\}$$

根据齐次方程的性质可知，只有当

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0$$

物理量 a、b 和 c 为具有彼此独立量纲的物理量。

1.2.2.2 π 定理

根据理论分析或模型实验建立的各物理量之间的函数关系，其物理量的数值依赖于所采用的量度单位制。因此，为了使描述物理现象的函数关系不受度量单位制选择的影响，则与量度单位制无关的描述物理现象的函数关系应具有某种特殊的结构形式。

设描述所研究现象的函数关系是有量纲的物理量 x_1，x_2，…，x_n 的函数，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{1-5}$$

其中在物理量 x_1，x_2，…，x_n 中的 k 个物理量（$k\leqslant n$）的量纲是独立的（基本量度单位的数目应当大于或等于 k）。即 k 个量中的任何一个量的量纲都不能表示为其他各物理量量纲的幂积单项式形式。

假定 k 是 $n+1$ 个参量中量纲独立参量的最大数目，则其余的物理量 x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_n 的量纲可以通过量纲独立参量 x_1，x_2，…，x_k 的量纲表示出来。

如果 k 个量纲独立量的量纲写为$[x_1]$，$[x_2]$，…，$[x_k]$，则根据量纲公式，其余 $n-k$ 个物理量的量纲可表示为

$$\begin{aligned}&[x_{k+1}]=[x_1]^{\alpha_1}[x_2]^{\alpha_2}\cdots[x_k]^{\alpha_k}\\ &[x_{k+2}]=[x_1]^{\beta_1}[x_2]^{\beta_2}\cdots[x_k]^{\beta_k}\\ &\qquad\vdots\\ &[x_n]=[x_1]^{\gamma_1}[x_2]^{\gamma_2}\cdots[x_k]^{\gamma_k}\end{aligned} \tag{1-6}$$

其中方程组中指数 α_1，α_2，…，α_k；β_1，β_2，…，β_k；γ_1，γ_2，…，γ_k 均为无量纲数。

由式(1-4) 可以得到

$$\left.\begin{array}{l}\left[\dfrac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}}\right]=1\\ \left[\dfrac{x_{k+1}}{x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_k^{\beta_k}}\right]=1\\ \quad\vdots\\ \left[\dfrac{x_{k+1}}{x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\cdots x_k^{\gamma_k}}\right]=1\end{array}\right\} \tag{1-7}$$

从前面讲述中可知，如两个量的比值为 1，则该比值为无量纲量。用 π 表示该无量纲量，有

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1=\dfrac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}}\\ \pi_2=\dfrac{x_{k+2}}{x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_k^{\beta_k}}\\ \quad\vdots\\ \pi_{n-k}=\dfrac{x_n}{x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\cdots x_k^{\gamma_k}}\end{array}\right\} \tag{1-8}$$

这样，把函数关系 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 中量纲不独立的物理量 x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_n 用量纲独立的物理量 x_1，x_2，…，x_k 组成的若干个无量纲量来表示。

对于具有独立量纲的物理量 x_1，x_2，…，x_k 同样可以写成

$$\left.\begin{array}{l}\left[\dfrac{x_1}{x_1^1x_2^0\cdots x_k^0}\right]=1\\ \left[\dfrac{x_2}{x_1^0x_2^1\cdots x_k^0}\right]=1\\ \quad\vdots\\ \left[\dfrac{x_k}{x_1^0x_2^0\cdots x_k^1}\right]=1\end{array}\right\} \tag{1-9}$$

经过处理后，式(1-9) 中各个表达式，不仅量纲为 1，而且数值也等于 1。经过上述各项变换后，式(1-5) 可变为

$$f(1,1,\cdots,1,\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-k})=0$$

简化为，
$$f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-k})=0 \tag{1-10}$$

式(1-10) 表明，参与现象或过程的 n 个有量纲物理量 x_1，x_2，…，x_n，如果其中 k 个物理量是量纲独立的，则描述现象的函数关系式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 可简化为由 n 个有量纲量组合而成的 $n-k$ 个无量纲量 π，π_1，…，π_{n-k} 之间的关系函数式。这就是著名的 π 定理，也叫白金汉 (E. Buckingham) 定理。显然，函数关系式(1-10) 与单位制的选择无关，式中 π 是由有量纲量构成的无量纲组合或称为无量纲乘积。当 $k\leqslant n$，π 的数目为 $n-k$。

一般地，参量的数目越少，函数关系式就越简单。如果基本物理量的数目等于独立参量数目，利用量纲分析可以得到无量纲乘积之间的函数关系，这时，只需要通过实验或理论分析确定待定的常数因子，即可以得到精确的函数表达式。例如，函数关系式中 $y=cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$，指数 m_1，m_2，…，m_n 由通过量纲分析确定，无量纲常数 c 则由实验或相应的理论分析确定。

当 $n=k$ 时，所有参量的量纲独立，则参量 x_1，x_2，…，x_n 不能组成无量纲组合。

π 定理是量纲分析理论的基础，它在各种实验定律的发展上起着重要的作用。但是在实际应用过程中会存在一些制约。首先，如何确定描述现象或过程的相关物理量，并判断哪些是主要参量。特别是对于一些复杂的现象或过程，还不甚了解其规律和本质。参量的过多、过少或是误判都会影响分析结果。其次，就是如何决定作为重复变量的物理量。当重复变量的选取不同时，所得到的无量纲组合 π 的集合亦不同，会得到不同的函数关系。

1.2.3 量纲的和谐性和完整性

1.2.3.1 量纲和谐性

任何由无量纲乘积构成的方程不依基本量度单位的选择而改变其形式，这样的方程量纲上是和谐的。一个方程式量纲上和谐的一个必要条件就是它可以化为无量纲乘积之间的方程。一般地，有物理意义的代数表达式或根据物理规律建立的完整的物理方程是量纲和谐的，这就是量纲和谐性原则。量纲和谐性原则也称为一致性原则，它表明一个完整的物理方程中所有项的量纲都是相同的。因此，量纲和谐的物理方程的形式与基本量度单位的选择无关。例如，根据单摆摆动周期方程为 $T=2\pi\sqrt{l/g}$，不管长度是采用米、英尺或公里，时间是采用秒、分还是小时，结果都是不变的。

方程式中各项的量纲和谐是从所研究物理量的物理意义进行考察，而方程式的齐次性得从数学概念上进行表达，二者是一致的。只有方程式中各项量纲和谐，才能满足数学齐次性的条件。相反只有方程式具有数学齐次性，才是物理量纲和谐的完整方程式。因此量纲的和谐性也称为量纲的齐次性。

由于只有量纲和谐的方程才可能是完整的物理方程，因此，应用量纲一致性原则可以检验导出的物理方程的正确性。同时，量纲一致性原则也是求取无量纲组合 π 的重要理论基础，在量纲分析理论中有着十分重要的作用。

量纲和谐函数的数学分析就是量纲分析原理，关于实际问题的量纲分析也是以量纲的和谐性为基础的。

一般情况下，除非知道导出的物理方程已经包含了支配现象的所有参量，否则不能断言一个未知方程是量纲和谐的。例如在研究水流中的球体上的曳力问题时，鉴于水的密度和黏滞性在常温常压时的数值为常数，密度和黏滞性可以不计，则此时的曳力方程形式即为 $F=f(u, d)$。显然，由此函数关系建立量纲和谐函数是不可能的，因为速度 u 和球径 d 中不包含力或质量的量纲。事实上，水流中的球体曳力不仅与水的密度、黏度有关，还与重力加速度 g 有关。由此可见，对某问题进行量纲分析时，首先要确定哪些参量与研究的现象相关。如果引入某些与现象无关的参量，在方程中会出现多余的项。相反，如果在影响现象的参量被遗漏，则可能导致方程的不完全或错误。由此参量的确定在量纲分析中是一个至关重要的问题。

一般地，对于已有的数学方程所描述的现象，只要把方程中所有的自变量、因变量和物理常数逐个列出就可以了。当研究的问题属于一个全新的未知领域时，尚未建立描述这一问题的数理方程时，则只能根据对该问题做初步的理论分析或实验研究才能确定出支配该现象的各参数。从前面叙述可以看到，密度、黏度这些物理常数往往是支配现象的重要因素。因此，在决定一类现象的参数时，不能忽略物理常数，需要考虑它们对现象的影响。

1.2.3.2 无量纲乘积的完整集合

如果总参量数为 n 个的函数关系式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 中有 k 个基本量（$k \leqslant n$），根据 π 定理，则此函数关系可简化为 $n-k$ 个无量纲乘积 π 之间的函数关系，且这 $n-k$ 个无量纲乘积就是该函数无量纲乘积 π 的完整集合。

以流体力学为例，描述流体运动的参量是力 F、长度 l、速度 v、密度 ρ、动力黏度 μ、重力加速度 g、声速 c 和表面张力 σ，总参量 $n=8$，基本量 $k=3$，完整集合中无量纲乘积的数目为 $n-k=8-3=5$，这些无量纲乘积分别是：

雷诺数（Reynolds number）：$Re=\dfrac{\rho v l}{\mu}$

欧拉数（Euler number）或称为压力系数（Pressure number）：$Eu=\dfrac{F}{\rho v l^2}=\dfrac{p}{\rho v^2}$

弗鲁德数（Froude number）：$Fr=\dfrac{v^2}{gl}$

马赫数（Mach number）：$Ma=\dfrac{v}{c}$

韦伯数（Weber number）：$We=\dfrac{\sigma}{\rho v^2 l}$

无量纲乘积的完整集合有两个特点，第一特点是集合中的各无量纲乘积是独立的。即在这些乘积中没有一个可以表示成其他物理量乘积的幂次单项式形式。这是因为无量纲乘积完整集中的各无量纲乘积，都是根据 π 定理由选作重复变量的参量以外的其余各参量单独对重复变量依据量纲的和谐性求出的。第二特点是无量纲乘积完整集合以外的无数个无量纲乘积 π，必然可由完整集合中各乘积的幂次单项式表示。即当指数 α_i 中两个或两个以上不为 0 时，可组合得到其他形式的无量纲乘积 π，但这些无量纲乘积不再独立。例如由参量 F、l、v、ρ、μ、g、c 和 σ 组成的无量纲乘积 π，$\pi=Re^{\alpha_1}Eu^{\alpha_2}Fr^{\alpha_3}Ma^{\alpha_4}We^{\alpha_5}$，取 $\alpha_1=2$，$\alpha_2=1$，$\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0$，则有

$$Re^2 \cdot Eu=\frac{\rho f}{\mu^2}$$

取 $\alpha_1=1$，$\alpha_3=1$，$\alpha_2=\alpha_4=\alpha_5=0$，则有

$$Re \cdot Fr=\frac{\rho v^3}{\mu g}$$

由于 Re、Eu、Fr、Ma 是无量纲的，所以它们的幂积也是无量纲的。但它们不再是独立的了，不是新的无量纲乘积。

因此，无量纲乘积的完整集合也可表述为，一定数目参数的无量纲乘积的集合是完整的，那么该集合中每一乘积都独立于其他乘积，而且各参数的任一个无量纲乘积都是集合中各无量纲乘积的幂次单项式。

需要注意的是，在气体动力学中，压力 p、密度 ρ 和声速 c 是由方程 $c=\sqrt{rp/\rho}$ 联系的。式中，$r=1.40$（空气及其他双原子气体）是一个无量纲常数，因而在以上 3 个变量中，只需要两个同时出现。如果取消 c，则由马赫数可得

$$Ma=\frac{v}{c}=\frac{v}{\sqrt{r\dfrac{p}{\rho}}}=v\sqrt{\frac{\rho}{rp}}$$